

Bulletin N° 156

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| AUS DEM VORSTAND | 5 |
| Josef Züger Gedanken des Präsidenten/Pensée du président/Pensieri del presidente | 5 |
| VSMP Generalversammlung VSMP 2024 – Assemblée générale SSPMP 2024 – Assemblea generale SSIMF 2024 | 6 |
| DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION | 7 |
| Georg Keller Erstaunliche Teilbarkeitseigenschaft gewisser Produkt- resp. Potenzsummen | 7 |
| Beat Jaggi Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen | 12 |
| Andreas Nüesch Rezension: Der Goldene Schnitt | 19 |
| Hans Ulrich Keller Eine Formel für $S(n,k)$ | 20 |
| Wilfried Lingenberg Nichtstandardanalysis – Ein sehr alter, sehr neuer Zugang zur Differential- und Integralrechnung | 27 |
| DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION | 34 |
| Martin Lieberherr Evolventenpendel | 34 |
| WISSENSCHAFTSWETTBEWERBE | 38 |
| Samuel Byland Silbermedaille beim IYPT 2024 und Ausblick auf das SYPT 2025 | 38 |
| Lara Gafner Mathematik- und Physik-Olympiaden feiern Ausnahmeerfolge | 40 |
| Lara Gafner Les Olympiades de mathématiques et de physique célèbrent des succès exceptionnels | 42 |
| COMMISSIONE DI MATEMATICA DELLA SVIZZERA ITALIANA | 44 |
| Guido Lob Il problema isoperimetrico per la famiglia dei triangolo | 44 |
| CMSI Il secondo numero della collana iQuaderni della CMSI | 48 |

Internet-Adressen – *Adresses Internet*
www.vsmf.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch

Titelseite – *Page de Titre*
Evolventenpendel. Artikel auf Seite 34 in dieser Ausgabe.

Josef Züger

Präsident VSMP, praesident@vsmp.ch

Gedanken des Präsidenten

Pensées du président

Pensieri del presidente

Liebe Leserinnen, liebe Leser

Die Revisionen der Reglemente und des Rahmenlehrplans sind abgeschlossen und nun stehen in der ganzen Schweiz die Anpassungen auf kantonaler Ebene an. Hier sind jetzt die Fachschaften der einzelnen Schulen und der Kantone gefordert sich dafür einzusetzen, dass die Umsetzung zu einem Erfolg wird. Die Ankündigungen einzelner Kantone lässt aufhorchen, denn die angekündigte Stärkung der sogenannten MINT-Fächer droht eher zu einem Abbau zu werden. Wir müssen uns stark machen. Gerade die jüngeren Lehrerinnen und Lehrer werden noch lange mit den neuen Regelungen arbeiten müssen. Es ist deshalb wichtig, dass sich auch die jüngeren Lehrerinnen und Lehrer in den Gremien engagieren. Im Vorstand des VSMP, aber auch in den Kommissionen CMSI, CRM, CRP, DMK und DPK sind jüngere Mitglieder sehr willkommen. Melden Sie sich doch beim Präsidium «ihrer» Kommission und/oder besuchen Sie die Generalversammlung des VSMP. Diese findet in Fribourg statt. Geplant ist dort neben den ordentlichen Traktanden auch eine Teilrevision der Statuten. Im Vorfeld besuchen wir das Schweizerische Nähmaschinenmuseum. In dieser Nummer des Bulletins finden Sie die Einladung zur Generalversammlung.

Josef Züger, Präsident VSMP



Chères lectrices, chers lecteurs

Les révisions des règlements (RRM/ORM) et du plan d'études cadre (PEC) sont terminées et il faut maintenant procéder aux adaptations au niveau cantonal dans toute la Suisse. Les associations professionnelles des différentes écoles et des cantons doivent s'engager pour que la mise en œuvre soit un succès. Les annonces faites par certains cantons font cependant dresser l'oreille, car le renforcement annoncé des disciplines dites MINT risque plutôt de se transformer en un démantèlement. Nous devons par conséquent nous montrer déterminé·e-s, surtout les jeunes enseignants et enseignants qui devront encore travailler longtemps avec les nouvelles réglementations, faire appliquer ce qui est prévu par les règlements. Il est donc important que les jeunes collègues s'engagent dans les comités. Ils et elles sont les bienvenu·e-s au

sein du comité de la SSPMP, mais aussi dans les commissions CMSI, CRM, CRP, DMK et DPK. N'hésitez pas à vous adresser à la présidence de «votre» commission et/ou à vous rendre à l'Assemblée générale (AG) de la SSPMP, dont l'invitation se trouve dans ce Bulletin. L'AG aura lieu à Fribourg. En plus de la partie officielle, nous discuterons d'une révision partielle des statuts. Avant l'Assemblée générale, nous visiterons le Musée suisse de la machine à coudre et des objets insolites.

Josef Züger, Président de la SSPMP



Care lettrici, cari lettori,

le revisioni dei regolamenti (RRM/ORM) e del piano quadri degli studi (PQS) sono state completate ed è ora giunto il momento di apportare i necessari adattamenti a livello cantonale in tutta la Svizzera. È dunque responsabilità delle associazioni di categoria delle varie scuole e dei cantoni impegnarsi al fine di garantire il successo dell'attuazione. Tuttavia le comunicazioni ricevute da alcuni cantoni ci rendono diffidenti perché l'annunciato rafforzamento delle cosiddette discipline MINT sembrerebbe piuttosto rischioso di trasformarsi in uno smantellamento delle stesse. Per questo motivo è fondamentale essere determinati e far rispettare quanto stabilito dai regolamenti, in particolare coloro che dovranno convivere a lungo con le nuove norme. È quindi importante che i giovani colleghi siano coinvolti nelle commissioni: sono benvenuti nel comitato della SSIMF come pure nelle sue commissioni CMSI, CRM, CRP, DMK e DPK.

Non esitate dunque a contattare il presidente della "vostra" commissione e/o a partecipare all'Assemblea generale (AG) della SSIMF, il cui invito è incluso in questo Bulletin. L'Assemblea generale si terrà a Friburgo e oltre alle questioni ordinarie si discuterà di una revisione parziale degli statuti. Prima dell'assemblea generale visiteremo inoltre il Museo svizzero delle macchine per cucire e degli oggetti insoliti.

Josef Züger, Presidente SSIMF



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

Einladung zur Generalversammlung des VSMP

Invitation à l'Assemblée générale de la SSPMP

Invito all'Assemblea generale della SSIMF

Kollegium St. Michael in Freiburg / Collège Saint-Michel Fribourg

Freitag, 22. November 2024 – *vendredi 22 novembre 2024* – venerdì 22 novembre 2024

A. Rahmenprogramm

14:30: Führung im Schweizerischen Nähmaschinenmuseum mit seltenen Gegenständen

14h30: visite guidée du Musée suisse de la machine à coudre et des objets insolites

Grand Rue 58, 1700 Fribourg

B. Generalversammlung 2024 – Assemblée générale 2024 – Assemblea generale 2024

Beginn – début – inizio: 16:30

Ort – lieu – luogo: Zimmer /Salle 3.14, Collège Saint-Michel, Rue St. Pierre Canisius 10, 1700 Fribourg

Traktandenliste – *Ordre du jour* – Ordine del giorno:

0. Begrüssung – *Salutations* – Saluto

1. Traktandenliste 2024, Protokoll 2023 – *Ordre du jour 2024, procès-verbal 2023* – Ordine del giorno 2024, verbale 2023

2. Jahresberichte des Vereins und der Kommissionen – *Rapports annuels de la société et des commissions* – Rapporti annuali della società e delle commissioni

3. Jahresrechnungen des Vereins und der Kommissionen 2023/24 – *Comptes annuels de la société et des commissions 2023/24* – Conti annuali della società e delle commissioni 2023/24

4. Budget 2024/25 und Mitgliederbeitrag 2025/26 – *Budget 2024/25 et cotisations 2025/26* – Preventivo 2024/25 e quota sociale 2025/26

5. Mutationen – *Mutations* – Mutazioni

6. Ersatzwahlen – *élections complémentaires* – elezioni suppletive

7. Revision der Statuten – *Révision des statuts* – revisione degli statuti

8. Anträge von Mitgliedern – *Propositions des membres* – Mozioni di membri

9. Varia – *Divers* – Eventuali

Bemerkung – *Remarque* – Commento:

▪ Das Protokoll der letzten GV sowie die diesjährige Einladung sind auf unserer Website vsmp.ch zu finden.

▪ *Le procès-verbal de la dernière AG ainsi que l'invitation de cette année se trouvent sur notre site sspmp.ch.*

▪ Il verbale dell'ultima AG e l'invito all'AG di quest'anno possono essere trovati sul sito ssimf.ch.

C. Gemeinsames Abendessen – *Repas du soir en commun* – Cena comune

▪ Im Anschluss an die GV werden wir in einem Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekanntgegeben.

▪ *Après l'assemblée générale, nous prendrons un repas en commun dans un restaurant dont l'adresse sera communiquée lors de l'AG.*

▪ Al termine è prevista una cena comune; l'indirizzo del ristorante sarà comunicato al termine dell'AG.

Bonaduz, 3. September 2024, Josef Züger, Präsident / *Président* / Presidente

Georg Keller
Kantonsschule Schaffhausen, georg.keller@kanti.sh.ch

Erstaunliche Teilbarkeitseigenschaft gewisser Produkt- resp. Potenzsummen

Teil 2

Einleitung

Im 1. Teil [1] dieser kleinen Bulletin-Beitragsreihe formulierten wir den

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, gilt:

- n ist prim \Leftrightarrow für alle $1 \leq k \leq (n - 2)$ ist $\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n-1} i_1 \cdot i_2 \cdots i_k$ teilbar durch n (1)
- n ist prim \Leftrightarrow für alle $1 \leq k \leq (n - 2)$ ist $\sum_{i=1}^{n-1} i^k$ teilbar durch n (2)

und bewiesen die Richtigkeit von (1). Das Ziel des vorliegenden zweiten und letzten Teils ist ein Beweis von (2). Bevor wir aber mit diesem Beweis beginnen können, müssen wir noch einige algebraische Vorbereitungen treffen. Dazu könnten wir auf die in [1] vorgenommene algebraische Vorbereitung für den Beweis von (1) verweisen und diese soweit als nötig ergänzen; zwecks möglichst einfacher Lesbarkeit des vorliegenden Bulletin-Beitrags verzichten wir aber auf diesen Verweis auf [1] und legen die später benötigten, lehrbuchmässigen algebraischen Grundlagen vollständig, wenn auch ohne Beweise, dar.

Algebraische Vorbereitung für den Beweis von (2)

Mit $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \dots, (n - 1)\}$ bezeichnen wir die Menge der Restklassen modulo $n \in \mathbb{N}$ und mit $\mathbb{Z}_n^+ := \{1, 2, \dots, (n - 1)\}$ die Menge der positiven Restklassen modulo n . Den trivialen Fall $n = 1$ mit $\mathbb{Z}_1 = \{0\}$ und $\mathbb{Z}_1^+ = \emptyset$ ausklammernd, beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $n \geq 2$. Im wichtigen Spezialfall, wo n eine Primzahl ist, werden wir (wenn sinnvoll möglich) jeweils p statt n schreiben, z.B. also \mathbb{Z}_p statt \mathbb{Z}_n . Und der Kürze halber werden wir statt $a \equiv b \pmod{n}$ nur $a =_n b$ schreiben.

Mit der üblichen Addition und Multiplikation (und wie erwähnt für $n \geq 2$) wird \mathbb{Z}_n ein kommutativer Ring mit Eins, \mathbb{Z}_p ein endlicher Körper und \mathbb{Z}_p^+ eine multiplikative kommutative Gruppe. Eine berühmte, in \mathbb{Z}_p^+ geltende Tatsache ist der Kleine Satz von Fermat: $a^{p-1} =_p 1$, für alle $a \in \mathbb{Z}_p^+$. Ausserdem ist \mathbb{Z}_p^+ eine zyklische Gruppe, d.h. es gibt ein Element $w \in \mathbb{Z}_p^+$, sodass $\mathbb{Z}_p^+ = \{w, w^2 \pmod{p}, w^3 \pmod{p}, \dots, w^{p-1} \pmod{p}\}$ ist (wobei, wie erwähnt, $w^{p-1} \pmod{p} = 1$ ist); w heisst erzeugendes Element von \mathbb{Z}_p^+ .

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Eulersche Phi-Funktion als $\varphi(n) := |\{a \mid a \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ggT}(a, n) = 1\}|$ definiert. Wenn wir die Primfaktorzerlegung von n in der Form $n = \prod_{q|n} q^{k_q}$, $q = \text{prim}$, schreiben (wobei für $n = 1$ das Produkt über die leere Indexmenge gebildet und daher wie üblich als die Zahl 1 definiert ist), kann $\varphi(n)$ so berechnet werden:

$$\varphi(n) = \prod_{q|n} q^{k_q-1} (q - 1) \quad (3)$$

Und der den Kleinen Satz von Fermat von \mathbb{Z}_p^+ auf \mathbb{Z}_n^+ verallgemeinernde Satz von Euler besagt:

$$a^{\varphi(n)} =_n 1, \quad \forall a \in \mathbb{Z}_n^+ \text{ mit } \text{ggT}(a, n) = 1 \quad (4)$$

Beweis von (2)

„ \Rightarrow “ Es sei also n eine beliebige Primzahl $p \geq 3$. Und w sei ein erzeugendes Element von \mathbb{Z}_p^+ . Dann ist $\{i \mid 1 \leq i \leq (p-1)\} = \{w^j \bmod p \mid 1 \leq j \leq (p-1)\}$, und daher kann die zu untersuchende Potenzsumme $\sum_{i=1}^{p-1} i^k$ modulo p wie folgt umgeschrieben werden:

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k = \sum_{j=1}^{p-1} (w^j \bmod p)^k =_p \sum_{j=1}^{p-1} (w^k \bmod p)^j \quad (5)$$

Mit der Abkürzung $y := w^k \bmod p$ erfüllt die in (5) auftretende Summe $S := \sum_{j=1}^{p-1} y^j$ die Gleichung

$$S \cdot (y - 1) = y^p - y \quad (6)$$

Weil w ein erzeugendes Element und $1 \leq k \leq (p-2)$ ist, ist $2 \leq y \leq (p-1)$; daher liegt der in (6) auftretende Faktor $(y-1)$ in \mathbb{Z}_p^+ , hat also in \mathbb{Z}_p ein Inverses $(y-1)^{-1}$, und aufgrund des Kleinen Satzes von Fermat ist $y^p - y =_p 0$. Damit erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k =_p S =_p (y^p - y) \cdot (y - 1)^{-1} =_p 0 \quad \blacksquare$$

Anmerkungen: • Für den Spezialfall $k = \text{ungerade}$ gibt es noch einen viel direkteren Beweis von (2): Es ist ja $(p-1) =_p -1$, $(p-2) =_p -2$, etc.; daher folgt, dass

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p-1} i^k &= 1^k + 2^k + \dots + (p-2)^k + (p-1)^k \\ &=_p 1^k + 2^k + \dots + (-2)^k + (-1)^k \end{aligned}$$

ist. Weil p ungerade ist, hat diese Summe eine gerade Anzahl Summanden, welche sich – weil auch k ungerade ist – paarweise aufheben.

- (2) „ \Rightarrow “ kann auch als Folgerung aus (1) „ \Rightarrow “ verstanden werden. Und das geht so: Zuerst beweist man für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq m$ die folgende Zerlegung gewisser symmetrischer Polynome in den Variablen z_i , $1 \leq i \leq m$:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq m} z_{i_1} \cdot \dots \cdot z_{i_k} &= \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq m} z_{i_1} \cdot \dots \cdot z_{i_{k-1}} \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq i_k \leq m} z_{i_k} \right) \\ &\quad - \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-2} \leq m} z_{i_1} \cdot \dots \cdot z_{i_{k-2}} \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq i_{k-1} < i_k \leq m} z_{i_{k-1}} \cdot z_{i_k} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-3} \leq m} z_{i_1} \cdot \dots \cdot z_{i_{k-3}} \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq i_{k-2} < i_{k-1} < i_k \leq m} z_{i_{k-2}} \cdot z_{i_{k-1}} \cdot z_{i_k} \right) \\ &\quad - \dots + \dots \\ &\quad + (-1)^k \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_1 \leq m} z_{i_1} \right) \cdot \left(\sum_{1 \leq i_2 < i_3 < \dots < i_{k-1} \leq m} z_{i_2} \cdot z_{i_3} \cdot \dots \cdot z_{i_{k-1}} \right) \\ &\quad + (-1)^{k+1} \cdot k \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m} z_{i_1} \cdot z_{i_2} \cdot \dots \cdot z_{i_k} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Und jetzt setzen wir in (7) $m := p-1$, $z_i := i$, schränken k auf $1 \leq k \leq (p-2)$ ein, rechnen beide Seiten von (7) modulo p und verwenden auf der rechten Seite von (7) die Aussage (1) „ \Rightarrow “, woraus wir (2) „ \Rightarrow “ erhalten.

- „ \Leftarrow “ n ist also eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geq 3$. Unsere Beweisstrategie ist: Wir wollen zeigen, dass für *zusammengesetztes* n mindestens die Potenzsumme $\sum_{i=1}^{n-1} i^k$ mit $k := \varphi(n)$ *nicht* durch n teilbar ist. Weil der dabei auftretende Exponent k die Bedingung $1 \leq k \leq (n-2)$ erfüllt – da definitionsgemäss $\varphi(n) \geq 1$ und, für zusammengesetztes $n \geq 3$, ebenfalls $\leq (n-2)$ ist – werden wir damit (2) „ \Leftarrow “ bewiesen haben.

- Es sei also n eine beliebige *zusammengesetzte* Zahl mit $n \geq 3$. Mit p einen der Primfaktoren von n bezeichnend und mit p^j seine höchste in n auftretende Potenz, schreiben wir die Primfaktorzerlegung von n in der Form

$$n = p^j \cdot Q \quad \text{mit} \quad Q := \begin{cases} \text{restl. Primpotenzen, für } j = 1 \\ \text{restl. Primpotenzen oder } 1, \text{ für } j \geq 2 \end{cases} \quad (8)$$

Gemäss (3) und (8) kann $\varphi(n)$ wie folgt dargestellt werden:

$$\varphi(n) = p^{j-1}(p-1) \cdot \begin{cases} \prod_{q|Q} q^{k_q-1} (q-1), \text{ für } Q \neq 1 \\ 1, \text{ für } Q = 1 \end{cases} = \varphi(p^j) \cdot \varphi(Q) \quad (9)$$

- Wie erwähnt, wollen wir nachweisen, dass $\sum_{i=1}^{n-1} i^{\varphi(n)} \not\equiv_n 0$ ist; wir werden dies erreichen, indem wir zeigen, dass $\sum_{i=1}^{n-1} i^{\varphi(n)} \not\equiv_{p^j} 0$ ist. Dazu schreiben wir zuerst die Summe $\sum_{i=1}^{n-1} i^{\varphi(n)}$ für später etwas bequemer als $\sum_{a \in \mathbb{Z}_n^+} a^{\varphi(n)}$ und zerlegen diese in zwei geeignet gewählte Teilsommen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\varphi(n)} = \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^+} a^{\varphi(n)} =_{p^j} \left(\sum_{\text{ggT}(a,n)=1} a^{\varphi(n)} \right) \text{ mod } p^j \quad (10)$$

$$+ \left(\sum_{\text{ggT}(a,n)>1} a^{\varphi(n)} \right) \text{ mod } p^j \quad (11)$$

- Auswertung der Teilsomme (10): Dank (4) können wir für jedes $a \in \mathbb{Z}_n^+$ mit $\text{ggT}(a,n) = 1$ den Term $a^{\varphi(n)}$ als $a^{\varphi(n)} = 1 + n \cdot \mathbb{Z}$ schreiben; und weil ja $n \text{ mod } p^j = 0$ ist, erhalten wir

$$\left(\sum_{\text{ggT}(a,n)=1} a^{\varphi(n)} \right) =_{p^j} \left(\sum_{\text{ggT}(a,n)=1} (1 + n \cdot \mathbb{Z}) \right) =_{p^j} \left(\sum_{\text{ggT}(a,n)=1} 1 \right) =_{p^j} \varphi(n) \quad (12)$$

- Auswertung der Teilsomme (11): Wir teilen die Summanden von (11) in zwei Gruppen auf bezüglich des Primfaktors p von n :

$$\left(\sum_{\text{ggT}(a,n)>1} a^{\varphi(n)} \right) =_{p^j} \left(\sum_{\substack{\text{ggT}(a,n)>1 \\ p|a}} a^{\varphi(n)} \right) \text{ mod } p^j \quad (13)$$

$$+ \left(\sum_{\substack{\text{ggT}(a,n)>1 \\ p \nmid a}} a^{\varphi(n)} \right) \text{ mod } p^j \quad (14)$$

- Auswertung der Teil-Teilsomme (13): Weil die 3. Summationsbedingung $p|a$ die 2. Summationsbedingung impliziert, muss Letztere gar nicht mehr beachtet werden. Und weil jedes $a \in \mathbb{Z}_n^+$ mit $p|a$ die Form $a = p \cdot b$, $b \in \mathbb{N}$, hat, schreiben wir zuerst (13) als

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\substack{\text{ggT}(a,n)>1 \\ p|a}} a^{\varphi(n)} \right) &=_{p^j} (p^{\varphi(n)} \text{ mod } p^j) \cdot \left(\sum_{\text{gewisse } b \in \mathbb{N}} b^{\varphi(n)} \right) \\ &\stackrel{(9)}{\cong}_{p^j} (p^{\varphi(p^j)} \text{ mod } p^j)^{\varphi(Q)} \cdot \left(\sum_{\text{gewisse } b \in \mathbb{N}} b^{\varphi(n)} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

Jetzt werten wir den ersten Faktor von (15) aus. Dazu beobachten wir Folgendes [2]: Für alle $p \geq 2$ und $j \geq 1$ sind die Zahlen $p^1 - 1, p^2 - 1, p^3 - 1, \dots, p^j - 1$ insgesamt j unterschiedliche Elemente der Zahlenmenge $\{1, 2, \dots, p^j\}$, und sie alle sind teilerfremd zu p^j , d.h. $\text{ggT}(p^i - 1, p^j) = 1$, für $1 \leq i \leq j$. Daher ist $\varphi(p^j) \geq j$, und entsprechend gilt

$$p^{\varphi(p^j)} \bmod p^j = 0 \quad . \quad (16)$$

Gemäss (15), (16) erhalten wir also

$$\left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_n^+ \\ \text{ggT}(a,n) > 1 \\ p \mid a}} a^{\varphi(n)} \right) =_{p^j} 0 \quad . \quad (17)$$

- Auswertung der Teil-Teilsumme (14): Erstens schreiben wir

$$\left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_n^+ \\ \text{ggT}(a,n) > 1 \\ p \nmid a}} a^{\varphi(n)} \right) \stackrel{(9)}{=}_{p^j} \left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_n^+ \\ \text{ggT}(a,n) > 1 \\ p \nmid a}} \left((a \bmod p^j)^{\varphi(p^j)} \bmod p^j \right)^{\varphi(Q)} \right) \quad (18)$$

und bemerken zweitens, dass wegen der Summationsbedingung $p \nmid a$ nicht nur $(a \bmod p^j) \in \mathbb{Z}_{p^j}^+$ gilt, sondern auch $p \nmid (a \bmod p^j)$ und deswegen $\text{ggT}((a \bmod p^j), p^j) = 1$. Via Satz von Euler können wir (18) daher wie folgt fortsetzen:

$$=_{p^j} \left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_n^+ \\ \text{ggT}(a,n) > 1 \\ p \nmid a}} 1^{\varphi(Q)} \right) =_{p^j} \left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_n^+ \\ \text{ggT}(a,n) > 1 \\ p \nmid a}} 1 \right) \quad (19)$$

Jetzt berechnen wir die in (19) auftretende Summe:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_n^+ \\ \text{ggT}(a,n) > 1 \\ p \nmid a}} 1 \right) &= |\{a \in \mathbb{Z}_n^+ \mid \text{ggT}(a, n) > 1, p \nmid a\}| \\ &= |\{a \in \mathbb{Z}_n^+ \mid \text{ggT}(a, n) > 1\}| - |\{a \in \mathbb{Z}_n^+ \mid \text{ggT}(a, n) > 1, p \mid a\}| \end{aligned}$$

und wiederum die dank $p \mid a$ automatisch erfüllte Bedingung $\text{ggT}(a, n) > 1$ weglassend:

$$\begin{aligned} &= [|\{a \in \mathbb{Z}_n^+\}| - |\{a \in \mathbb{Z}_n^+ \mid \text{ggT}(a, n) = 1\}|] - |\{a \in \mathbb{Z}_n^+ \mid p \mid a\}| \\ &\stackrel{(8)}{=} [(n-1) - \varphi(n)] - \{p \cdot 1, p \cdot 2, p \cdot 3, \dots, p \cdot (p^{j-1} \cdot Q - 1)\} \end{aligned}$$

(beachte, dass für alle zulässigen p, j, Q die Zahl $(p^{j-1} \cdot Q - 1) \geq 1$ ist)

$$= (n-1) - \varphi(n) - (p^{j-1} \cdot Q - 1) = n - \varphi(n) - p^{j-1} \cdot Q \quad (20)$$

womit wir sehen:

$$\left(\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_n^+ \\ \text{ggT}(a,n) > 1 \\ p \nmid a}} a^{\varphi(n)} \right) \stackrel{(19,20)}{\cong} p^j \cdot n - \varphi(n) - p^{j-1} \cdot Q \tag{21}$$

(10)-(14) und (17), (21) zusammenfassend, erhalten wir schliesslich das in Aussicht gestellte Resultat:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^{\varphi(n)} =_{p^j} [\varphi(n) + n - \varphi(n) - p^{j-1} \cdot Q] =_{p^j} [-p^{j-1} \cdot Q] \neq_{p^j} 0 \quad \blacksquare$$

Anmerkung: Für die Richtigkeit der Behauptung „ $\sum_{i=1}^{n-1} i^k$ ist teilbar durch $n \geq 3$, für alle $1 \leq k \leq (n-2) \Rightarrow n \notin 2\mathbb{N}$ “, was ja eine Teilaussage von (2) ist, gibt’s einen sehr viel kürzeren Beweis: Wegen $(n-1) =_n -1$, $(n-2) =_n -2$, etc., erhalten wir für $n \in 2\mathbb{N}$, $n \geq 3$, und für $k = 1$: $\sum_{i=1}^{n-1} i^1 =_n 1 + 2 + \dots + \left(\frac{n}{2} - 1\right) + \left(\frac{n}{2}\right) + \left(-\left(\frac{n}{2} - 1\right)\right) + \dots + (-2) + (-1) =_n \frac{n}{2} \neq_n 0$.

Ergänzung

Es gibt jahrhundertealte Formeln, um die Potenzsumme $\sum_{i=1}^{n-1} i^k$ als explizite Funktion von n auszudrücken, so z.B. die Faulhabersche Formel [3] $\sum_{i=1}^{n-1} i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$, wobei $k, n \in \mathbb{N}$ und die B_j die Bernoulli-Zahlen erster Art ($B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \dots = 0$; $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{-1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = \frac{-1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...) sind. Damit kann der Quotient $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^k}{n}$ als $\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k-j}$ geschrieben werden. Diese Schreibweise legt zwar weder die Vermutung noch eine Beweisidee dafür nahe, dass, wie oben gezeigt, $\frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^k}{n}$ für primes $n \geq 3$ und alle $1 \leq k \leq (n-2)$ eine natürliche Zahl ist, für nicht-primes n und gewisse k hingegen nicht. Aber sie zeigt, dass die Bernoulli-Zahlen erster Art, genauer gesagt die spezielle Summe $\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j n^{k-j}$, diese wohl kaum erwartete, bemerkenswerte Eigenschaft besitzen.

Referenzen

- [1] G. Keller: Erstaunliche Teilbarkeitseigenschaft gewisser Produkt- resp. Potenzsummen - Teil 1. VSMP-Bulletin 155 (2024), S. 48
- [2] Die hier präsentierte Begründung, dass $\varphi(p^j) \geq j$ ist, verdanke ich Dr. Jonas Gloor, Gymnasium Oberwil. Sie ist weniger abstrakt, kürzer und einfacher als meine ursprüngliche Begründung.
- [3] https://de.wikipedia.org/wiki/Faulhabersche_Formel (31.01.23)

Beat Jaggi
jaggibe@outlook.com

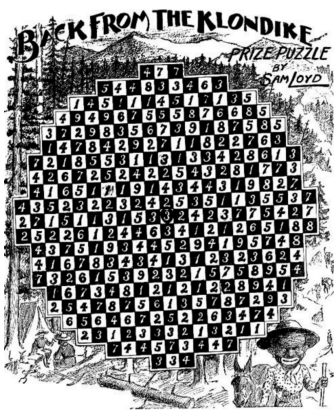
Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen

1 Einleitung

Sam Loyd (1841 - 1911) war und ist einer der bekanntesten und kreativsten Erfinder von Rätseln, mathematischen Problemen und auch von Schachproblemen („Matt in zwei, drei, ... Zügen“).

Berühmt ist zum Beispiel „Back from the Klondike“ (Aufgabe 74 in [1]): Unter Einhaltung bestimmter Regeln gilt es, einen Ausweg aus dem Zahlenschema der Abbildung unten links zu finden.

Bei „Get Off the Earth“ (Abbildung, Mitte und rechts) verschwindet durch eine Drehung der „Erde“ ein Krieger!? Gesucht ist eine Erklärung.



Viele Rätsel von Sam Loyd erschienen in Zeitungen und Zeitschriften oder wurden als Werbegeschenke verkauft.

Nach Loyds Tod gab dessen Sohn eine Reihe von Sammelbänden heraus, darunter 1914 eine *Cyclopedia of Puzzles* mit mehr als 5000 Rätseln.

1959 und 1960 hat Martin Gardner (Wissenschaftsjournalist und 25 Jahre lang Autor der Kolumne „Mathematical Games“ in *Scientific American*) zwei Bücher veröffentlicht, *Mathematical Puzzles* resp. *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd*. Diese Werke sind 1978 auf Deutsch erschienen, mit Neuauflagen 2020 ([1]) und 2015 ([2]), und enthalten 283 ausgewählte Aufgaben.

Typisch ist, dass Sam Loyd viele seine Rätsel in mehr oder weniger glaubwürdige Geschichten verpackt und mit Zeichnungen illustriert hat. Einige dieser Geschichten führen auf sogenannte Diophantische Gleichungen. Ebenso typisch ist auch, dass bei Sam Loyd sehr oft nur Lösungen, aber keine Lösungswege angegeben sind. Dieses Manko soll hier, wenn auch nur mit wenigen Beispielen, behoben werden.

2 Diophantische Gleichungen

Diophantische Gleichungen, benannt nach dem griechischen Mathematiker Diophantes von Alexandria (um 100 - 350 ?), sind algebraische Gleichungen, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht sind. In den allermeisten Fällen hat eine Diophantische Gleichung mindestens zwei Unbekannte.

Das berühmteste Beispiel ist wohl

$$x^n + y^n = z^n \text{ mit } n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Es ist schon lange bekannt, dass es für $n = 2$ unendlich viele Lösungen gibt, die Pythagoräischen Zahlentripel:

$x = r^2 - s^2, y = 2rs, z = r^2 + s^2$ mit natürlichen Zahlen $r > s$. Siehe zum Beispiel [3], Seite 231.

1994 hat Andrew Wiles (1953 -) die sogenannte Fermatsche Vermutung bewiesen: Für $n > 2$ hat die Gleichung (1) keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen.

2.1 Lineare Diophantische Gleichungen mit zwei Unbekannten

Die wohl einfachste Diophantische Gleichung ist

$$ax + by = c \text{ mit vorgegebenen ganzen Zahlen } a, b, c \quad (2)$$

Diese Gleichung hat dann und nur dann Lösungen, wenn $\text{ggT}(a, b) \mid c$.

Eine partikuläre Lösung (x_0, y_0) kann mit dem (erweiterten) Euklidischen Algorithmus gefunden werden, die allgemeine Lösung lautet dann $x = x_0 + kb, y = y_0 - ka$ mit $k \in \mathbb{Z}$, siehe zum Beispiel [3], Seiten 5ff und Seiten 212ff.

Es folgen zwei Rätsel von Sam Loyd, die auf eine Gleichung von Typ (2) führen.

Zwanzig Bonbons (Aufgabe 116 in [2])

Tommy, Willy, Maggy und Ann kauften für zwanzig Cents zwanzig Bonbons. 1 Gummibonbon kostet 4 Cent, 4 Drops kosten 1 Cent und je zwei Schokobonbons 1 Cent. Wieviel haben die Kinder von jedem gekauft?

Lösung: Sei x die Anzahl der gekauften Gummibonbons, y die Anzahl der Drops und z die Anzahl der Schokobonbons.

Dann muss $x + y + z = 20$ und $4x + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 20$ gelten. Multipliziert man die zweite Gleichung mit 4 und subtrahiert dann die erste Gleichung, ergibt sich

$$15x + z = 60$$

Eine partikuläre Lösung kann man leicht erraten, zum Beispiel $x_0 = 4, z_0 = 0$. So lautet die allgemeine Lösung $x = 4 - k, z = 15k$.

Mit diesen Werten wird dann $y = 20 - x - z = 20 - 4 + k - 15k = 16 - 14k$. Weil x, y, z nicht negativ sein dürfen, muss $k = 1$ oder $k = 0$ gewählt werden.

$k = 1$ liefert $x = 3, y = 2, z = 15, k = 0$ ergibt $x = 4, y = 16, z = 0$.

Antwort: Die Kinder haben entweder 3 Gummibonbons, 2 Drops und 15 Schokobonbons gekauft oder 4 Gummibonbons und 16 Drops. (Diese zweite Lösung fehlt in [2].)

Für 1 Dollar Briefmarken (Aufgabe 62 in [1])

Eine Dame gab dem Postbeamten am Schalter eine Dollarnote für Briefmarken und sagte: „Geben Sie mir ein paar Marken zu 2 Cents, zehnmal so viele zu 1 Cent und für den Rest 5-Cent-Briefmarken.“ Was tut der Beamte, um ihr diesen etwas verwirrenden Wunsch zu erfüllen?

Lösung: Sei x die Anzahl der 2-Cent-Marken und y die Anzahl der 5-Cent-Briefmarken.

Dann gilt:

$$x \cdot 2 + 10 \cdot x \cdot 1 + y \cdot 5 = 100 \text{ oder } 12x + 5y = 100$$

Weil 5 ein Teiler ist von 100, kann eine partikuläre Lösung auch hier leicht erraten werden:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 20.$$

Die allgemeine Lösung ist dann: $x = 0 + 5k$, $y = 20 - 12k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $x > 0$, $y > 0$ muss $k = 1$ und damit $x = 5$ und $y = 8$ sein.

Antwort: Der Beamte gab der Frau 5 Marken à 2 Cent, 50 Marken à 1 Cent und 8 Marken à 5 Cent.

Wenn wir die eine partikuläre Lösung nicht erraten könnten, wenden wir den (erweiterten) Euklidischen Algorithmus auf die Zahlen 12 und 5 an:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \cdot 5 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \end{aligned}$$

Daraus erhält man $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2 \cdot (12 - 2 \cdot 5) = 12 \cdot (-2) + 5 \cdot 5$ oder $100 = 12 \cdot (-200) + 5 \cdot 500$. Eine Lösung lautet also $x_0 = -200$, $y_0 = 500$ und die allgemeine Lösung demnach $x = -200 + 5k$, $y = 500 - 12k$. Wegen $x > 0$, $y > 0$ muss hier $k = 41$ gewählt werden, was ebenfalls zu $x = 5$, $y = 8$ führt.

2.2 Lineare Diophantische Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten

Eine naheliegende Verallgemeinerung der Gleichung (2) ist die Erweiterung auf n Unbekannte:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c \tag{3}$$

Auch hier muss, damit Lösungen existieren, $\text{ggT}(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid c$ gelten, siehe [3].

Wir können deshalb gerade $\text{ggT}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ annehmen.

Weiter können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ annehmen, andernfalls ersetzen wir bei den Indices j mit $a_j < 0$ einfach x_j durch $-x_j$.

Leider lässt sich das Verfahren von oben mit dem (erweiterten) Euklidischen Algorithmus nicht direkt auf Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten übertragen.

Deshalb wird im Folgenden ein etwas anderes Verfahren vorgeschlagen, siehe [3]:

Sei a_k der kleinste (positive) Koeffizient in (3). Ist $a_k = 1$, dann wählen wir für jede der Unbekannten ausser x_k eine ganze Zahl und setzen $x_k = c - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_{k-1}x_{k-1} - a_{k+1}x_{k+1} - a_{k+2}x_{k+2} - \dots - a_nx_n$.

(Das ist zum Beispiel bei der Gleichung $15x + z = 60$ von „Zwanzig Bonbons“ der Fall. Wir wählen also $x = k$ und setzen $z = 60 - 15k$. Auch so bekommen wir alle Lösungen der Gleichung.)

Andernfalls dividieren wir alle anderen Koeffizienten mit Rest durch a_k und ersetzen dann jeweils a_l durch $q_l a_k + r_l$. So können wir a_k ausklammern und die Summe in der zugehörigen Klammer durch eine neue Variable ersetzen.

Durch Wiederholen dieses Prozesses werden die Koeffizienten immer kleiner, (mindestens) einer davon wird schliesslich gleich 1 und wir können die Gleichung nach der zugehörigen Unbekannten auflösen.

Damit können wir dann alle Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n durch $n-1$ ganzzahlige Variablen ausdrücken.

Wir illustrieren das Vorgehen zuerst an der Aufgabe „Für 1 Dollar Briefmarken“, siehe oben.

Die auftretende Gleichung lautet $12x + 5y = 100$. Der ggT von 12 und 5 ist 1.

$$\begin{aligned}
 12x + 5y &= 100 \\
 (2 \cdot 5 + 2)x + 5y &= 100 && \text{(Division mit Rest von 12 mit 5)} \\
 5(2x + y) + 2x &= 100 && \text{Wir setzen } 2x + y = y', \quad x = x' \\
 5y' + 2x' &= 100 \\
 (2 \cdot 2 + 1)y' + 2x' &= 100 && \text{(Division mit Rest von 5 mit 2)} \\
 2(2y' + x') + y' &= 100 && \text{Wir setzen } 2y' + x' = x'', \quad y' = y'' \\
 2x'' + y'' &= 100 \implies y'' = 100 - 2x''
 \end{aligned}$$

Aus $y'' = 100 - 2x''$ lassen sich jetzt zuerst x', y' und schliesslich x, y durch x'' ausdrücken.

$$x' = x'' - 2y' = x'' - 2y'' = x'' - 2(100 - 2x'') = 5x'' - 200 \implies x = x' = 5x'' - 200$$

$$y' = y'' = 100 - 2x'' \implies y = y' - 2x = 100 - 2x'' - 10x'' + 400 = 500 - 12x''$$

Es sind, bis auf die Bezeichnungen, die gleichen Lösungen wie oben.

Hier eine weitere Aufgabe von Sam Loyd: (Der ursprüngliche Text wurde gekürzt.)

Chinesisch in bar (Aufgabe 111 in [1])



Die Chinesen haben schon viele tausend Jahre vor der christlichen Zeitrechnung Münzen geprägt und als Geld verwendet.

Als Bargeld verwendeten sie Messingmünzen mit einem runden, quadratischen oder dreieckigen Loch in der Mitte.

Angenommen, elf Münzen mit runden Löchern seien 15 Bits, elf mit quadratischen Löchern 16 Bits und elf mit dreieckigen Löchern 17 Bits wert, dann sagen Sie mir bitte, wieviele Münzen mit runden, quadratischen oder dreieckigen Löchern nötig wären, um diesen fetten, kleinen Hund im Wert von 11 Bits zu kaufen.

Lösung: Ist

x die Zahl der Münzen mit rundem Loch,

y die Zahl der Münzen mit quadratischem Loch und

z die Zahl der Münzen mit dreieckigem Loch, dann wird

$$\frac{15}{11}x + \frac{16}{11}y + \frac{17}{11}z = 11 \quad \text{oder} \quad 15x + 16y + 17z = 121.$$

$$\begin{aligned}
 15x + 16y + 17z &= 121 && (15 \text{ ist der kleinste Koeffizient.}) \\
 15x + (1 \cdot 15 + 1)y + (1 \cdot 15 + 2)z &= 121 && (\text{Division mit Rest von } 16 \text{ und } 17 \text{ mit } 15) \\
 15(x + y + z) + y + 2z &= 121 && \text{Wir setzen } x + y + z = x', \quad y = y', \quad z = z' \\
 15x' + y' + 2z' &= 121 \implies y' = 121 - 15x' - 2z'
 \end{aligned}$$

Aus $y' = 121 - 15x' - 2z'$ lassen sich jetzt x, y, z durch x' und z' ausdrücken.

$$\begin{aligned}
 y &= y' = 121 - 15x' - 2z' \\
 z &= z' \\
 x &= x' - y - z = x' - 121 + 15x' + 2z' - z' = 16x' + z' - 121
 \end{aligned}$$

mit $x', z' \in \mathbf{Z}$ beliebig.

Wir suchen nichtnegative Lösungen:

Aus $y = 121 - 15x' - 2z' \geq 0$ folgt wegen $z' \geq 0$ sicher $x' \leq \frac{121}{15} = 8.0\bar{6}$.

Aus $y = 121 - 15x' - 2z' \geq 0$ folgt $2z' \leq 121 - 15x'$ und

aus $x = 16x' + z' - 121 \geq 0$ folgt $2z' \geq 242 - 32x'$.

Also wird $242 - 32x' \leq 121 - 15x'$ oder $17x' \geq 121$ und damit $x' \geq \frac{121}{17} \approx 7.1$.

Somit muss $x' = 8$ und wegen $y = 121 - 15x' - 2z' \geq 0$ schliesslich $z' = 0$ gelten.

Damit erhalten wir dann $x = 16 \cdot 8 + 0 - 121 = 7$, $y = 121 - 15 \cdot 8 - 0 = 1$ und $z = z' = 0$.

Antwort: Mit 7 Münzen mit rundem Loch und einer Münze mit quadratischem Loch kann der Hund im Wert von genau 11 Bits gekauft werden.

Ein ehrliches Strandvergnügen (Aufgabe 56 in [1])



Neulich sah ich mir zusammen mit einem Freund die Attraktionen auf Coney Island an, und dabei lernten wir kennen, was uns jemand als das ehrlichste Spiel am ganzen Strand anpries. Da waren zehn kleine Figuren, die man mit einem Ball umwerfen musste. Der Mann sagte: „Für einem Cent haben Sie einen Wurf, und Sie können werfen, so oft Sie wollen, und so dicht herangehen, wie Sie wollen. Zählen Sie die Zahlen auf den Figuren, die Sie umwerfen zusammen, und wenn Sie genau 50 haben, nicht mehr und nicht weniger, erhalten Sie eine prächtige 25-Maggie-Cline-Zigarre mit einem Goldband drum herum.“ Unser Geld war alle, noch bevor wir heraus hatten, wie man eigentlich gewinnen konnte, ausserdem fiel uns auf, dass eine ganze Menge Leute genauso wenig Maggie-Cline-Zigarren rauchten wie wir. Wissen Sie, wie man genau 50 Punkte macht?

Lösung: Die Zahlen auf den Figuren (von links oben nach rechts unten) liefern die Gleichung

$$25q + 27r + 3s + 12t + 6u + 15v + 9w + 30x + 21y + 19z = 50$$

Der kleinste Koeffizient ist 3. Wir setzen

$$25 = 8 \cdot 3 + 1, \quad 27 = 9 \cdot 3, \quad 12 = 4 \cdot 3, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 15 = 5 \cdot 3, \quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 30 = 10 \cdot 3, \quad 21 = 7 \cdot 3, \quad 19 = 6 \cdot 3 + 1.$$

Die Gleichung wird

$$3(8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z) + q + z = 50.$$

Mit $8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z = s'$,
 $q = q'$, $r = r'$, $t = t'$, $u = u'$, $v = v'$, $w = w'$, $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$
 erhalten wir

$$3s' + q' + z' = 50 \text{ oder } z' = 50 - 3s' - q'.$$

$$\begin{aligned} s &= s' - 8q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 6z' \\ &= s' - 8q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 6(50 - 3s' - q') \\ &= 19s' - 2q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 300. \end{aligned}$$

Jede Wahl von neun ganzen Zahlen für $s', q', r', t', u', v', w', x', y'$ liefert eine Lösung
 $q = q'$, $r = r'$, $s = 19s' - 2q' - 9r' - 4t' - 2u' - 5v' - 3w' - 10x' - 7y' - 300$,
 $t = t'$, $u = u'$, $v = v'$, $w = w'$, $x = x'$, $y = y'$, $z = z' = 50 - 3s' - q'$
 der Gleichung.

Leider ist die Frage nach nichtnegativen Lösungen schwierig. Es braucht eine andere Idee:

Betrachten wir noch einmal die Gleichung

$$3(8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z) + q + z = 50.$$

Wegen $50 = 3 \cdot 16 + 2$ können wir diese Gleichung in der Form

$$3(8q + 9r + s + 4t + 2u + 5v + 3w + 10x + 7y + 6z - 16) = 2 - q - z$$

schreiben.

Die zehn Unbekannten können nur die Werte 0 oder 1 annehmen und $2 - q - z$ muss ein Vielfaches von 3 sein. Das ist nur mit $2 - q - z = 0$ oder also $q = z = 1$ möglich.

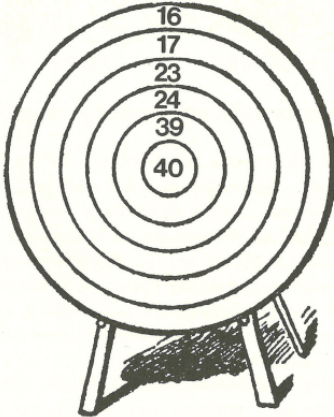
Zu q und z gehören die Figuren mit den Zahlen 25 und 19.

$25 + 19 = 44$: Es fehlt noch die Figur mit der Zahl 6.

Antwort: Man muss die Figuren mit den Zahlen 6, 19 und 25 umwerfen, um 50 Punkte zu machen.

Zum Abschluss noch einmal zwei Rätsel zum Selberlösen.

Bogenschiessen (Aufgabe 92 in [2])



Wieviele Pfeile braucht man, um auf der Zielscheibe genau 100 Punkte zu erzielen?

Die zugehörige Diophantische Gleichung lautet: $16u + 17v + 23w + 24x + 39y + 40z = 100$.

Pistolenschiessen (Aufgabe 86 in [1])

Als alter Schützenveteran, der an vielen Wettkämpfen teilgenommen hat, war ich natürlich brennend an dem Pistolenschiessen interessiert, das kürzlich über Kabel ausgetragen wurde und bei dem die Amerikaner ihre Überlegenheit über die Franzosen unter Beweis stellten.

Im Verlauf des Wettkampfes tauchten einige Fragen auf, die unsere Rätselfreunde ganz bestimmt interessieren werden. Hier habe ich zum Beispiel eine, die ich sehr nett fand, und ich bin fest davon überzeugt, dass Sie für die Mühe, die Sie auf sich nehmen, um sie zu beantworten, voll entschädigt werden. Einer der Schützen kam mit sechs Schuss auf 96 Punkte, aber man musste schon sehr genau hinsehen, um zu erkennen, dass er drei „Dubletten“ geschossen hatte, wie das Kunststück, mit zwei Kugeln das gleiche Loch zu treffen, genannt wird. Wissen Sie, wie man mit drei Dubletten eine Gesamtpunktzahl von 96 erzielt?

Die zugehörige Diophantische Gleichung lautet: $1s + 2t + 3u + 5v + 10w + 20x + 25y + 50z = 48$.
Zudem muss $s + t + u + v + w + x + y + z = 3$ gelten.

Literatur

- [1] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2020
- [2] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Vom Küken zum Ei, Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2015
- [3] Niven, Ivan; Zuckerman Herbert S.; Montgomery Hugh L.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc. 1991

Für [3] siehe auch

<https://editorialdinosaurio.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/03/itn-niven.pdf>

Andreas Nüesch
A.nueesch@intergga.ch

Rezension: Der Goldene Schnitt

Hans Walser

Der Goldene Schnitt

Geometrische und zahlentheoretische Betrachtungen

7., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer Spektrum, 2023

ISBN 978-3-662-68556-3 bzw. ISBN 978-3-662-68557-0 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-68557-0>

30 Jahre nach der 1. Auflage erscheint nun bereits die 7. Auflage dieses Buches, neu im Verlag Springer Spektrum. Schon im Inhaltsverzeichnis fällt auf, dass sich der Inhalt verändert haben muss. So sind die Kapitel neu *Worum geht es? – Goldene Geometrie – Goldene Winkel – Falten und Schneiden – Zahlenfolgen – Reguläre und verwandte Körper – Beispiele*. Die Kapitel *Fraktale* und *Der Goldene Schnitt in Architektur, Kunst und Natur* fehlen in der 7. Auflage.

Neu im vorliegenden Buch, das nun auch als e-Book erscheint, sind Animationen. Diese werden beim e-Book direkt durch Anklicken aktiviert, in der Printversion kann mithilfe der App *More Media* des Springerverlags ein Code zur Aktivierung eingescannt werden.

Solche Animationen können den Leser zum Erforschen anregen, z. B. bei der Grafik zur stetigen Teilung (Abb. 18). Vor allem aber dienen sie der Erklärung von Abläufen wie dem Falten von Papierstreifen in Kapitel 4 oder dem Aufbau und Unterteilen von Körpern in Kapitel 5. Die Geschwindigkeit der Animation kann gesteuert werden. Dies ist insbesondere bei komplizierteren Prozessen wie dem Aufwickeln und Umformen des Ikosaeders (Abb. 6.21 und 6.22) hilfreich. Die Verbindung von Text und Bild wird mit diesen Animationen prägnanter.

Das didaktische Konzept wurde aber nicht nur durch diese Animationen sondern auch anderweitig verändert. Fragestellungen, welche in der 6. Auflage des Buches am Anfang eines Kapitels gestellt und an dessen Ende dann bearbeitet wurden, gibt es nicht mehr. Die Behandlung eines Sachverhalts wird damit flüssiger und kompakter.

Einige Schwerpunkte haben sich verlagert, so wird dem Thema *Goldene Winkel* neu ein eigenes Kapitel gewidmet und *Fraktale* werden kaum mehr thematisiert. Dass der Bezug zu *Architektur, Kunst und Natur* nun fast vollständig fehlt, finde ich schade. Das Buch richtet sich ja gemäss Autor auch an Schülerinnen und Schüler. Gerade ihnen sollte m. E. dieser Bezug mindestens ansatzweise gezeigt werden. Doch dies ist nicht die Absicht des Autors, der die geometrischen und zahlentheoretischen Aspekte des Goldenen Schnitts als zentrale Inhalte vorsieht.

Die Vielfalt der mathematischen Themenbereiche rund um den Goldenen Schnitt, welche in diesem Buch zu finden sind, machen es einzigartig. Es ist modular aufgebaut, die Kapitel lassen sich unabhängig voneinander lesen. Je nach Interesse kann man sich so in einzelne Themen vertiefen und findet dort auch Anregungen zum Weiterentwickeln. Hilfreich für ergänzende Betrachtungen ist dabei auch die ausführliche Literaturliste.

Hans Walser ist mit dieser Neuauflage seinem Ruf für didaktisch hervorragende Schriften treu geblieben. Gerne empfehle ich sie allen, die sich für Mathematik rund um den Goldenen Schnitt interessieren.



Hans Ulrich Keller
 Ehem. MNG Zürich, hukkeller@bluewin.ch

Eine Formel für $S(n,k)$

1. Die Aufgabe

Die Summen $S(n,k) := \sum_{m=1}^n m^k$ für die ersten drei Werte von $k \in \mathbb{N}_0$ sind allgemein bekannt:

$$S(n,0) = \sum_{m=1}^n m^0 = n; \quad S(n,1) = \sum_{m=1}^n m^1 = \frac{n(n+1)}{2}; \quad S(n,2) = \sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Mit einem Computer-Algebra-System (CAS) kann der zugehörige Term $S(n,k)$ für grössere Werte von k ohne Mühe sofort berechnet werden. So kann beispielsweise der Term $S(n,200)$ mit der simplen *Mathematica*-Anweisung `Sum[m^200, {m,1,n}]` für den Exponenten $k = 200$ auf einem einfachen PC in nur gerade 0.141 Sekunden gefunden werden! Gesucht ist hier aber eine **allgemeine**

Formel für $S(n,k) = \sum_{m=1}^n m^k$ bei einem beliebigen Wert des Exponenten $k \in \mathbb{N}_0$.

Explizite Formeln für die Exponenten k von 1 bis 17 wurden von Johannes Faulhaber (* 5. Mai 1580 in Ulm; † 10. September 1635 ebenda, deutscher Mathematiker) berechnet, die darum 'Faulhabersche Formeln' genannt werden; diese könnten z. B. mit der Euler-Maclaurin-Summenformel elegant bewiesen werden. Die gesuchte allgemeine Formel wird, zu Ehren von Jakob Bernoulli, als 'Bernoullische Formel' bezeichnet.

2. Korrekte Vermutungen

Hier folgt eine Liste von k und $S(n,k)$ in ausmultiplizierter Form für $0 \leq k \leq 10$:

$$\begin{array}{l}
 0 \qquad \qquad \qquad n \\
 1 \qquad \qquad \qquad \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \\
 2 \qquad \qquad \qquad \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \\
 3 \qquad \qquad \qquad \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4} \\
 4 \qquad \qquad \qquad -\frac{n}{30} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^5}{5} \\
 5 \qquad \qquad \qquad -\frac{n^2}{12} + \frac{5n^4}{12} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{6} \\
 6 \qquad \qquad \qquad \frac{n}{42} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^7}{7} \\
 7 \qquad \qquad \qquad \frac{n^2}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{7n^6}{12} + \frac{n^7}{2} + \frac{n^8}{8} \\
 8 \qquad \qquad \qquad -\frac{n}{30} + \frac{2n^3}{9} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^7}{3} + \frac{n^8}{2} + \frac{n^9}{9} \\
 9 \qquad \qquad \qquad -\frac{3n^2}{20} + \frac{n^4}{2} - \frac{7n^6}{10} + \frac{3n^8}{4} + \frac{n^9}{2} + \frac{n^{10}}{10} \\
 10 \qquad \qquad \qquad \frac{5n}{66} - \frac{n^3}{2} + n^5 - n^7 + \frac{5n^9}{6} + \frac{n^{10}}{2} + \frac{n^{11}}{11}
 \end{array}$$

Daraus lassen sich ein paar Eigenschaften von $S(n,k)$ vermuten:

- $S(n,k)$ ist ein Polynom in n vom Grad $k+1$.
- Es kommt kein konstanter Term vor.
- Der Koeffizient von n^{k+1} ist $\frac{1}{k+1}$.
- Der Koeffizient von n^k für $k \geq 1$ ist $\frac{1}{2}$.
- Die Summe der Koeffizienten ist gleich 1.
- Die alternierende Summe der Koeffizienten ist gleich 0.
- Für ungerade $k \geq 3$ ist der Koeffizient von n gleich 0.
- Für gerade $k > 2$ ist der Koeffizient von n^2 gleich 0.

Fig. 1: k und $S(n,k)$ für $0 \leq k \leq 10$.

Die Richtigkeit von jeder dieser Formeln für $S(n, k)$ in Figur 1 lässt sich bei Bedarf mit vollständiger Induktion beweisen, wenn sie denn erst einmal überhaupt bekannt sein sollten!



Jakob Bernoulli (* 27. Dezember 1654^{jul.} / 6. Januar 1655^{greg.} in Basel; † 16. August 1705 ebenda; Schweizer Mathematiker und Physiker) fand eine allgemeine Formel für $S(n, k)$ für $k \geq 1$ (s. Gl. 1), die allerdings erst im Jahr 1713, nach seinem Tode, veröffentlicht und von Euler (!) bewiesen wurde.

Fig. 2: Portrait von Jakob Bernoulli.

$$S(n, k) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=2}^k \binom{k+1}{j} \cdot B_j \cdot n^{k+1-j} \quad \text{(Gl. 1)}$$

Dabei ist B_j die j -te Bernoulli-Zahl. Für die Bernoulli-Zahlen gibt es gemäss Louis Saalschütz 38 explizite Definitionen! Eine dieser Definitionen ist die Doppelsumme

$$B_j = \sum_{k=0}^j \sum_{v=0}^k (-1)^v \binom{k}{v} \frac{v^j}{k+1} \quad \text{für } j \geq 1, \text{ mit } B_0 = 1 \quad \text{(Gl. 2)}$$

Die Bernoulli-Zahlen lassen sich aber auch mit Hilfe einer erzeugenden Funktion definieren. Es gilt äquivalent zur Definition in Gl. 2:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} \cdot x^j \quad \text{(Gl. 3)}$$

Diese Definition wird in Abschnitt 4 verwendet werden.

Die ersten paar Bernoulli-Zahlen sind in der folgenden Tabelle wiedergegeben:

$$\left(\begin{array}{c} j: \\ B_j: \end{array} \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 & \frac{5}{66} \end{array} \right) \quad \text{(Fig. 3)}$$

Weil $B_1 = -\frac{1}{2}$ ist und B_j für ungerade $j > 1$ verschwindet, lässt sich Gl. 1 auch in einer dazu äquivalenten, einfachen Summe von $j = 0$ bis k schreiben (s. die folgende Gl. 4). Der Term $(-1)^j$ beeinflusst dabei einzig den Summanden mit $j = 1$:

$$S(n, k) = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k+1}{j} \cdot B_j \cdot n^{k+1-j} \quad \text{(Gl. 4)}$$

3. Eine weitere Vermutung

Mit Hilfe der Tabelle in Fig. 1 lässt sich zeigen, dass für alle angegebenen Werte von $S(n, k)$ gilt:

$$\left(\frac{d}{dn} S(n, k+1) \right) - (k+1) \cdot S(n, k) = c \quad \text{(Gl. 5)}$$

mit jeweils einer Konstanten c . Darum kann vermutet werden, dass auch allgemein gilt:

$$S(n, k + 1) = c \cdot n + (k + 1) \cdot \int S(n, k) \, dn \quad (\text{Gl. 6}).$$

Sollte Gl. 5 allgemein gelten, so gilt Gl. 6 ebenfalls allgemein, sofern die Integrationskonstante richtig gewählt wird. Kommt in $S(n, k)$ wie vermutet nie ein konstanter Term vor, so muss beim Integral jeweils die Integrationskonstante gleich Null gewählt werden. Weiter ist in allen angegebenen Beispielen die Summe aller Koeffizienten in jeder der Formeln $S(n, k)$ für jedes k gleich 1. Wenn dies auch allgemein der Fall sein sollte, erlaubt dies, zusammen mit Gl. 6, aus $S(n, k)$ den Term $S(n, k + 1)$ rekursiv zu bestimmen.

Als Beispiel sei dies für $k = 5$ vorgerechnet (mit Integrationskonstante = 0):

$$S(n, 6) = c \cdot n + 6 \cdot \int S(n, 5) \, dn = c \cdot n + 6 \cdot \int \left(-\frac{n^2}{12} + \frac{5n^4}{12} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{6} \right) \, dn = c \cdot n - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^7}{7}.$$

Die Konstante c ergibt sich daraus, dass die Summe der Koeffizienten gleich 1 sein muss:

$$c - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = 1 \quad (\text{Gl. 7}).$$

Damit wird hier $c = \frac{1}{42}$, was die korrekte Formel für $S(n, 6)$ (vgl. Tabelle 1) ergibt. Die Konstante

c ist dabei gerade gleich der Bernoulli - Zahl $B_{k+1} = B_6$. Sollte auch dieser Zusammenhang allgemeingültig sein, dann wird aus Gl. 6 die Gleichung 8:

$$S(n, k + 1) = B_{k+1} \cdot n + (k + 1) \cdot \int S(n, k) \, dn \quad (\text{Gl. 8}).$$

Bei der Integration wird auch hier, wie bereits erwähnt, die Integrationskonstante jeweils weggelassen.

Das Integral $\int S(n, k) \, dn$ 'ohne die Integrationskonstante' kann auch als $\int_0^n S(u, k) \, du$ geschrieben

werden, Mit $S(n, 1) = \frac{n(n+1)}{2}$ und zusammen mit Gleichung 8 kann nun $S(n, k)$ rekursiv für belie-

bige weitere Exponenten $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$ gefunden werden. Mit dem Term $S(1, k)$, der die Summe der Koeffizienten in $S(n, k)$ angibt, kann verifiziert werden, dass diese Summe für alle so gefundenen Terme $S(n, k)$ tatsächlich gleich 1 ist.

4. Eine Herleitung über Ableitungen

Eine Formel für $S(n, k)$ kann über Ableitungen wie folgt gefunden werden:

Wir definieren eine Funktion

$$f_n(x) := 1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{n \cdot x} \quad (\text{Gl. 9}).$$

Ihre erste Ableitung ist $f_n'(x) = 1e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \dots + ne^{n \cdot x}$, mit $f_n'(0) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, also gilt

gerade:

$$f_n'(0) = \sum_{m=1}^n m^1 = S(n, 1) \quad (\text{Gl. 9.1}).$$

Ihre zweite Ableitung ist $f_n''(x) = 1^1 e^x + 2^2 e^{2x} + 3^2 e^{3x} + \dots + n^2 e^{n \cdot x}$, mit

$$f_n''(0) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2, \text{ also gilt gerade: } f_n''(0) = \sum_{m=1}^n m^2 = S(n,2) \quad (\text{Gl. 9.2})$$

Verallgemeinert ist die k -te Ableitung $f_n^{(k)}(0) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, also gilt gerade:

$$f_n^{(k)}(0) = \sum_{m=1}^n m^k = S(n,k) \quad (\text{Gl. 10}).$$

Für $x \neq 0$ ist $f_n(x) = 1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{n \cdot x}$ (s. Gl. 9) eine geometrische Reihe mit

$$f_n(x) = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1} \quad (\text{Gl. 11}).$$

In der Form gem. Gl. 11 haben die Funktion $f_n(x)$ sowie alle ihre Ableitungsfunktionen $f_n^{(k)}(x)$ für $x = 0$ eine Unstetigkeitsstelle. Diese ist aber überall hebbar mit dem jeweiligen Übergang zum Grenzwert $x \rightarrow 0$. Daraus folgt:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f_n^{(k)}(x) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = S(n,k)} \quad (\text{Gl. 12}).$$

Mit einem CAS wie z. B. *Mathematica* kann $S(n,k)$ auch auf diese Weise für beliebige Werte des Exponenten $k \geq 1$ sehr einfach berechnet werden.

```

In[1]:= fn[x_] := Sum[E^(k * x), {k, 0, n}]
In[2]:= Expand[Limit[D[fn[x], {x, 3}], x -> 0]]
Out[2]= n^2/4 + n^3/2 + n^4/4
In[3]:= Expand[Limit[D[fn[x], {x, 10}], x -> 0]]
Out[3]= 5n/66 - n^3/2 + n^5 - n^7 + 5n^9/6 + n^10/2 + n^11/11
    
```

Fig. 4: Beispiele für die Berechnung gem. Gl. 12.

Ohne CAS ist aber bei dieser Methode sowohl das Berechnen der k -ten Ableitungsfunktion $f_n^{(k)}(x)$ als auch die Bestimmung des Grenzwertes $\lim_{x \rightarrow 0} f_n^{(k)}(x)$ eine mühsame Angelegenheit. Und mit Gl. 12 ist natürlich auch noch keine 'allgemeine Formel' gefunden worden.

5. Zusammenhang mit den Bernoulli - Zahlen.

Für die Taylor-Entwicklung des Terms $f_n(x) = 1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{n \cdot x}$ (s. Gl. 9) um $x = 0$ werden die oben hergeleiteten Ableitungen $f_n^{(k)}(0)$ benötigt, die gleich $S(n,k)$ sind (s. Gl. 10). Darum gilt:

$$f_n(x) = S(n,0) + \frac{S(n,1)}{1!} x + \frac{S(n,2)}{2!} x^2 + \dots + \frac{S(n,p)}{p!} x^p + \dots \quad (\text{Gl. 13}).$$

Andererseits ist aber $f_n(x) = \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \cdot \left(\frac{e^{N \cdot x} - 1}{x} \right)$, mit $N = n + 1$ (Gl. 14).

Die Funktion $\frac{x}{e^x - 1}$ ist gemäss Definition die erzeugende Funktion der Bernoulli - Zahlen (s. Gl. 3):

$$\frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + B_k \frac{x^k}{k!} + \dots \quad \text{(Gl. 15)}$$

Die Taylor-Entwicklung des zweiten Klammerterms in Gl. 14 um $x = 0$ ergibt

$$\frac{e^{N \cdot x} - 1}{x} = N + \frac{N^2}{2!} x + \frac{N^3}{3!} x^2 + \dots + \frac{N^{k+1}}{(k+1)!} x^k + \dots \quad \text{(Gl. 16)}$$

Jetzt kann $f_n(x)$ als Produkt dieser beiden oben beschriebenen Reihen (s. Gl. 15 und 16) geschrieben werden:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= B_0 N + \left(B_0 \frac{N^2}{2!} + \frac{B_1}{1!} N \right) x + \left(B_0 \frac{N^3}{3!} + \frac{B_1}{1!} \frac{N^2}{2!} + \frac{B_2}{2!} N \right) x^2 + \dots \\ &\dots + \left(B_0 \frac{N^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{B_1}{1!} \frac{N^p}{p!} + \frac{B_2}{2!} \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} + \dots + \frac{B_p}{p!} N \right) x^p + \dots \quad \text{(Gl. 17)} \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich für x^p in Gl. 13 und Gl. 17 ergibt

$$\frac{S(n, p)}{p!} = \left(B_0 \frac{N^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{B_1}{1!} \frac{N^p}{p!} + \frac{B_2}{2!} \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} + \dots + \frac{B_p}{p!} N \right) \quad \text{(Gl. 18)}$$

Nach der Multiplikation beider Seiten mit $p!$, der Resubstitution $N \rightarrow n+1$, der Substitution $p \rightarrow k$, dem Erkennen der etwas versteckten Binomialkoeffizienten und mit den entsprechenden Vereinfachungen führt dies auf die folgende Formel für $k \geq 1$:

$$S(n, k) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k = f_n^{(k)}(0) = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} \cdot B_j \cdot (n+1)^{k+1-j} \quad \text{(Gl. 19)}$$

Das ist eine mögliche Form der gesuchten allgemeinen Formel, die äquivalent ist zu der von Jakob Bernoulli gefundenen Formel (s. Gl. 1 resp. Gl. 4). Die Äquivalenz kann wie folgt gezeigt werden:

Für $N = n+1$ gilt:

$$S(N, k) = S(n, k) + N^k = \underbrace{\left(\frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} \cdot B_j \cdot N^{k+1-j} \right)}_{\text{gem. Gl. 19}} + N^k \quad \text{(Gl. 20)}$$

Mit der gleichen Begründung wie bei der Herleitung von Gl. 4 aus Gl. 1 ist dieser Term gleich

$$S(N, k) = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k+1}{j} \cdot B_j \cdot N^{k+1-j} \quad \text{(Gl. 21)}$$

Die Gleichung 21 gilt für beliebige $N > 0$ (und als Bonus sogar für $N = 0$), und sie ist für $k \geq 1$ nach der Substitution $N \rightarrow n$ identisch mit der Gleichung 4, die ihrerseits – wie bereits gezeigt – äquivalent ist zur ursprünglichen Gleichung 1 nach Jakob Bernoulli: QED.

Weil $S(n, k) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ eine arithmetische Folge $(k+1)$ -ter Ordnung ist, gilt auch:

$S(n, k) = a_{k+1} n^{k+1} + a_k n^k + \dots + a_1 n + a_0$. Für $n = 1$ ist darum $S(1, k) = 1^k = 1$ auch gleich der Sum-

me der Koeffizienten: $\sum_{j=0}^{k+1} a_j = 1$. Dies war oben bereits vermutet worden. Die Formel gemäss Gl. 21

ergibt für $n = 1$ wie erwartet bei jedem $k \geq 0$ ebenfalls tatsächlich den Wert $\underbrace{S(1, k)}_{\text{gem. Gl. 21}} = 1$.

6. Nachtrag: Eine einfachere Rekursionsformel

Sind die Formeln für $S(n, k) = \sum_{m=1}^n m^k$ für $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, k_o\}$ bekannt, dann lässt sich $S(n, k_o + 1)$

mit der 'Teleskopmethode' recht einfach rekursiv herleiten. Dies soll am Beispiel $k_o = 2$ gezeigt wer-

den. Als bekannt gilt hier also $\sum_{m=1}^n m^0 = n$, $\sum_{m=1}^n m^1 = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{m=1}^n m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, und gesucht

ist $S(n, 3)$.

Dazu wird allgemein ein Term $T_{k_o+2} := \sum_{m=1}^n [(m+1)^{k_o+2} - m^{k_o+2}]$ (Gl. 22) definiert. Im Beispiel wird

dies $T_4 = \sum_{m=1}^n [(m+1)^4 - m^4]$, was gleich $T_4 = \sum_{m=1}^n [m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1 - m^4]$ (Gl. 23) ist.

Die m^4 verschwinden, und es folgt: $T_4 = 4 \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^n m^3}_{S(n,3)} + 6 \cdot \underbrace{\sum_{m=1}^n m^2}_{S(n,2)} + 4 \cdot \sum_{m=1}^n m^1 + 1 \cdot \sum_{m=1}^n m^0$ (Gl. 24).

Andererseits gilt auch: $T_4 = 2^4 - 1^4 + 3^4 - 2^4 + \dots - \dots + n^4 - (n-1)^4 + (n+1)^4 - n^4$ (Gl. 25); dieser

Term vereinfacht sich 'teleskopartig' zu $T_4 = (n+1)^4 - 1$ (Gl. 26).

Damit wird aus Gl. 21: $\underbrace{(n+1)^4 - 1}_{T_4} = 4 \cdot S(n, 3) + 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 \cdot n$ (Gl. 27).

Aus dieser Gleichung 27 ergibt sich sofort das richtige Resultat $S(n, 3) = \frac{n^2}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^4}{4}$ (Gl. 28), was

äquivalent ist zu der besser bekannten Form der Formel $S(n, 3) = \sum_{m=1}^n m^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (Gl. 29).

Die Berechnung in obigem Beispiel kann nun entsprechend mit $k_o \in \{3, 4, 5, \dots\}$ wiederholt werden.

Damit ist ein weiterer rekursiver Algorithmus gefunden worden, mit dem $S(n, k)$ für grössere Exponenten k gefunden werden kann.

6. Literatur

- Michael Penn, www.youtube.com/watch?v=5gSpXslx39U.
- Norman Schaumberger, Pi-Mu-Epsilon Journal, 1976, Vol. 6, No. 5, pp. 281 ff.
- Existsforall Academy, www.youtube.com/watch?v=z25imPmrXR0.
- Alexander Farrugia: www.youtube.com/watch?v=QTHT5YPO6qM
- Terence P. Hui: www.youtube.com/watch?v=Ki-9LsE8VI

- Saalschütz, Louis (1893), [Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen](#). Berlin: Julius Springer.
- Greg Orosi: A Simple Derivation Of Faulhaber's Formula; Applied Mathematics E-Notes, 18(2018), 124 - 126.
- Portrait von J. Bernoulli: Dank an Mediathek WDR[®] zum Stichtag 16. August 1705.

Weitere interessante Links:

- Mathologer Burkard Polster: www.youtube.com/watch?v=fw1kRz83Fj0.
- James Tanton: www.youtube.com/watch?v=-rGJc8aLWZU
- Terence P. Hui: www.youtube.com/watch?v=ZvVGbMkFwxM

Wilfried Lingenberg
Lemberg (Rheinland-Pfalz), w.lingenberg@mx.uni-saarland.de

Nichtstandardanalysis – Ein sehr alter, sehr neuer Zugang zur Differential- und Integralrechnung

Auf einer Lehrerfortbildung in Rheinland-Pfalz lernte ich vor einigen Jahren, dass man Ableitung und Integral auch mit unendlich kleinen und unendlich grossen Zahlen statt über Grenzwerte einführen kann, und war später überrascht, eine wie grosse Erleichterung das für den Analysisunterricht in der Schule bedeutet. Ich danke der Deutschschweizerischen Mathematikkommission für die Einladung, meine Erfahrungen hier vorzustellen. Das Folgende ist keine mathematisch irgendwie vollständige Darstellung; ich belasse es bei einigen ‚Appetithappen‘, die zum Weiterdenken oder Nachlesen anregen möchten.

1 Ein wenig Geschichte

Als Leibniz und Newton unabhängig voneinander jeweils ihre Differential- und Integralrechnung entwickelten, benutzten sie unendlich kleine Grössen. Diese blieben selbstverständliches Werkzeug der Mathematik bis tief ins 19. Jahrhundert hinein, obwohl man sich ihrer Existenz nie recht sicher war. Um 1870 wurden eine formale Definition der sogenannten reellen Zahlen sowie das heute noch übliche, nicht nur für Schüler komplizierte Grenzwert-Kalkül gefunden, das es erstmals erlaubte, Ableitung und Integral ohne unendliche Zahlen zu definieren. Doch blieb die Entwicklung der Zahlssysteme nicht stehen: Ab etwa 1960 konstruierten Curt Schmieden, Detlef Laugwitz, Abraham Robinson und Wilhelmus Luxemburg eine Erweiterung der reellen Zahlen, die genau die unendlichen Zahlen enthielt, die in Leibniz' und Newtons Kalkül gebraucht wurden. Obwohl die damit gewonnene *Nichtstandardanalysis* neue Möglichkeiten eröffnete, spielt sie in der wissenschaftlichen Mathematik bis heute kaum eine Rolle; ihr didaktischer Nutzen wird gegenwärtig aber mehr und mehr entdeckt und geschätzt, an Schule wie Hochschule.

2 Ableitung mit Infinitesimalien berechnet

Die Grundaufgabe der Differentialrechnung ist, die Steigung einer Kurve in einem Punkt zu bestimmen. Näherungswerte erhält man, indem man Sekantensteigungen berechnet; je kleiner das Steigungsdreieck, desto besser die Näherung. Was muss man tun, damit aus den Näherungen ein genauer Steigungswert wird? Verblüffenderweise antworten Schüler auf diese Frage häufig: „Das Dreieck muss unendlich klein werden!“ Als ich noch Standard unterrichtete, musste ich dann erwidern: „Das wäre schön, geht nur leider nicht; aber wir können da etwas tricksen“, und es folgte der Grenzwertformalismus. Nichtstandard lautet die Antwort einfach: „Genau. Machen wir das.“ Man braucht also unendlich kleine Zahlen, über die man an dieser Stelle im Unterricht nicht viel mehr wissen muss, als dass ihr Betrag kleiner als jede positive reelle Zahl ist, sie aber ungleich Null sein können und man mit ihnen nach den gleichen Regeln rechnet wie mit reellen Zahlen.

Bezeichnet man eine solche infinitesimale, von Null verschiedene Zahl nach der noch auf Leibniz selbst zurückgehenden Tradition mit der zweibuchstabigen Variablen dx , so liefert ein unendlich kleines Steigungsdreieck folgende Näherung für die Steigung der quadratischen Normalparabel an der Stelle x :

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2x dx + dx^2 - x^2}{dx} = \frac{2x dx + dx^2}{dx} = 2x + dx.$$

Der Unterschied zwischen diesem Ergebnis und der reellen Zahl $2x$ ist kleiner als jede reelle Zahl (man sagt, $2x + dx$ und $2x$ seien *infinitesimal benachbart*, und schreibt: $2x + dx \simeq 2x$); solange einen in der realen Welt nur reelle Zahlen interessieren, wird man also mit der Steigung $2x$ rechnen dürfen. Daraus lässt sich die Definition der Ableitung verallgemeinern:

Wenn der Quotient $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ für jedes infinitesimale $dx \neq 0$ zur selben reellen Zahl infinitesimal benachbart ist, so heisst diese Zahl die Ableitung von f an der Stelle x .

Der Unterschied zur Standardherleitung ist offensichtlich: Die Rechnung ist klarer und einfacher, da keine Grenzübergänge, sondern nur elementare Termumformungen notwendig sind, und vor allem: Statt einer vielwöchigen Unterrichtsreihe „Folgen und Grenzwerte“ setzt diese Herleitung der Ableitung lediglich fünf Minuten „Unendlich kleine Zahlen“ voraus. Ich komme darauf am Ende noch einmal zurück.

3 Infinitesimalien gibt es wirklich

Die Konstruktion der Zahlbereichserweiterung beginnt recht einfach. Ähnlich wie man aus zwei ganzen Zahlen eine rationale Zahl „baut“, entsteht aus unendlich vielen reellen Zahlen eine hyperreelle Zahl: Eine unendliche, mit den natürlichen Zahlen durchnummerierte Aneinanderreihung von Zahlen heisst eine Folge; jede reelle Folge beschreibt eine *hyperreelle Zahl*. Zwei Folgen, die sich in nur endlich vielen Gliedern unterscheiden, beschreiben dieselbe hyperreelle Zahl. Verknüpfungen und Ordnungsrelation werden gliedweise definiert, konstante Folgen identifizieren wir mit reellen Zahlen. In dieser Konstruktion ist die durch $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots)$ definierte hyperreelle Zahl *grösser als Null*, da jedes Folgenglied grösser als Null ist, aber *kleiner als jede reelle Zahl*, da $\frac{1}{n}$ nur für endliche viele n grösser oder gleich einer konstant gegebenen reellen Zahl sein kann. So hat man in wenigen Schritten die erste von Null verschiedene infinitesimale Zahl gefunden. Kehrwerte infinitesimaler Zahlen sind unendlich gross und heissen *infini*; ein Beispiel ist die Zahl $(1; 2; 3; 4; \dots)$.

Die mathematische Arbeit ist damit noch nicht zu Ende; wenn die hyperreellen Zahlen einen (nullteilerfreien) Körper bilden sollen, muss im Produkt $(1; 0; 1; 0; \dots) \cdot (0; 1; 0; 1; \dots)$ einer der Faktoren dieselbe hyperreelle Zahl beschreiben wie $(0; 0; 0; 0; \dots)$, und das heisst, dass sich zwei Folgen, die zur selben Zahl gehören, auch in unendlich vielen Gliedern unterscheiden können. Das zu erreichen ist mathematisch etwas aufwendiger, allein: Im Unterricht spielen solche Fälle nirgends eine Rolle.

4 Beispiele für Nichtstandardherleitungen

Der Nichtstandardzugang macht manche Rechnungen leichter, manche sogar überhaupt erst möglich. In den folgenden drei Beispielen benutzen wir die Kurzschreibweise $df := f(x + dx) - f(x)$, die auch $f(x + dx) = f(x) + df$ impliziert.

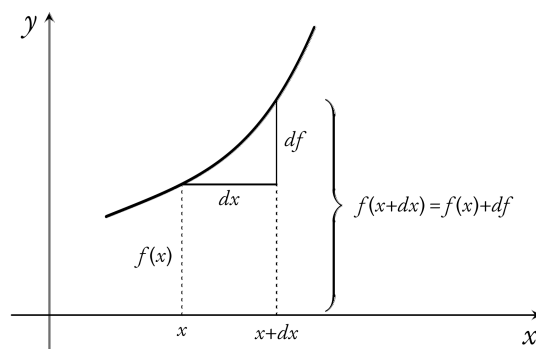


Abbildung 1: Zur Schreibweise df (Quelle: Lingenberg 2023, S. 19)

Stetige Funktionen sind dadurch charakterisiert, dass die zu einer infinitesimalen Änderung dx des Arguments gehörende Änderung df des Funktionswerts ebenfalls infinitesimal ist. Das gilt dann insbesondere auch für differenzierbare Funktionen.

4.1 Kettenregel

Für den Beweis der Kettenregel notiere ich nur die zentralen Umformungen:

$$\begin{aligned} \frac{d(f(g))}{dx} &= \frac{f(g(x+dx)) - f(g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(g(x) + dg) - f(g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(g(x) + dg) - f(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \\ &\simeq f'(g(x)) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

Der letzte Schritt nutzt aus, dass bei einer differenzierbaren Funktion f der Bruch $\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ gemäss Definition zur reellen Zahl $f'(x)$ infinitesimal benachbart ist; das gilt nämlich auch an der Stelle $g(x)$ und wenn man für dx das infinitesimale dg einsetzt.

4.2 Sinus und Kosinus

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen lassen sich standardbasiert im Schulunterricht nicht mit vertretbarem Aufwand präzise herleiten; nichtstandardbasiert ergeben sie sich ziemlich schnell und aufgrund rein elementargeometrischer Überlegungen aus einer geeigneten Skizze:

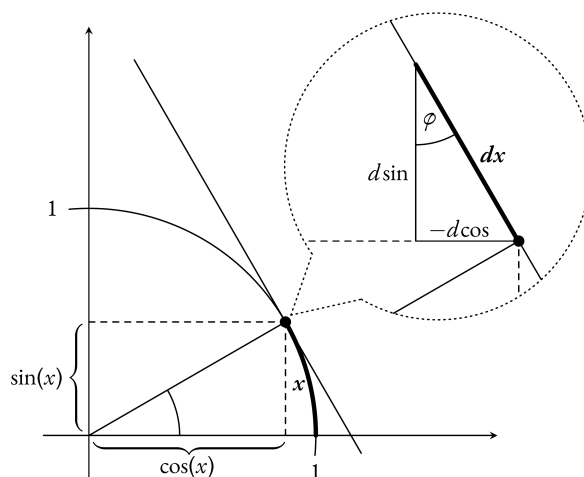


Abbildung 2: Ableitungen von Sinus und Kosinus (Quelle: Lingenberg 2023, S. 38)

Der Skizzenausschnitt muss, damit das infinitesimale dx sichtbar wird, mit einem infiniten Faktor vergrössert werden. Die Krümmung des Einheitskreises wird dabei infinitesimal, die Kreislinie erscheint im Ausschnitt gerade, und geometrische Überlegungen, die auf der Annahme der Geradlinigkeit basieren, sind bis auf einen lediglich infinitesimalen Fehler korrekt.¹ Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke sind φ und der zur Bogenlänge x gehörende Ursprungswinkel gleich. Da der Kosinus im betrachteten Abschnitt fällt, also $d \cos$ negativ ist, die elementaren Definitionen der trigonometrischen Funktionen aber nur für positive Seitenlängen anwendbar sind, ist die Länge der waagrechten Kathete als $-d \cos$ anzusetzen. Damit liest man aus der Skizze ab: $\frac{d \sin}{dx} \simeq \cos \varphi = \cos x$ und $\frac{-d \cos}{dx} \simeq \sin \varphi = \sin x$. Gemäss Definition folgen die Ableitungen: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

¹Ähnliches hatte Leibniz schon vermutet; streng bewiesen wurde das erst von K. Kuhlemann, *Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung*, Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10, 2018, 47–65; <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-14260>.

4.3 Hauptsatz

Mindestens ebenso eindrucksvoll ist die Vereinfachung im Falle des Hauptsatzes, der standardbasiert über eine kunstvolle Abschätzung unter Verwendung des Mittelwertsatzes bewiesen zu werden pflegt. Nichtstandardbasiert ist wieder kaum mehr als eine Skizze notwendig. Mit

$$I_a(x) := \int_a^x f(t) dt$$

und einem infinitesimalen $dx \neq 0$ ist

$$dI_a = I_a(x + dx) - I_a(x) = \int_a^{x+dx} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+dx} f(t) dt.$$

Das ist gerade der Zuwachs der Integralfläche von x bis $x + dx$:

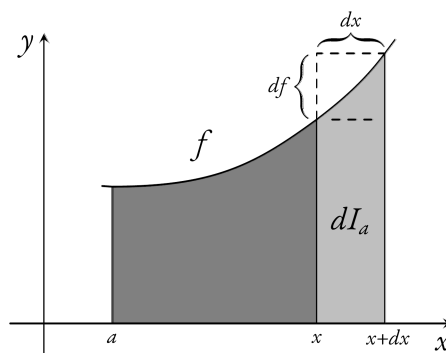


Abbildung 3: Hauptsatz (nach Lingenberg 2023, S. 36)

Die Zuwachsfläche dI_a besteht aus einem Rechteck mit den Kantenlängen $f(x)$ und dx und einer Restfläche, die innerhalb eines Rechtecks mit den Kanten df und dx liegt (wir stellen uns der Einfachheit halber $f(x)$, dx und df als positiv vor). Da df im Verhältnis zu $f(x)$ infinitesimal ist, ist auch $df \cdot dx$ im Verhältnis zu $f(x) \cdot dx$ infinitesimal, und erst recht gilt dies für die Restfläche im Verhältnis zur erstgenannten Rechteckfläche. Wenn man also dI_a durch das Rechteck $f(x) \cdot dx$ ersetzt, macht man einen nur infinitesimalen Fehler, und der Hauptsatz ergibt sich in einer halben Zeile:

$$\frac{dI_a}{dx} \simeq \frac{f(x) \cdot dx}{dx} = f(x).$$

Ein besonderer Charme dieser Herleitung liegt darin, dass er so klar wie nur irgend möglich die eigentliche Aussage des Hauptsatzes sichtbar macht: „Der Wert der Funktion bestimmt den momentanen Zuwachs der unter dem Graphen liegenden Fläche“ (Lingenberg 2023, S. 35).

5 Warum Nichtstandardanalysis im Unterricht?

Weil es für die Schüler leichter ist und weil es Zeit spart. Konkret: Einen Analysiskurs mit dem Thema „Folgen und Grenzwerte“ anzufangen kostete mich früher sechs bis acht Wochen Unterrichtszeit, und es fiel den Schülern quälend schwer. Nichtstandardbasiert beginnt der Kurs unmittelbar mit dem Ableitungsbegriff, und die Folgen werden später mit einer oder zwei Wochen Zeitaufwand im Zusammenhang mit den hyperreellen Zahlen eingeführt. Dabei scheint die statische Vorstellung einer Folge als *Zahl* den Schülern deutlich weniger Mühe zu machen als die dynamische als *Entwicklung* auf einen (möglicherweise nie erreichten) Grenzwert zu. Das Thema ‚Grenzwert‘ selbst schiebe ich gern auf die

Zeit unmittelbar vor den Abschlussprüfungen. Die Schüler sind dann zwei Jahre älter und erfassen den Begriff und den Umgang damit innerhalb weniger Unterrichtsstunden. Unterm Strich bleibt eine Zeitersparnis von einigen Wochen, ohne dass irgendwelcher Stoff geopfert worden wäre.

Erstaunlicherweise habe ich bei den Schülern noch nie irgendwelche Berührungängste gegenüber unendlich kleinen und unendlich grossen Zahlen beobachtet — ganz anders als mit der Grenzwertmathematik, der ich im Unterricht kaum je echte Freunde gewinnen konnte. Mir persönlich kommt der Nichtstandardzugang auch mathematisch schöner und philosophisch befriedigender vor, aber das liegt vollständig im Bereich individueller Vorlieben. Im übrigen darf man nicht vergessen, dass sich die Entscheidung „Standard oder Nichtstandard“ ausschliesslich auf die Definitionen, Herleitungen und Beweise auswirkt; der zeitlich weit überwiegende Teil eines Analysiskurses, der sich mit Anwendungen und Übungen befasst, bleibt davon unberührt.

Zum Weiterlesen

Eine Fülle an Informationen und Materialien findet man

- auf der Netzseite www.nichtstandard.de und
- in einer von P. Baumann, T. Bedürftig und V. Fuhrmann herausgegebenen Handreichung, die aus den rheinland-pfälzischen Fortbildungen hervorging; abrufbar unter www.nichtstandard.de/Downloads.html.

Da ich mir für die erste Einarbeitung eine bequem lesbare und auf das Notwendige konzentrierte Darstellung gewünscht hätte, habe ich mittlerweile selbst eine solche geschrieben:

- W. Lingenberg, *Nichtstandardanalysis für die Schule*, Norderstedt ²2023; ISBN 9783757847111.

Wer sich für Entstehung und Entwicklung der Nichtstandardanalysis interessiert, erhält einen detaillierten Überblick im zweiten Kapitel von

- K. Kuhleemann, *Nichtstandard in der elementaren Analysis. Mathematische, logische, philosophische und didaktische Studien zur Bedeutung der Nichtstandardanalysis in der Lehre*, Diss. Hannover 2022; <http://dx.doi.org/10.15488/12105>

oder im dritten Kapitel der daraus hervorgegangenen Monographie:

- K. Kuhleemann, *Nonstandard-Analysis: In der Hochschul-Didaktik, Logik und Philosophie*, Berlin–Boston: De Gruyter 2024; <https://doi.org/10.1515/9783111229027>.

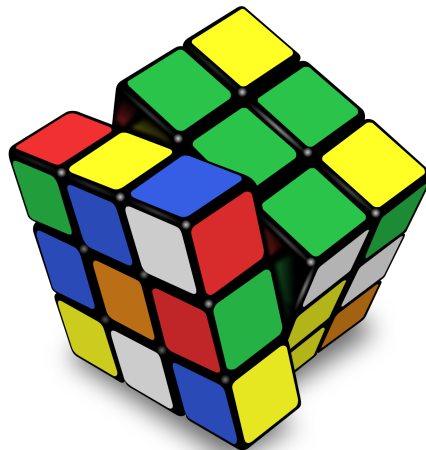
Weitere Literatur jeweils in den Literaturverzeichnissen.

Rubik's Day an der ETH Zürich

2024 wird der Zauberwürfel 50 Jahre alt und sein Erfinder, Ernő Rubik, feiert seinen 80. Geburtstag. Aus diesem Anlass findet am Freitag, 15. November 2024, an der ETH Zürich der Rubik's Day statt. Ernő Rubik wird persönlich anwesend sein. Für Schülerinnen und Schüler sind folgende Veranstaltungen geplant:

- Ein Vortrag von Martin Kreuzer (Universität Passau) für Schulklassen
- Ein Workshop von Swisscubing, für alle, die lernen wollen, wie man den Würfel (schnell) löst
- Ein Speed-Wettbewerb, organisiert von Swisscubing für Schülerinnen und Schüler: Wer löst den Würfel am schnellsten?

Das genaue Programm und die Anmeldung sind auf math.ch/rubik aufgeschaltet. Die Teilnahme ist gratis, die Anmeldung ist aber aufgrund der beschränkten Platzzahlen obligatorisch.





Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm Herbstsemester 2024

Die Vorträge finden jeweils am Donnerstag um 17.15 Uhr im Hauptgebäude der ETH Zürich im Raum HG G 19.1 statt.

Donnerstag, 24. Oktober 2024

Simulation dynamischer Systeme im Unterricht
Hermann Biner

Donnerstag, 7. November 2024

Vektorgeometrie mit Computer – neue Algorithmen für alte Probleme
Walter Gander (ETH Zürich)

Donnerstag, 21. November 2024

Die Geometrie der Kombinatorik: eine Dreiecksrhapsodie
Emanuele Delucchi (Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana)

Donnerstag, 5. Dezember 2024

Kongruente Zahlen: von Pythagoras zu Fermat
Sarah Zerbes (ETH Zürich)

Herzlich laden ein: M. Akveld, D. Grawehr, J. Hromkovič, N. Hungerbühler, D. Komm, P. Spindler

Diese und weitere Veranstaltungshinweise finden Sie unter:
math.ch/mathematics@school

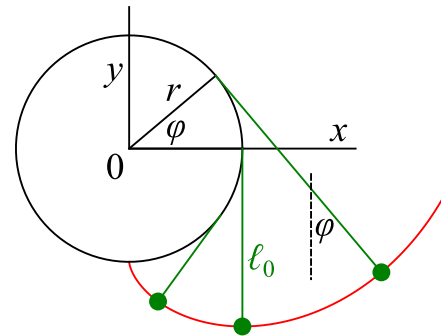
Evolventenpendel

1 Einleitung

Das Evolventenpendel ist ein Fadenpendel, das um einen horizontalen Zylinder gewickelt ist, siehe Abbildung 1. Wird es angestoßen, bewegt sich der Pendelkörper (Massenpunkt) auf einer Kreisevolventen. Der Faden ist stets tangential zum Kreis gespannt. Wie bewegt sich das Pendel? Die Bewegung erfolge in einer vertikalen Ebene senkrecht zur Zylinderachse. Überschläge, die bei starker Anregung möglich wären, wollen wir ignorieren, ebenso Kollisionen mit dem Zylinder.

Abbildung 1: Evolventenpendel

Ein Fadenpendel ist um eine horizontale, zylindrische Stange mit Radius r gewickelt. Die Stange erscheint im Querschnitt als Kreis. Ein kartesisches Koordinatensystem habe den Ursprung im Kreiszentrum, die Abszissenachse (x) liege auf dem horizontalen Kreisdurchmesser und die Ordinatenachse (y) auf dem vertikalen. Der Faden tangiere bei (r, φ) den Kreis; der momentane Winkel φ wird auch vom gespannten Faden und der Vertikalen eingeschlossen. Im Gleichgewicht ist $\varphi = 0$ und der frei hängende Faden habe die Länge ℓ_0 . Wird der Faden bis zum Winkel φ ausgelenkt, so wird die Länge $r\varphi$ vom Kreis abgewickelt und die freie Fadenlänge verlängert sich auf $\ell_0 + r\varphi$. Für $\varphi < 0$ verkürzt sich die Länge entsprechend.



2 Theorie

Die Bahn des Pendelkörpers in Abb. 1 ist eine Kreisevolvente (engl. involute of a circle). Parametrisiert mit dem Winkel φ sind die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + (\ell_0 + r\varphi) \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \quad (1)$$

Der minimal mögliche Auslenkwinkel ist dort, wo das Pendel links gegen den Zylinder schlägt:

$$\varphi_{\min} = -\ell_0/r \quad (= -\pi/2 \text{ in Abb. 1}) \quad (2)$$

Die momentane Geschwindigkeit ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dots = (\ell_0 + r\varphi) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \dot{\varphi} \quad (3)$$

2.1 Energie

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\ell_0 + r\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (4)$$

Die potentielle Energie ist

$$V = mgy = mgr \sin \varphi - mg(\ell_0 + r\varphi) \cos \varphi \quad (5)$$

Da die Gesamtenergie $E = T + V$ erhalten ist, muss die zeitliche Ableitung verschwinden

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2}m(\ell_0 + r\varphi)^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \sin \varphi - mg(\ell_0 + r\varphi) \cos \varphi \right\} = 0 \quad (6)$$

(...)

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2}{\ell_0 + r\varphi} \quad (7)$$

Für kleine Winkel ($|\varphi| \ll \pi/2$) und Winkelgeschwindigkeiten ($|\dot{\varphi}|$) geht sie in die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels über. Dieselbe Differentialgleichung folgt auch mit Lagrange-Mechanik.

Die maximale Auslenkung $\varphi_{\max} > 0$ auf der freien Seite bestimmt den Betrag der maximalen Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{\max}$ in der Gleichgewichtslage bei $\varphi = 0$:

$$T_0 + V_{\min} = 0 + V_{\max} \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}\ell_0^2\dot{\varphi}_{\max}^2 - g\ell_0 = gr \sin \varphi_{\max} - g(\ell_0 + r\varphi_{\max}) \cos \varphi_{\max} \quad (9)$$

Die umgekehrte Rechnung ($\dot{\varphi}_{\max} \rightarrow \varphi_{\max}$) führt leider auf eine transzente Gleichung. Falls das Pendel die Gleichgewichtslage zu schnell nach links passiert, kann der Pendelkörper gegen den Zylinder schlagen.

2.2 Numerische Intergration der Bewegungsgleichung

Abbildung 2 zeigt zwei numerische Integrationen. Die Bewegungsgleichung (7) wurde mit dem Euler-Cromer-Verfahren in Python gelöst und graphisch dargestellt.

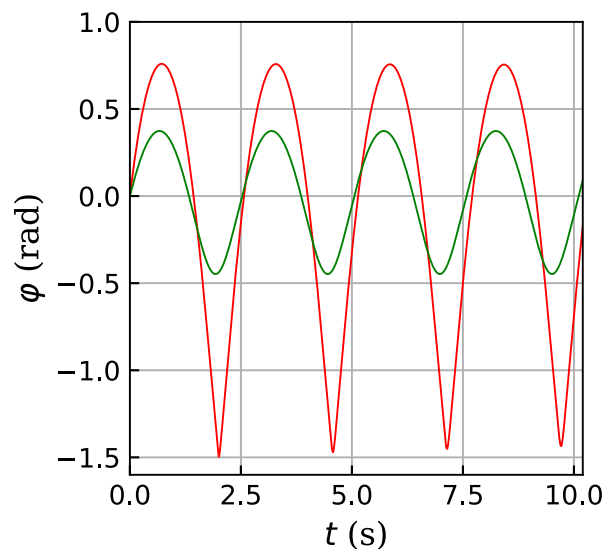
Abbildung 2: Zwei Bahnen eines Evolventenpendels

Die Parameterwerte sind

$$r = 1.0 \text{ m}, g = 9.81 \text{ m/s}^2 \text{ und } \ell_0 = r \cdot \pi/2.$$

Die grüne Bahn ist für eher kleine Auslenkungen, die rote für maximal grosse. Bei den gewählten Zahlen ist der minimale Ausschlag $\varphi_{\min} = -\pi/2$. Wird das Pendel stärker angestossen, schlägt es gegen den Zylinder. Für ganz kleine Amplituden ergibt sich eine Schwingungsdauer von $T = 2\pi\sqrt{\ell_0/g} = 2\pi\sqrt{1.0 \text{ m} \cdot \pi/(2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2)} = 2.514 \text{ s}$, was zur grünen Kurve passt. Die Schwingungsdauer wächst mit der Amplitude leicht an.

Die Bahnen sind periodisch, aber unsymmetrisch bezüglich $\varphi = 0$. Die Amplitude nimmt wegen Diskretisierungsfehlern mit der Zeit leicht ab.



3 Experiment

Ich nahm ein hohes, zylindrisches Glasgefäß von etwa 25 cm Durchmesser und lege es horizontal auf zwei Holzklötze. Dann klebte ich den Faden, an dem der kleine Pendelkörper hing, oben auf das Glas. Das Pendel konnte vor dem Tisch frei schwingen. Die Situation entsprach etwa Abbildung 1. Die Bewegung wurde mit dem Mobiltelefon videographiert, mit dem Gratis-Programm Tracker¹ analysiert und mit der in Python numerisch integrierten Bewegungsgleichung (7) verglichen, siehe Abbildung 3.

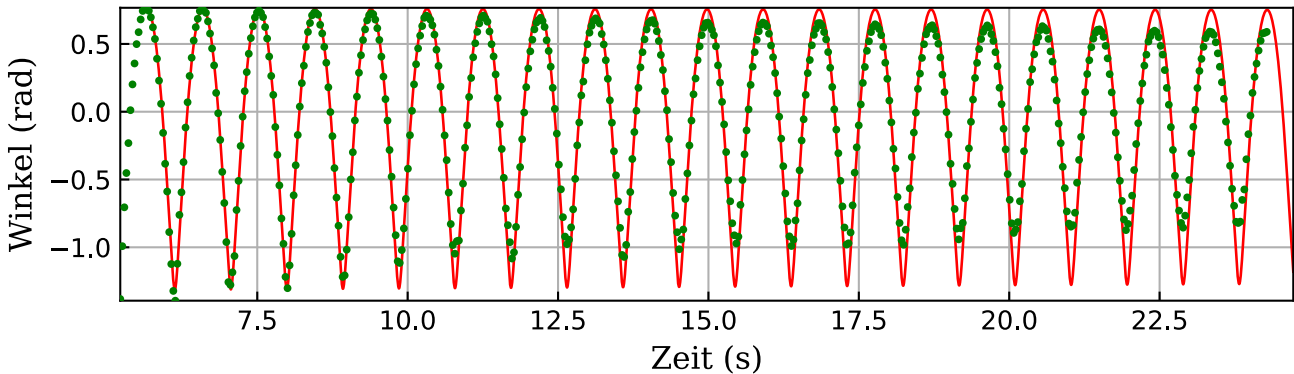


Abbildung 3: Gemessene Bahn (grüne Punkte) und berechnete Bahn (rote Linie) eines Evolventenpendels. Die Theoriekurve wurde “von Hand” an die Messdaten gefittet. Die Parameterwerte sind $r = 0.125$ m, $\ell_0 = 0.2051$ m und $g = 9.81$ m/s². Die Dämpfung wurde in der Simulation weggelassen.

4 Diskussion

Nicht jede Schwingung ist sinusförmig (harmonisch). Nicht jede Schwingung ist symmetrisch. Nicht jede Schwingung hat eine Periode, die unabhängig von der Amplitude ist. Nicht jede Schwingung ist periodisch.

Die Theorie und die Messungen zum Evolventenpendel sind anspruchsvoll, wären aber mit einer guten Klasse oder als Projekt durchaus machbar.

Der symmetrische Fall, bei dem der Faden zwischen zwei Zylindern eingeklemmt ist, wurde schon von Huygens betrachtet. Es war ein früher Versuch, eine genau laufende Pendeluhr zu konstruieren.² Später erfand er das bekanntere Zykloidenpendel. Das Fadenpendel zwischen zwei Zylindern ist immer noch Gegenstand der Forschung.³ Der unsymmetrische Fall, d.h. nur auf einer Seite ein Zylinder, wurde auch schon betrachtet, sogar mit elastischem Faden.⁴

¹ <https://physlets.org/tracker> (16. September 2023)

² <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Curves/Involute/> (16. September 2023)

³ H. Mazaheri a, A. Hosseinzadeh b, M.T. Ahmadian, “Nonlinear oscillation analysis of a pendulum wrapping on a cylinder”, *Scientia Iranica B* (2012) 19 (2), 335–340

⁴ I. Ivanov, “Nonlinear oscillations of a pendulum wrapped around a cylinder”, DOI:10.5937/imk2103105i (2021)



Elemente der Quantenphysik an Maturitätsschulen

Unterrichtsvorschläge und ein Seitenblick auf die Klimaphysik

Datum

Mittwoch, 13. November 2024, 10.00 – 17.00 Uhr

Kursort

Science Lab UZH, Campus Irchel, Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich, Seminarraum Y10-E36

Kursleitung

Prof. Dr. Christof Aegerter, Professor für Disordered and Biological Soft Matter, Universität Zürich
Dr. Hans Peter Dreyer, ehem. Dozent für Fachdidaktik ETH und Lehrer für Physik, KS Wattwil

Kosten und Anmeldung

CHF 250.-

Bis 13. Oktober 2024: www.weiterbildung.uzh.ch oder direkt bei
<https://www.weiterbildung.uzh.ch/whp/programme/kurs/s/elemente-der-quantenphysik-an-maturitaetsschulen>

Thema

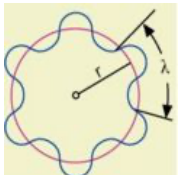
Vor genau hundert Jahren verteidigte Louis de Broglie seine Dissertation mit einer genialen Idee: Die



Welle-Teilchen-Dualität, die Einstein beim Licht entdeckt hatte, als er Professor an der Universität Zürich war, kann auf das Elektron übertragen werden. Heute tauchen Quanten im Grundlagenfach selten auf, doch fordert der neue Rahmenlehrplan einen Einblick in die – nicht mehr moderne – Physik. Zudem soll die Klimafrage aus physikalischer Sicht aufgegriffen werden. Bei diesen vielfältigen



Anforderungen setzt die Weiterbildung an.



Nach einer Zusammenfassung der Grundlagen wird ein erprobtes Unterrichtskonzept vorgestellt und hinsichtlich Anwendbarkeit unter verschiedenen Rahmenbedingungen diskutiert. Die zugehörigen Materialien werden in elektronischer Form abgegeben, so dass sie für den eigenen Unterricht angepasst werden können.



Inhalte und Ziele

- einen Überblick über Quantenphysik, ihre Entwicklung und Anwendungen gewinnen
- sich der verbreiteten Lernschwierigkeiten zur Quantenphysik bewusst sein
- um Zusammenhänge zwischen Quanten- und Klimaphysik wissen
- mit möglichen Inhalten und Lernzielen von Unterrichtsverläufen zur Quanten- und Klimaphysik in Grund- und Schwerpunktfach vertraut sein
- einige Experimente und spezifische Lernkontrollen zur Quantenphysik kennen

| | <p>Svante Arrhenius 1896:</p> <p>Erste Modellrechnung: «Über den Einfluss des CO₂ in der Atmosphäre auf das Klima»</p> | <p>TABLE VII.—Variation of Temperature on Carbonic Acid=0.02. Carbonic Acid=1.0.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th rowspan="2">Latitude</th> <th colspan="5">Carbonic Acid=0.02</th> <th colspan="5">Carbonic Acid=1.0</th> </tr> <tr> <th>Max. Feb.</th> <th>Min. May</th> <th>Mean July</th> <th>Max. Oct.</th> <th>Mean Dec.</th> <th>Max. Feb.</th> <th>Min. May</th> <th>Mean July</th> <th>Max. Oct.</th> <th>Mean Dec.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>70</td> <td>-25</td> <td>-50</td> <td>-34</td> <td>-31</td> <td>-31</td> <td>35</td> <td>34</td> <td>34</td> <td>36</td> <td>37.5</td> </tr> <tr> <td>60</td> <td>-30</td> <td>-52</td> <td>-34</td> <td>-33</td> <td>-32.5</td> <td>34</td> <td>37</td> <td>34</td> <td>38</td> <td>39.5</td> </tr> </tbody> </table> | Latitude | Carbonic Acid=0.02 | | | | | Carbonic Acid=1.0 | | | | | Max. Feb. | Min. May | Mean July | Max. Oct. | Mean Dec. | Max. Feb. | Min. May | Mean July | Max. Oct. | Mean Dec. | 70 | -25 | -50 | -34 | -31 | -31 | 35 | 34 | 34 | 36 | 37.5 | 60 | -30 | -52 | -34 | -33 | -32.5 | 34 | 37 | 34 | 38 | 39.5 |
|----------|--|---|-----------|--------------------|-----------|-------------------|----------|-----------|-------------------|-----------|--|--|--|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|-----------|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|------|----|-----|-----|-----|-----|-------|----|----|----|----|------|
| Latitude | Carbonic Acid=0.02 | | | | | Carbonic Acid=1.0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | Max. Feb. | Min. May | Mean July | Max. Oct. | Mean Dec. | Max. Feb. | Min. May | Mean July | Max. Oct. | Mean Dec. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 70 | -25 | -50 | -34 | -31 | -31 | 35 | 34 | 34 | 36 | 37.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 60 | -30 | -52 | -34 | -33 | -32.5 | 34 | 37 | 34 | 38 | 39.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | <p>Charles D. Keeling 1958:</p> <p>Startet CO₂-Messungen auf Mouna Loa, Hawaii im Geophysikalischen Jahr</p> | <p>Carbon dioxide concentration at Mouna Loa Observatory</p> | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Samuel Byland
Pro IYPT-CH, samuel.byland@sypt.ch

Silbermedaille beim IYPT 2024 und Ausblick auf das SYPT 2025

Das *Swiss Young Physicists' Tournament* (SYPT) fand am 16. und 17. März 2024 an der Universität Basel statt, welche einen würdigen Rahmen für ein spannendes Turnier mit motivierten Teilnehmerinnen und Teilnehmern aus verschiedenen Ecken der Schweiz bot. Am *International Young Physicists' Tournament* (IYPT) vom 10. bis 17. Juli in Budapest (Ungarn) schnitt das Schweizer Team einmal mehr äusserst erfolgreich ab und durfte sich nach starken Leistungen in einem Feld von 38 Teams aus der ganzen Welt über eine verdiente Silbermedaille freuen.



Abbildung: Schweizer Delegation beim IYPT 2024 in Budapest nach dem Gewinn der Silbermedaille.

Nach diesen erfolgreichen Turnieren beginnt bereits wieder die Vorbereitung für den Wettbewerb im nächsten Jahr. Das SYPT 2025 findet an einem Wochenende in der zweiten Märzhälfte in Zürich statt. Genauere Informationen stehen ab Oktober auf der Website www.sypt.ch zur Verfügung.

Was ist das SYPT bzw. das IYPT?

Das *Swiss Young Physicists' Tournament* (SYPT) ist ein schweizweiter Wettbewerb, an dem physikbegeisterte Schülerinnen und Schüler (typischerweise ab der 2. Klasse des Kurzgymnasiums) aus der ganzen Schweiz teilnehmen. In so genannten *Physics Fights* treten jeweils drei Teams von verschiedenen Schulen gegeneinander an. Abwechslungsweise präsentieren und verteidigen sie ihre Lösung zu einer vorgegebenen Problemstellung, kritisieren die Lösung der Gegner oder beurteilen die Leistungen der anderen beteiligten Teams. Die Leistungen aller drei Teams werden durch eine Jury bewertet.

Im Gegensatz zu anderen Wissenschaftswettbewerben sind die Problemstellungen lange im Voraus bekannt, d.h. Hilfe von anderen Schülerinnen und Schülern, Lehrpersonen etc. kann in Anspruch genommen werden. Der Wettbewerb selbst ist mit einer wissenschaftlichen Konferenz vergleichbar, bei der die Resultate der Forschungsarbeit vorgestellt werden. Aufgrund des besonderen Formats spricht das SYPT besonders Schülerinnen und Schüler an, welche neben der Freude am physikalischen Forschen auch gute kommunikative Fähigkeiten mitbringen und gerne im Team arbeiten.

Das *International Young Physicists' Tournament* (IYPT) ist das internationale Vorbild des nationalen Wettbewerbs. Teams aus der ganzen Welt treten einmal im Jahr gegeneinander an. Ein vielseitiges Rahmenprogramm fördert den Kontakt der Mitglieder aus verschiedenen Teams.

Probleme für das SYPT und IYPT

Die Problemstellungen für die Turniere werden von einem internationalen Komitee jeweils rund ein Jahr vor dem IYPT festgelegt und publiziert. Sie sind bewusst offen formuliert, damit unterschiedliche Aspekte mit verschiedenen Schwierigkeitsgraden untersucht werden können. Erwartet wird eine theoretische und experimentelle Auseinandersetzung mit dem gewählten Problem.

Die aktuellen Probleme sind unter www.iypt.org/problems/problems-for-the-38th-iypt-2025 verfügbar. Drei Beispiele für den aktuellen Wettbewerb:

Air Muscle: Place a balloon inside a cylindrical net (as is sometimes used to wrap garlic) and inflate it. The net will expand and shorten. Investigate the properties of such a “muscle”.

Ruler Cannon: Two rulers are tightly held against each other. A round projectile (e.g. a plastic bottle cap or a ball) is inserted between them close to one of their ends. When extra force is exerted on the surface of the rulers, the projectile is ejected at a high speed. Investigate this effect and the parameters that affect ejection speed.

Spaghetti Accelerator: When a piece of spaghetti is pushed into a bent tube, small debris of spaghetti may be ejected from the other end of the tube at a surprisingly high speed. Investigate this phenomenon.

Vorbereitung

Beim SYPT nehmen in der Regel Teams mit drei Schülerinnen und Schülern teil. Im Idealfall kann sich ein Team an der eigenen Schule vorbereiten, unterstützt durch eine motivierte Lehrperson. Aufgrund des projektartigen Charakters eignet sich die Arbeit an IYPT-Problemen ausgezeichnet für Gefässe wie eine MINT-Werkstatt, Freifachkurse oder Projektwochen.

Der Verein Pro IYPT-CH organisiert vom 10. bis 14. Februar eine Vorbereitungswoche (*SYPT Physics Week*) in Zürich, bei der interessierte Schülerinnen und Schüler, welche sich für das SYPT angemeldet haben, von einer guten Infrastruktur und erfahrenen Coaches profitieren können.

Weitere Informationen und Anmeldung

Weitere Informationen werden laufend auf der Website www.sypt.ch aufgeschaltet. Die Anmeldung für das SYPT und die SYPT Physics Week ist ab Oktober möglich. Die Teilnahme ist kostenlos.

Bei Fragen zum SYPT steht der Autor (samuel.byland@sypt.ch) gerne zur Verfügung.



SYNT: Die „kleine“ Schwester des SYPT

Neben dem SYPT organisiert der Verein Pro IYPT-CH seit einigen Jahren mit dem *Swiss Young Naturalists' Tournament* (SYNT) einen ähnlichen Wettbewerb, welcher sich an jüngere Schülerinnen und Schüler (12 bis 16 Jahre) richtet. Die Problemstellungen decken verschiedene Naturwissenschaften und Informatik ab. Weitere Informationen zum SYNT findet man unter www.synt.ch.



Where tomorrow's scientists meet.

Lara Gafner
Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Mathematik- und Physik-Olympiaden feiern Ausnahmeerfolge

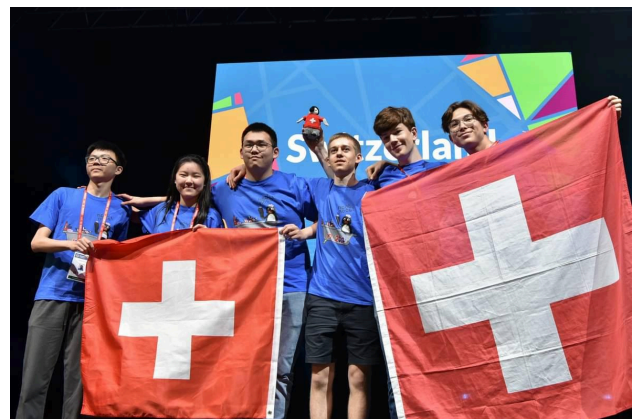
Mathematiker im Goldrausch

Letztes Jahr sorgte der Jurassier Mathys Douma für eine Sensation: Er gewann als erster Schweizer seit 2006 Gold an der Internationalen Mathematik-Olympiade.



Lesetipp: “Don’t die curious”, lautet sein Motto. Mathys Douma spricht im Porträt von Tanish Patil über Mathematik in der Schule, Diversität bei der Mathematik-Olympiade und Zukunftspläne nach dem frühen EPFL-Studium.

Dieses Jahr geht die Erfolgssträhne weiter. Felix Xu (Kantonsschule Wettingen) nahm am 21. Juli in Bath, England, die insgesamt dritte Schweizer Goldmedaille seit der ersten Teilnahme 1991 entgegen. „Wenn man die Welt der Mathematik-Olympiaden nicht kennt, ist es schwer zu verstehen, was für eine Leistung das ist“, erklärt Arnaud Maret von der Sorbonne-Universität. “IMO-Gold ist die grösste mathematische Herausforderung für MittelschülerInnen und bedarf sowohl guter Förderung, wie sie die Schweizer Mathematik-Olympiade bietet, als auch einer für dieses Alter besonders beeindruckenden Disziplin.”



Ausserdem gingen eine Bronzemedaille und fünf Ehrenmeldungen an die Schweiz und an Liechtenstein. Bei aller Freude über sein Resultat sagt Felix: “Ich bin etwas traurig für das Team, weil den anderen oft nur ein Punkt gefehlt hätte zur nächsthöheren Auszeichnung.” Die entscheidenden Prüfungen mit je drei Aufgaben über Algebra, Kombinatorik, Geometrie oder Zahlentheorie fanden am 16. und 17. Juli statt. Das fünfte Problem von diesem Jahr gehört jetzt schon zu den umstrittensten IMO-Aufgaben. Auch innerhalb des Schweizer Teams scheiden sich die Geister, aber Teamleiter David Rusch gefällt es: “Jeder kann darüber nachdenken, man braucht keine komplizierte Mathematik, um es zu lösen.”



Als Pause für den Verstand fand ein Rahmenprogramm mit Sport, Spiel und Ausflügen nach Oxford oder Stonehenge statt. Auch Stars der Mathematik waren an der IMO anzutreffen, beispielsweise Maryna Viazovska. Die an der EPFL tätige Fields-Medaillistin hat als Jugendliche für die Ukraine an der European Girls’ Mathematical Olympiad teilgenommen. Diese fand zuletzt im April in Georgien statt, wobei die Schweizerinnen zwar keine Goldmedaille, aber ihren bisher besten relativen Rang erreichten. Dass es für die Schweizer Delegation so gut gelaufen sei, sei besonders

bemerkenswert angesichts der unvoreilhaftigen Gewichtung der Themen, erklärt Hongjia Meng (Kantonale Mitteschule Uri). “Normalerweise sind die Schweizer Teilnehmenden am stärksten in Kombinatorik und Geometrie, wozu es diesmal nur je eine Frage gab.”

Keine Internationale Physik-Olympiade, dafür bisher beste Resultate



Da die Schweiz dieses Jahr auf eine Teilnahme an der Internationalen Physik-Olympiade im Iran verzichtet, ging es für die Gewinner des nationalen Finals im Juli “nur” nach Georgien an die Europäische Physik-Olympiade. Dort legte das Schweizer Team mit vier Bronzemedailles seine bisher beste Gesamtleistung an den Tag. Laut der Teamleiterin war das Schwierigste am Wettbewerb eine Aufgabe aus dem Bereich der Optik: Die Schüler mussten die Funktionsprinzipien eines Fabry-Pérot-Interferometers analysieren.

Im April war ein Schweizer Team an der Nordisch-Baltischen Physik-Olympiade in Estland dabei und gewann eine Bronzemedaille und zwei Ehrenmeldungen. Die Fragen an der NBPhO seien offener formuliert und würden mehr Kreativität erfordern, als sie es sich von der Internationalen Physik-Olympiade gewohnt sei, erklärt Teamleiterin Clémence Bachmann. Die jungen Talente mussten zum Beispiel die Masse einer dünnen Schnur ermitteln, nur mithilfe von Klebeband und einer Heftklammer. Dafür, dass die Schweizer Teilnehmenden wenig Zeit hatten, sich auf solche Fragen vorzubereiten, sei das Ergebnis sehr gut.



Wenn man die Teilnehmenden nach ihren Highlights bei den Olympiaden fragt, stehen oft nicht die Prüfungen, sondern die Begegnungen mit Gleichgesinnten im Vordergrund. “Als ich mich für das Vorbereitungslager der zweiten Runde der Schweizer Physik-Olympiade qualifizierte, dachte ich mir, schlimmstenfalls habe ich mich eine Woche für die Physikmatur vorbereitet”, erzählt Fynn Krebsler (Kantonsschule Zürcher Unterland). “In dem Lager lernte ich dann viele andere Teilnehmende kennen. Ich denke, dass diese zwischenmenschlichen Erfahrungen meine Liebe zur Physik extrem gestärkt haben.”



Bis zum 30. September können Ihre SchülerInnen noch an den ersten Runden der Mathematik- und Physik-Olympiade teilnehmen. Weitere Informationen finden Sie auf science.olympiad.ch/lehrpersonen.

Lara Gafner

Olympiades de la science, l.gafner@olympiad.ch

Les Olympiades de mathématiques et de physique célèbrent des succès exceptionnels

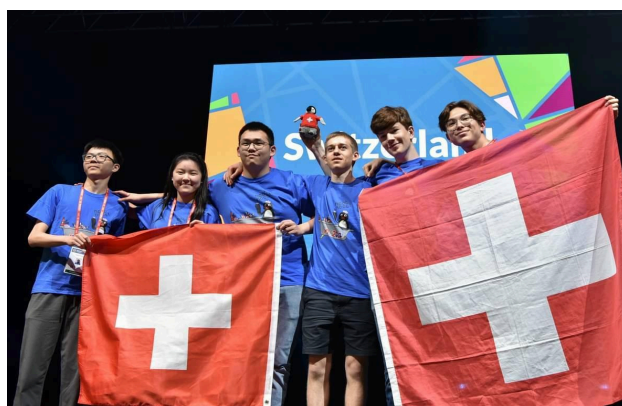
De l'or, à nouveau!

L'année dernière, le Jurassien Mathys Douma a fait sensation : il a été le premier Suisse depuis 2006 à remporter l'or aux Olympiades internationales de mathématiques.



Conseil de lecture : « Don't die curious », telle est sa devise. Portraituré par Tanish Patil, Mathys Douma parle de l'enseignement des mathématiques, de la diversité aux Olympiades de mathématiques et de ses projets après l'obtention de son Bachelor à l'EPFL.

Cette année, la série de succès se poursuit. Le 21 juillet, Felix Xu (Kantonschule Wettingen) a en effet décroché la troisième médaille d'or de la Suisse aux IMO 2024 en Angleterre. "Lorsque l'on ne connaît pas le monde des Olympiades de mathématiques, c'est difficile de comprendre l'ampleur de cette performance", explique Arnaud Maret de Sorbonne Université. "L'or aux IMO représente le plus grand défi mathématique pour les élèves d'école secondaire et requiert un soutien solide, tel que celui offert par les Olympiades suisses de mathématiques, et un travail particulièrement impressionnant pour cet âge."



En outre, la Suisse et le Liechtenstein ont remporté une médaille de bronze et cinq mentions d'honneur. Tout en se réjouissant de son résultat, Felix pense aussi à ses collègues: "Je suis un peu triste pour l'équipe. Les autres ont souvent manqué de peu la distinction suivante." Les examens déterminants composés de trois épreuves chacun en algèbre, en analyse combinatoire, en géométrie ou en théorie des nombres ont eu lieu les 16 et 17 juillet. Le cinquième problème de cette année fait déjà partie des énoncés les plus controversés des IMO. Les avis à ce sujet sont également partagés au sein de l'équipe suisse, mais le chef d'équipe David Rusch apprécie: "Tout le monde peut se pencher sur ce problème, il n'y a pas besoin de mathématiques compliquées pour le résoudre."



Pour reposer les esprits, le programme cadre proposait du sport, des jeux et des excursions à Oxford ou à Stonehenge. Certaines stars des mathématiques étaient également présentes, comme Maryna Viazovska. La médaillée de la branche travaillant à l'EPFL est une ancienne candidate de l'Ukraine aux European Girls' Mathematical Olympiad.

Celle-ci s'est déroulée en avril en Géorgie, où les Suisses n'ont certes pas remporté de médaille d'or, mais ont obtenu leur meilleur classement relatif à ce

jour. Hongjia Meng (Kantonale Mitteschule Uri) explique que le fait que la délégation suisse se soit si bien débrouillée est particulièrement remarquable compte tenu des épreuves désavantageuses. « Normalement, les participantes suisses sont les plus forts en combinatoire et en géométrie, pour lesquelles il n'y avait cette fois qu'une seule question ».

Pas d'Olympiades internationales de physique, mais d'excellents résultats



La Suisse ayant renoncé à participer aux Olympiades internationales de physique, organisées en Iran cette année, les jeunes ont voyagé jusqu'en Géorgie pour les Olympiades européennes de physique. L'équipe suisse y a réalisé sa meilleure performance jusqu'à ce jour, en remportant quatre médailles de bronze. Selon la responsable de l'équipe, le plus difficile de la compétition a été une tâche relevant de l'optique : les élèves devaient analyser les principes de fonctionnement d'un interféromètre de Fabry-Pérot.

Au mois d'avril, une équipe suisse a participé aux Olympiades nordiques et baltes de physique, en Estonie, ramenant à la maison une médaille de bronze

et deux mentions d'honneur. Les questions posées aux à ces Olympiades sont formulées de manière plus ouverte et requièrent plus de créativité que celles des Olympiades internationales de physique, explique

Clémence Bachmann, responsable de l'équipe. Les jeunes talents ont par exemple dû déterminer la masse d'une fine ficelle uniquement à l'aide d'un ruban adhésif et d'une agrafe. Au vu du peu de temps que la délégation suisse a eu pour se préparer à de telles questions, le résultat est très bon.

ne sont pas les épreuves qui sont évoquées, mais les rencontres avec des personnes partageant les mêmes intérêts : « Lorsque je me suis qualifié pour le camp de préparation du deuxième tour des Olympiades suisses de physique, je me suis dit qu'au pire, j'aurais passé une semaine à me préparer pour la maturité en physique », raconte Fynn Krebsler, de l'École cantonale de l'Unterland zurichois, „J'ai ensuite fait la connaissance de nombreux participants du camp. Je pense que ces expériences interpersonnelles ont renforcé mon amour pour la physique“.



Jusqu'au 30 septembre, vos élèves peuvent encore participer aux premiers tours des Olympiades de mathématiques et de physique. Plus d'informations sur science.olympiad.ch/fr/enseignantes.

Guido Lob
CMSI, guido.lob@edu.ti.ch

Il problema isoperimetrico per la famiglia dei triangolo

Il problema classico dell'*isoperimetria*¹ consiste nel determinare, all'interno di una famiglia di figure aventi lo stesso perimetro, le caratteristiche di quella di area massima.

Risolvere il problema isoperimetrico per la famiglia dei rettangoli è molto semplice: fissato il perimetro p , l'area \mathcal{A} del rettangolo in funzione di un suo lato x è data da

$$\mathcal{A}(x) = x \cdot \left(\frac{p}{2} - x\right).$$

Questa è una funzione quadratica che, come si può facilmente verificare, assume il suo valore massimo per $x = \frac{p}{4}$, ossia quando il rettangolo è un quadrato (poligono regolare).

Nel caso del triangolo il problema isoperimetrico è più difficile da risolvere, in quanto esistono più gradi di libertà per la misura dei lati.

Ricordiamo che, detti a, b, c i lati del triangolo e fissato il semiperimetro $s = \frac{a+b+c}{2}$, possiamo calcolare l'area del triangolo tramite la *formula di Erone*

$$\mathcal{A}(a, b, c) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}.$$

Per la soluzione del problema isoperimetrico per la famiglia dei triangoli possiamo intuire che la soluzione sia data dal triangolo equilatero (poligono regolare, in analogia con il caso della famiglia dei rettangoli). Nel seguito daremo tre diverse dimostrazioni a sostegno della nostra intuizione.

Una dimostrazione algebrica elementare

Notiamo dapprima che nella formula di Erone appaiono i fattori $s - a$, $s - b$ e $s - c$, la cui somma è un numero fisso:

$$(s - a) + (s - b) + (s - c) = 3s - (a + b + c) = s. \quad (1)$$

Dimostriamo ora che la media aritmetica di tre numeri reali non negativi è sempre maggiore della o uguale alla media geometrica degli stessi numeri.²

Lemma 1 (Disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica per tre numeri). *Dati tre numeri reali non negativi a, b, c vale*

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c};$$

l'uguaglianza vale se $a = b = c$.

Dimostrazione. Scomponendo in fattori $A^3 + B^3 + C^3 - 3A \cdot B \cdot C$ otteniamo

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 + C^3 - 3A \cdot B \cdot C &= (A + B + C) \cdot (A^2 + B^2 + C^2 - A \cdot B - B \cdot C - C \cdot A) \\ &= \frac{1}{2}(A + B + C) \cdot ((A - B)^2 + (B - C)^2 + (C - A)^2) \geq 0, \end{aligned}$$

¹Dal greco *isos*: uguale, *peri*: intorno e *mètron*: misura.

²Vedi <https://math.stackexchange.com/questions/973679/proving-am-gm-for-the-special-case-n-3>.

dove l'uguaglianza vale se $A = B = C$. Di conseguenza

$$\frac{A^3 + B^3 + C^3}{3} \geq A \cdot B \cdot C$$

e, sostituendo A^3 con a , B^3 con b e C^3 con c , otteniamo

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}. \quad \square$$

Grazie al Lemma 1 possiamo concludere quanto segue.

Lemma 2. *Il prodotto di tre numeri non negativi aventi somma costante è massimo se i tre numeri sono uguali.*

Dimostrazione. Siano a, b, c tre numeri reali non negativi e sia $p = a + b + c$ il valore della somma costante. Dal lemma 1 segue subito che

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

e che

$$\frac{p}{3} = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

se $a = b = c$, ossia il massimo del prodotto dei tre numeri si ottiene ponendo $a = b = c = \frac{p}{3}$. \square

Tornando ai fattori $s - a$, $s - b$ e $s - c$ che appaiono nella formula di Erone possiamo dire che, grazie al lemma 2, il loro prodotto sarà massimo quando

$$s - a = s - b = s - c,$$

ossia quando $a = b = c$. In tal caso però il triangolo in questione è equilatero e quindi la soluzione del problema isoperimetrico per i triangoli è il triangolo equilatero.

Una dimostrazione mediante i moltiplicatori di Lagrange

In questa seconda dimostrazione intendiamo massimizzare la funzione $\mathcal{A}(a, b, c)$ che fornisce l'area del triangolo di lati a, b, c mediante la formula di Erone. Per risolvere problemi di ottimizzazione possiamo utilizzare una tecnica generale, nota come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*. Dapprima definiamo la funzione

$$f(a, b, c) := \frac{\mathcal{A}^2(a, b, c)}{s} = (s - a)(s - b)(s - c).$$

Essendo a, b, c, s numeri reali positivi e \mathcal{A} una funzione positiva, massimizzare f è equivalente a massimizzare \mathcal{A} .

Grazie alla relazione $a + b + c = 2s$ possiamo definire la funzione

$$g(a, b, c) := a + b + c - 2s$$

e introdurre il vincolo³

$$g(a, b, c) = 0.$$

³In realtà andrebbero aggiunti anche i vincoli $a > 0, b > 0, c > 0$, ma siccome sul bordo di questi il triangolo diventa degenere possiamo non includerli nella lagrangiana.

A questo punto la funzione da massimizzare $f(x)$ e il vincolo $g(x)$ formano la lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(a, b, c, \lambda) &= f(a, b, c) + \lambda \cdot g(a, b, c) \\ &= (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) + \lambda(a + b + c - 2s). \end{aligned}$$

Cerchiamo ora i punti stazionari della lagrangiana rispetto alla famiglia di variabili estesa:

$$\nabla L(a, b, c, \lambda) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -(s - b)(s - c) + \lambda = 0 \\ -(s - a) \cdot (s - c) + \lambda = 0 \\ -(s - a) \cdot (s - b) + \lambda = 0 \\ a + b + c = 2s \end{cases}$$

Uguagliando il primo membro delle due prime due equazioni otteniamo

$$(s - b) \cdot (s - c) = (s - a) \cdot (s - c)$$

e, siccome $s \neq c$ (altrimenti sarebbero $a = 0$ e $b = 0$), segue subito $a = b$. Procedendo in modo analogo, dalla seconda e dalla terza equazione otteniamo $b = c$. Concludendo abbiamo ottenuto che $a = b = c$, ossia il triangolo in questione è equilatero e quindi la soluzione del problema isoperimetrico per i triangoli è il triangolo equilatero.

Osservazione: avremmo potuto scrivere il vincolo nella forma $c = 2s - a - b$ e inserirlo nella funzione originale, massimizzando questa unicamente in funzione di a, b senza vincoli.

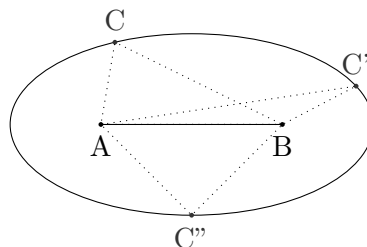
Una dimostrazione analitica mediante semplificazione geometrica

In questa ultima dimostrazione sfrutteremo un'osservazione geometrica che permetterà di ridurre il numero di variabili e risolvere il problema isoperimetrico per i triangoli come problema a variabile singola.

Vogliamo trovare il triangolo ABC di area massima e perimetro fisso p . Fissato il lato AB , notiamo che l'insieme di tutti i punti C per i quali il triangolo ABC ha perimetro p è l'insieme di tutti i punti C che soddisfano l'equazione

$$\overline{CA} + \overline{CB} = p - \overline{AB}.$$

che è l'equazione di un'ellisse di fuochi A e B e asse maggiore $p - \overline{AB}$.



Siccome l'area del triangolo ABC dipende solo all'altezza del punto C è evidente⁴ che il triangolo di area massima si otterrà quando C è sull'asse del segmento AB , ossia quando ABC è isoscele. Questo

⁴Si può dimostrare mediante la disequazione triangolare o per simmetria.

ci permette di ridurre il problema a una sola incognita: se denotiamo con a la base del triangolo isoscele avremo poi

$$b = c = \frac{p - a}{2} = s - \frac{a}{2}.$$

A questo punto la formula di Erone diventa

$$\mathcal{A}(a, b, c) = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}.$$

Come fatto nella dimostrazione con i moltiplicatori di Lagrange, invece di massimizzare la funzione \mathcal{A} ne massimizziamo una che ha gli stessi estremi ma è più semplice da trattare. Sia

$$f(a) := \frac{4\mathcal{A}^2(a, b, c)}{s} = (s - a) \cdot a \cdot a.$$

Possiamo dunque cercare i punti stazionari di f calcolando la derivata e uguagliandola a zero:

$$f'(a) = -a^2 + (s - a) \cdot 2a = -a \cdot (3a - 2s) \stackrel{!}{=} 0.$$

Siccome $a = 0$ implicherebbe un triangolo degenere non resta che $a = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$ come soluzione, il che implica a sua volta

$$b = c = s - \frac{a}{2} = s - \frac{s}{3} = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}.$$

Concludendo abbiamo ottenuto che $a = b = c$, ossia il triangolo in questione è equilatero e quindi la soluzione del problema isoperimetrico per i triangoli è il triangolo equilatero.

Osservazione 1. È un esercizio lasciato al lettore verificare che il punto stazionario trovato è effettivamente un massimo.

CMSI

Il secondo numero della collana iQuaderni della CMSI

Il secondo numero della collana iQuaderni della CMSI

La Commissione di Matematica della Svizzera Italiana CMSI propone un nuovo numero della collana *iQuaderni*, pensata in particolare per le scuole medie superiori.

Sulle tracce di Fibonacci e dei “suoi” numeri è il frutto di un’ appassionata ricerca svolta da Claudio Marsan, già docente di matematica e di informatica nel liceo di Mendrisio.

Nel primo capitolo una rigorosa indagine — sembra di leggere un giallo — permette di districarsi tra falsità e verità per arrivare a capire chi è Fibonacci, questo misterioso matematico del XIII secolo dai numerosi appellativi. Si presentano in modo esauriente e accattivante le sue opere, fornendo i riferimenti che permettono di accedere ai testi e di inquadrarli nell’epoca; si forniscono gli elementi per capire il lungo periodo di oblio e la riscoperta del suo trattato più importante, il *Liber abaci*, e delle altre opere. Nel secondo capitolo compaiono i “suoi” numeri, introdotti non solo dal problema della riproduzione dei conigli, e si capirà perché “suoi” è racchiuso tra virgolette; infine è presentata una scelta di proprietà interessanti inerenti alla successione di Fibonacci.

Il terzo capitolo è dedicato alla (ri)scoperta dei numeri di Fibonacci attraverso citazioni originali tratte da opere di grandi matematici del passato.

Nel quarto capitolo si studia il legame tra i numeri di Fibonacci e la sezione aurea, con una scelta di applicazioni alla geometria, alla trigonometria e alle frazioni continue.

La ricchissima bibliografia e la possibilità di accedere ai testi originali grazie ai collegamenti con le biblioteche digitali permettono di individuare numerosi spunti interessanti per l’insegnamento.

Sul sito <https://www.vsmf.ch/cmsi/pubblicazioni.php> se ne possono leggere l’introduzione e l’indice.

Il quaderno comprende circa 140 pagine A4; può essere ottenuto comunicando il proprio recapito a cmsi@ikmail.com e versando franchi 15.- (spese di spedizione comprese) per via elettronica sul conto della Banca Raiffeisen di Giubiasco per la *Comm. di matematica Svizzera Italiana*, 6513 Monte Carasso, IBAN CH94 8034 4000 0021 2612 4.

iQuaderni della CMSI

2

Claudio Marsan

**Sulle tracce di Fibonacci
e dei “suoi” numeri**

Neugründung: EducaTec-Systems GmbH

Mehr Support, Training & Services für Messtechniksysteme in Schullaboren

Die EducaTec-Systems GmbH wurde von Vance Carter, Oliver Gallus und Patrick Koch als Schwesterfirma der EducaTec AG gegründet, um Schullaboren in der Schweiz und Liechtenstein noch gezieltere Dienstleistungen wie Support, Training und andere Services für Vernier Science Education sowie andere Messtechniksysteme anzubieten.

Seit Februar 2024 hat EducaTec-Systems GmbH die Produktlinien Vernier und Ohaus von der EducaTec AG übernommen und führt sie weiter. Sarah Carter hat die EducaTec AG übernommen und wird die übrigen Produkte weiterentwickeln. Beide Unternehmen werden weiterhin zusammenarbeiten.

Oliver Gallus und Vance Carter sind erfahrene Elektroingenieure, wobei Herr Gallus zusätzlich einen PhD in Physik hat. Patrick Koch übernimmt die Geschäftsleitung.

Unsere langjährige Erfahrung in diesem Bereich ermöglicht es uns, Sie kompetent zu beraten. Unsere Mission ist es, Ihnen die notwendigen Werkzeuge an die Hand zu geben, um die wissenschaftliche Neugier bei den Studierenden zu wecken.

Wir bieten Service und Training vor Ort nach Bedarf. Reparaturen, Garantiewerke und Support versuchen wir, so weit wie möglich alles in der Schweiz vorzunehmen.



Von links:
Oliver Gallus
Patrick Koch
Vance Carter

Vernier Graphical Analysis® Pro

In Echtzeit wissenschaftliche Daten sammeln, graphisch aufbereiten und analysieren

Vernier Graphical Analysis® Pro unterstützt Schüler:innen, die Zusammenhänge zwischen abstrakten wissenschaftlichen Konzepten und der physischen Welt zu verstehen.

Die Software ist mit praktisch allen Vernier-Sensoren kompatibel, inklusive der kabellosen Bluetooth-Sensoren. Die Pro-Version ist als 1- oder 3-Jahres-Standortlizenz erhältlich. Vernier bietet auch eine kostenlose Version an.



Oliver Gallus
Physiklehrer und Vernier-Spezialist
oliver.gallus@educatec-systems.ch

Der Vergleich mit Logger Pro 3

Logger Pro 3 ist punkto Datenanalyse eine bewährte All-in-one-Lösung. Sie beinhaltet bspw. Spektrometrie-Funktionen, die in Graphical Analysis nur separat verfügbar sind. Im Gegensatz zu Graphical Analysis ist Logger Pro jedoch nicht mit den kabellosen Go-Direct-Sensoren kompatibel.

Übersicht der neusten Analyse-Tools von Vernier

- Vernier Graphical Analysis® Pro oder Basic
- Vernier Video Analysis
- Vernier Spectral Analysis® (kostenlos)
- Vernier Instrumental Analysis® (kostenlos)

Da Logger Pro 3 künftig noch gepflegt, aber nicht weiterentwickelt wird, empfehlen wir mittelfristig den Umstieg auf Vernier Graphical Analysis®:

«Vernier Graphical Analysis ist einfacher in der Handhabung und intuitiver. Zudem unterstützt die App alle wichtigen Betriebssysteme und ist gut ausgerüstet fürs BYOD. Die Templates zu den Experiment-Büchern sind teilweise schon vorhanden und werden laufend hinzugefügt.»

EducaTec-Systems GmbH

Telefon +41 31 511 87 40
info@educatec-systems.ch
www.educatec-systems.ch

Business Office

Grossächerstrasse 2
8966 Oberwil-Lieli

Service Center

Bahnhof 1
3313 Büren zum Hof

Bulletin N° 156

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
 Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
 8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
 Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
 5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@vsmp.ch
 Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
 8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
 halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
 über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
 VSG – SSPES – SSISS
 Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
 Monbijoustrasse 36
 3011 Bern
 Tel. 031 382 52 33
 information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnées:

Franz Meier franz.meier@vsmp.ch
 Werner-Kälin-Str. 1 Tel. 041 210 25 58
 8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
 erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Josef Züger praesident@vsmp.ch
 Via Salens Tel. 081 641 10 94
 7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Andrea Peter praesidium@dmk.vsmsp.ch
 Kantonsschule Sursee
 Moosgasse 11
 6210 Sursee

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@vsmp.ch
 Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
 Pestalozzistrasse 17
 3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Sylvie Luisier sylvie.luisier@vsmp.ch
 39, ch. des Sellières Tél. 078 689 34 11
 1219 Aïre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@vsmp.ch
 Malvand 13 Tél. 079 796 69 95
 1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob guido.lob@vsmp.ch
 Via Borghese 14 Tel. 078 663 13 37
 6600 Locarno

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 157 30.11.2024 (Ende Januar)
 Nr. 158 31.03.2025 (Ende Mai)
 Nr. 159 31.07.2025 (Ende September)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
 Letzistrasse 37
 9015 St. Gallen
 www.niedermanndruck.ch

Internet:

www.vsmsp.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica