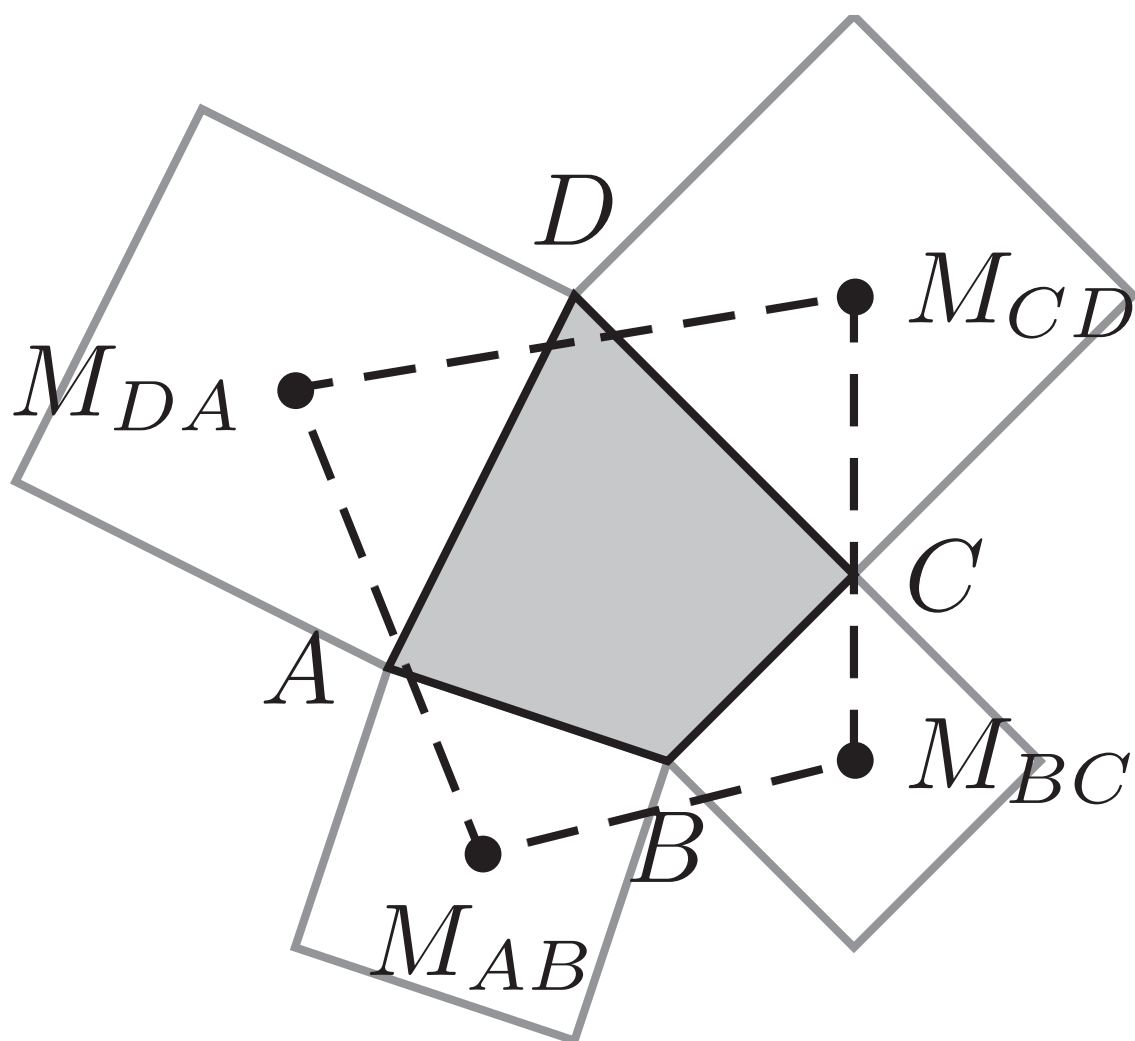


V S M P
S S P M P
S S I M F

Bulletin

Januar 2019 — Janvier 2019 — Gennaio 2019

N° 139



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica

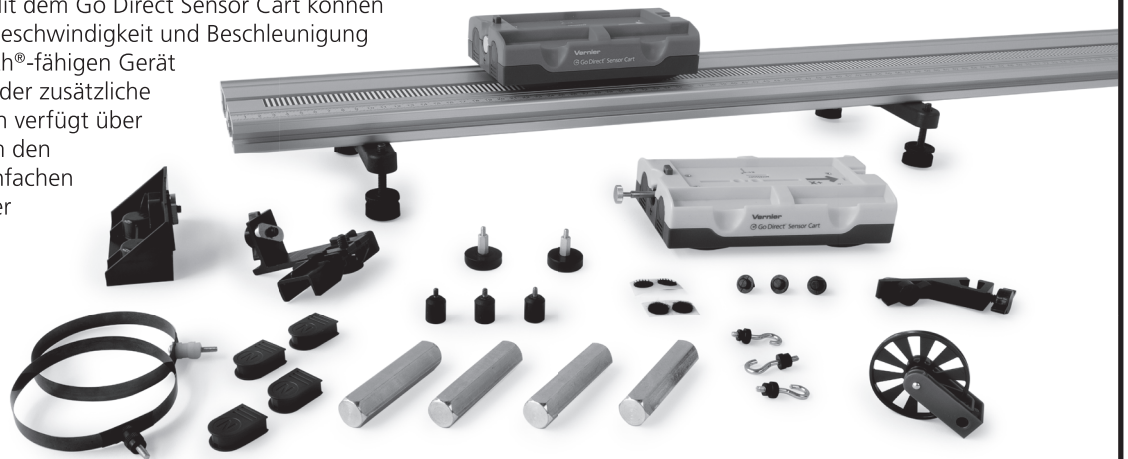
DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

educatec.ch/vernier/

Go Direct® Dynamics Cart and Track System

Das Dynamics Cart und Track System mit dem Go Direct Sensor Cart beinhaltet wesentliche Laborgeräte für die **Dynamik- und Kinematiklehre**. Mit dem Go Direct Sensor Cart können Schüler Kraft, Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung direkt auf ihrem Bluetooth®-fähigen Gerät erkunden - ohne Kabel oder zusätzliche Ausrüstung. Jeder Wagen verfügt über eingebaute Sensoren, um den Versuchsaufbau zu vereinfachen und Experimente auf oder neben der Strecke zu ermöglichen.

Artikel-Nr. DTS-GDX



► **Positionsauflösung:** 0,25 mm, standardmässig in Schritten von 1 mm angegeben

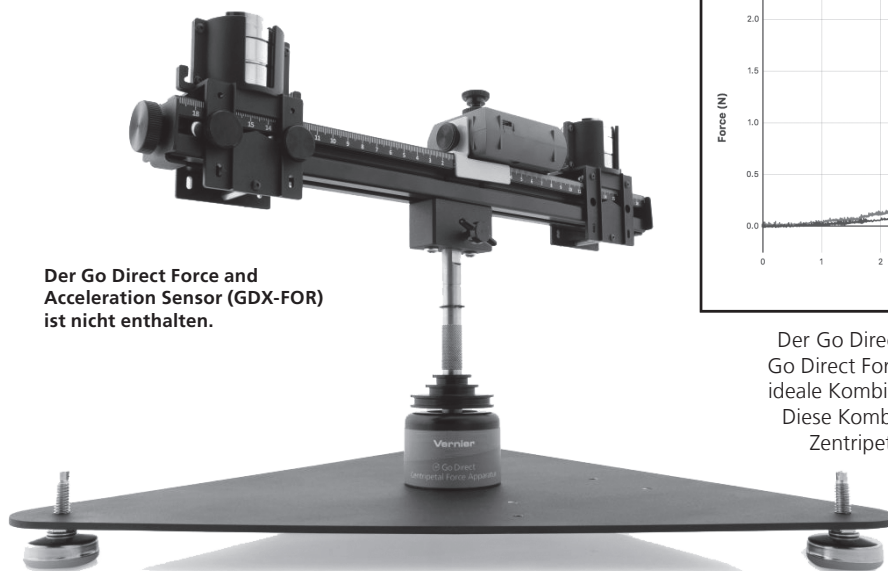
► **Beschleunigungsmessbereich:** $\pm 160 \text{ m/s}^2$

► **Kraftbereich:** $\pm 50 \text{ N}$

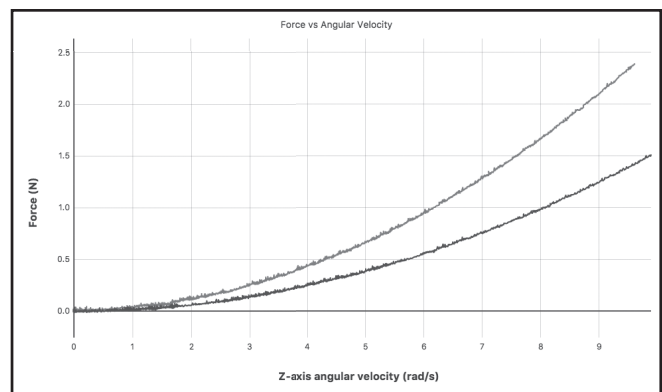
► **Streckenlänge:** 1,2 m

Go Direct® Centripetal Force Apparatus

Artikel-Nr. GDX-CFA



Der Go Direct Force and Acceleration Sensor (GDX-FOR) ist nicht enthalten.



Der Go Direct Centripetal Force Apparatus (GDX-CFA) und der Go Direct Force and Acceleration Sensor (GDX-FOR) bilden eine ideale Kombination zur Untersuchung der **Rotationsdynamik**.

Diese Kombination misst mühelos die Winkelgeschwindigkeit, Zentripetalkraft und -beschleunigung ohne Drahtaufwand.

Erkunden Sie beispielsweise Newtons zweites Gesetz, die Winkelbeschleunigung und das Trägheitsmoment, wenn es um Kreisbewegungen geht.

Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter www.educatec.ch
Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an contact@educatec.ch

 Go Direct™

EducaTec AG
Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch



In dieser Ausgabe — Dans ce numéro

VSMP – SSPMP – SSIMF	3
Arno Gropengiesser Rapport Annuel 2017/18 de la SSPMP	3
Formations des enseignant-e-s d’informatiques, discipline fondamentale – Ausbildung der Lehrpersonen für das obligatorische Fach Informatik – Formazione delli insegnanti della disciplina fondamentale Informatica	5
Commission Romande de Mathématique	8
Alexandre Junod Géométrie et nombres complexes	8
Maxime Zuber La droite des moindres carrés par l’algèbre élémentaire	12
Yves Roisin <i>Recension: 90 petits génies de mathématiques</i>	17
Commission Romande de Physique	22
Markus Meier, Barbara Roos Expérience sur le frottement d’une corde	22
Jean-Jacques Rochat Usage de simulateurs informatisés PHET	26
Deutschschweizerische Mathematikkommission	34
Peter Gallin Fixpunktfreie Permutationen – Aller guten Dinge sind drei	34
H.R. Schneebeli <i>Buchrezension: Der Würfel, Ansichten, Dimensionen, Modelle</i>	35
Nina Stumpf, Ondrej Budac, Marek Tesar Naboj – Mathematikteamwettbewerb für Gymnasiasten	36
Linus Romer Approximation von Funktionsgraphen mit kubischen Bézierkurven	40
Hans Walser IMO, Parität, Gleichdick und Archimedische Spirale	46
Monika Krichel goMath Ausstellung und Workshops für Schulklassen	48
<i>Kurs: Weiterbildung zum Thema Kettenbrüche</i>	50
<i>Kurs: Online-Aufgaben, Hausaufgaben und Tests mit Maple T.A.</i>	51

Deutschschweizerische Physikkommission	53
Martin Lieberherr Anti-hookesche Federn	53
Rolf Strassfeld Drehmomente beim konischen Doppelpendel	55
Markus Meier, Barbara Roos Experiment Seilreibung	59

Internet-Adressen — *Adresses Internet*
www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*
Carrés construits sur les cotés d'un quadrilatère (article dès page 8 dans ce numéro)

Rapport annuel 2017/18 de la SSPMP

Lors de l'année écoulée (novembre 2017 – octobre 2018), le comité de la SSPMP s'est réuni, en plus de l'AG du 24 novembre à Zoug, à trois reprises : le 24 janvier 2018 à Zürich et le 16 mai à Berne pour une séance d'un après-midi, et les 1 et 2 septembre à Obergesteln pour le traditionnel et toujours attendu week-end. Trois membres de la SSPMP, Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann et Hansjürg Stocker, ont de plus participé à un groupe de travail en collaboration avec la SSIE (Société suisse pour l'informatique dans l'enseignement) afin de rédiger une prise de position commune concernant la « Formation des enseignant-e-s d'informatique, discipline fondamentale ». Cette prise de position a été publiée et diffusée auprès d'un large public début octobre et a rencontré un écho important.

La SSPMP a participé, en collaboration avec d'autres organisations, à l'organisation du congrès national « scientiæ & robotica » qui s'est tenu du 5 au 8 septembre dans les bâtiments de l'EPFL à Lausanne. Le comité d'organisation s'est réuni les 18 octobre, 1er décembre 2017, 17 janvier, 21 février, 26 mars, 20 avril, 23 mai, 20 juin, 23 août et le 9 novembre 2018. La SSPMP était représentée par Arno Gropengiesser, Franz Meier, Didier Roulet, Hansjürg Stocker et Patrick Turtschy.

Les cinq commissions constituant la SSPMP (CMSI, DMK, CRM, DPK, CRP) ont organisé, en plus du congrès national, des cours de formation continue, ainsi que des concours destinés aux étudiant-e-s. Ces activités ont été complétées par la rédaction de nombreux articles concernant les mathématiques ou la physique, publiés dans notre bulletin, qui paraît trois fois l'an (janvier, mai et septembre).

Composition du comité

Les collègues suivants (commission représentée et fonction dans le comité) ont fait partie du comité de la SSPMP pendant cette année : Samuel Byland (DPK; Webmaster et Redaktor des Bulletins), Stéphane Davet (président de la CRP), Daniela Grawehr (DMK-Präsidentin), Arno Gropengiesser (CMSI; présidente), Tatiana Mantuano (présidente de la CRM), Franz Meier (DMK; Sekretär), Andrea Pellegrinelli (CMSI), Yves Roisin (CRM; caissier), Didier Roulet (CRP), Luca Rovelli (présidente della CMSI), Hansjürg Stocker (DMK; Vizepräsident), Christian Stulz (DPK-Präsident), Patrick Turtschy (CRM; vice-président), Stefan Walser (DPK; Inserate-Verwalter).

Mutations

- Après plusieurs années à la présidence de la DMK et un important engagement au sein de notre comité, Daniela Grawehr réoriente son parcours professionnel et quitte le comité. Elle est remplacée par Josef Züger, nouveau président de la DMK.
- Lors de l'année écoulée, notre société a enregistré 28 démissions et 23 nouvelles adhésions, ce qui entraîne une baisse de 5 unités du total de ses membres. Au 31 décembre 2017, la SSPMP comptait 555 membres. Les actions menées pour accroître le nombre de membres n'ont donc pas été suffisamment efficaces. D'autres actions, en collaboration avec la SSPES (Société Suisse des Professeurs de l'Enseignement Secondaire), sont prévues.

Projets actuels

- Depuis plusieurs années, le départ des membres retraités n'est pas compensé par l'arrivée de nouveaux membres, et ce malgré les mesures prises par la société (nouveau logo plus visible, présentation de la société lors des cours de formation continue ou dans les HEP). Un effort de recrutement est donc nécessaire. Le comité a créé un flyer destiné à appuyer une nouvelle campagne d'adhésions. Notre campagne sera coordonnée avec les actions de la SSPES ainsi qu'avec celles d'autres associations cantonales ou de branches. Nous comptons sur les cinq commissions pour que cette campagne soit un succès et nous les remercions pour le travail effectué.
- L'introduction de l'informatique comme discipline gymnasiale nous a occupé depuis 2015, quand la SSPMP et la SSIE ont constitué un groupe de travail sur le sujet. Après avoir publié une prise de position conjointe en novembre 2016, qui a retenu l'attention de nombreux milieux, il a été décidé de maintenir ce groupe de travail, afin de suivre les développements de ce thème au niveau politique. Le groupe a participé à l'audition de la CDIP du 2017 et, après la décision du 27 octobre 2017 de l'assemblée plénière de la CDIP d'introduire l'informatique comme discipline obligatoire au gymnase, le groupe a décidé de s'exprimer sur la question de la formation des nouveaux enseignant-e-s de cette discipline. Toujours sous la sensible et compétente direction d'Andrea Leu (senarclens' & SSIE), le groupe a rédigé et rendu publique une nouvelle prise de position. Ce document a été approuvé par les deux comités (SSPMP à Obergesteln et SSIE dans le courant du mois de septembre 2017). Il est téléchargeable (dans les trois langues officielles) sur notre

site (<http://www.sspmp.ch/>). Dans ce document est clairement exprimée notre conception de la formation des enseignant-e-s de gymnase, bien conscients qu'il faut trouver des solutions transitoires qui ne soient pas pénalisantes pour les actuels enseignant-e-s d'informatique.

- La SSPMP, en collaboration avec l'EPFL, la SSIE, L'Académie suisse des sciences techniques (SATW), la Commission romande de chimie (CRC), la SSPES et la Société suisse des professeurs de sciences naturelles (SSPSN), a organisé le congrès national « scientiæ & robotica » qui a eu lieu du 5 au 8 septembre dans les locaux de l'EPFL, à la grande satisfaction des 123 participants, des conférenciers et des organisateurs.
- Vous trouverez d'autres compte-rendus de projets ou cours de formation continue dans les rapports annuels des cinq commissions.

SSPES, ZEM-CES, SMS, SSP, SCNAT, EPFL et CDIP

- La relation avec la SSPES se développe surtout à travers la Conférence des présidents, qui se tiens tous les six mois (en général mi mars et mi septembre). Une rencontre annuelle des présidents a lieu en mai. Cette rencontre est une importante occasion d'échanges et de discussions. Elle est organisée par une société cantonale. Parmi les activités de la SSPES qui nous concernent directement, je rappellerais la réponse à l'audition sur le nouveau Règlement pour la reconnaissance des diplômes d'enseignement (le comité ne partage pas entièrement la position de la SSPES), et l'audition interne sur l'opportunité d'une révision de la RRM de 1995 (le comité s'est prononcé favorablement). Enfin le comité a déposé pour la SSPES et avec la SSPSN, à l'adresse de la SCNAT (Académie suisse des sciences naturelles) et de la ASSH (Académie suisse des sciences humaines et sociales), une demande de soutien financier pour une recherche sur la motivation des élèves des gymnases.
- Dans le Conseil du Centre suisse de l'enseignement secondaire II (ZEM-CES, autrefois la WBZ-CPS) est élu pour la SSPES (et indirectement pour le SSPMP et le Tessin) Arno Gropengiesser. On pourra ainsi faire part de nos exigences concernant l'organisation des cours de formation continue.
- Hansjürg Stocker reste la personne de contact avec la SCNAT. Hansjürg est également membre de « Commission pour l'encouragement de la relève ».
- Tatiana Mantuano (CRM) et Hansjürg Stocker (DMK) nous représentent comme délégués « en relation avec les gymnases » auprès de la SMS (Société Mathématique Suisse).
- Les délégués du comité à la SSP (Société Suisse de Physique) sont Samuel Byland (DPK, ev. Stefan Büchler) et Stéphane Davet (CRP).
- Le comité a envoyé une prise de position critique sur le projet « Mise à niveau » de l'EPFL. M. Vetterli, président

de l'EPFL n'a, à ce jour, pas répondu.

- La SSPMP a envoyé à la CDIP une prise de position sur l'Accord des membres de la COHEP1 (pour la reconnaissance mutuelle de l'examen complémentaire permettant l'admission à la formation en enseignement préscolaire et primaire, équivalence MSOP) : Nos remarques concernent la typologie et la longueur des examens en mathématiques et en physique qui peuvent rendre nos branches moins importantes dans la formation. La CDIP nous a confirmé avoir reçu le document et qu'elle transmettra sa position.

J'aimerais conclure avec mes plus sincères remerciements à mes collègues du comité. Leur engagement pour la physique et les mathématiques, ainsi que pour leurs enseignements, leur collaboration toujours active et constructive, au-delà des différences disciplinaires et linguistiques – et ça ne peut jamais être assez souligné – méritent grand respect et beaucoup de reconnaissance. En particulier j'aimerais remercier de tout cœur Daniela Grawehr pour son engagement passionné dans le comité de la SSPMP et comme présidente de la DMK ; Nous tous lui souhaitons beaucoup de satisfaction dans son nouveau rôle d'enseignante de didactique des mathématiques auprès de l'institut des sciences de l'éducation de l'Université de Zurich. Nous souhaitons à son successeur dans le comité, qui s'est déjà bien engagé dans les séances et qui comme grisonnais étends les régions linguistiques présentes, une bonne et enrichissante permanence au sein du comité de la SSPMP.

Locarno, moitié novembre 2018,

Arno Gropengiesser, Président de la VSMP/SSIMF/SSPMP

Formation des enseignant-e-s d'informatique, discipline fondamentale

Prise de position de la SSIE (Société suisse pour l'informatique dans l'enseignement) et de la SSPMP (Société suisse des professeurs de mathématiques et de physique)

Christian Datzko, Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann, Andrea Leu, Peter Skrotzky, Hansjürg Stocker et Martina Vazquez, représentants de la SSPMP et de la SSIE

En tant que nouvelle discipline fondamentale, l'informatique fera désormais partie intégrante de la formation gymnasiale. La Société Suisse pour l'informatique dans l'enseignement et la Société suisse des professeurs de mathématiques et de physique saluent la valorisation de l'informatique et tiennent à préciser les points suivants quant à la formation des enseignant-e-s de cette discipline:

- L'informatique doit être enseignée par des professeurs qualifiés, titulaires d'un diplôme d'enseignement de l'informatique reconnu par la CDIP.
- Concernant ces diplômes d'enseignement, des solutions transitoires sont nécessaires, vu le manque actuel de professeurs capables d'enseigner l'informatique. Ces solutions doivent également être certifiées par la CDIP et être proposées par des institutions de formation reconnues dans le domaine des diplômes d'enseignement.
- Pendant la période de transition, la formation complémentaire des professeurs souhaitant enseigner l'informatique doit être gratuite. Les dépenses occasionnées par cette formation complémentaire doivent être remboursées/compensées de manière adéquate.
- La forme et la durée des solutions transitoires doivent être flexibles. L'expérience en matière d'enseignement ainsi que les compétences disciplinaires et didactiques doivent être prises en compte. Durant la phase transitoire, l'exigence de formation complémentaire en informatique doit être significativement réduite pour les professeurs déjà en place, cela s'applique notamment aux professeurs ayant suivi avec succès la formation EFI/OCI-CH. Les enseignant-e-s d'informatique donnant l'option complémentaire et titulaires d'un diplôme d'enseignement reconnu par la CDIP dans une autre discipline gymnasiale doivent être dispensé-e-s de la formation complémentaire.
- La période transitoire doit être suffisamment longue, l'objectif de quatre ans est trop ambitieux et devrait être étendu à six ans au moins.
- Une fois les délais impartis expirés, tou-te-s les enseignant-e-s de gymnase seront soumis-es aux mêmes conditions: études dans la discipline enseignée ainsi que formation pédagogique pratique et théorique complémentaire. Cependant les professeurs ayant enseigné l'informatique pendant la phase de transition pourront continuer de l'enseigner.
- La formation disciplinaire des enseignant-e-s d'informatique doit se faire dans les hautes écoles universitaires. La formation pédagogique peut, quant à elle, être suivie aussi bien dans une université que dans une haute école pédagogique.

Ausbildung der Lehrpersonen für das obligatorische Fach Informatik

Positionspapier des SVIA (Schweizerischer Verein für Informatik in der Ausbildung) und des VSMP (Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte)

Christian Datzko, Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann, Andrea Leu, Peter Skrotzky, Hansjürg Stocker und Martina Vazquez als Vertreterinnen und Vertreter des VSMP sowie des SVIA

Informatik wird in Zukunft als obligatorisches Fach Bestandteil der gymnasialen Ausbildung sein. Der Schweizerische Verein für Informatik in der Ausbildung und der Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte begrüßen diese Aufwertung der Informatik und halten in Bezug auf die Ausbildung der Lehrpersonen für das Fach Folgendes fest:

- Informatik ist von dafür qualifizierten Lehrpersonen zu unterrichten, die über ein EDK-anerkanntes Lehrdiplom im Fach Informatik verfügen.
- Übergangslösungen für den Erwerb dieser Lehrdiplome sind notwendig, da es zurzeit nicht genügend Lehrpersonen gibt, die Informatik unterrichten können. Diese Übergangslösungen müssen ebenfalls EDK-zertifiziert sein und von etablierten Lehrdiplom-Ausbildungsinstitutionen angeboten werden.
- Während der Übergangszeit muss die Zusatzausbildung für Lehrpersonen, die Informatik unterrichten wollen, kostenlos sein. Die durch diese zusätzliche Schulung entstandenen Kosten sind angemessen zu erstatten/auszugleichen.
- Form und Dauer von Übergangslösungen müssen flexibel sein und bisherige Unterrichtserfahrungen sowie fachliche und didaktische Fähigkeiten berücksichtigen. Während der Übergangsphase müssen die Anforderungen an eine zusätzliche Ausbildung in Informatik für bereits aktive Lehrkräfte deutlich reduziert werden. Dies gilt insbesondere für Lehrkräfte, die eine "EFI/OCI-CH"-Ausbildung erfolgreich abgeschlossen haben. Informatiklehrkräfte, die das Ergänzungsfach unterrichten und ein von der EDK anerkanntes Lehrdiplom in einem anderen gymnasialen Unterrichtsfach besitzen, sind gänzlich von einer Zusatzausbildung zu dispensieren.
- Übergangsfristen müssen genügend lang bemessen werden, die Vorgabe von vier Jahren ist höchst ambitioniert und muss auf mindestens sechs Jahre verlängert werden.
- Nach Ablauf der Übergangsfristen gelten die für Lehrpersonen an Gymnasien üblichen Bestimmungen: fachwissenschaftliches Studium und eine zusätzliche praktische und theoretische pädagogische Ausbildung. Lehrpersonen, die während dieser Übergangsphase Informatik unterrichtet haben, können jedoch weiterhin unterrichten.
- Die Ausbildung von Informatik-Lehrpersonen muss inhaltlich an universitären Hochschulen erfolgen, die pädagogische Ausbildung kann sowohl an universitären als auch an pädagogischen Hochschulen absolviert werden.

Formazione degli insegnanti della disciplina fondamentale Informatica

Presenza di posizione della SSII (Società svizzera per l'informatica nell'insegnamento) e della SSIMF (Società svizzera degli insegnanti di matematica e di fisica)

Christian Datzko, Arno Gropengiesser, Jean-Marc Ledermann, Andrea Leu, Peter Skrotzky, Hansjürg Stocker e Martina Vazquez, rappresentanti della SSIMF e della SSII

L'informatica diventerà a breve parte integrante della formazione liceale come disciplina fondamentale. La Società svizzera per l'informatica nell'insegnamento e la Società svizzera degli insegnanti di matematica e di fisica salutano la valorizzazione dell'informatica e, in merito alla formazione degli insegnanti di questa disciplina, precisano quanto segue:

- L'informatica deve essere insegnata da docenti qualificati, in possesso di un diploma d'insegnamento dell'informatica riconosciuto dalla CDPE.
- È necessario prevedere soluzioni transitorie, data la carenza attuale di docenti con tutti i requisiti formali per insegnare l'informatica. Tali soluzioni devono comprendere la certificazione da parte della CDPE ed essere proposte da istituti di formazione riconosciuti in tale ambito.
- Durante il periodo di transizione, la formazione complementare per i docenti che insegnano l'informatica deve essere gratuita e gli oneri causati da tale formazione complementare devono essere rimborsati/compensati in maniera adeguata.
- Forma e durata delle soluzioni transitorie devono essere flessibili: la comprovata esperienza nell'ambito dell'insegnamento, con le competenze disciplinari e didattiche acquisite, deve essere presa debitamente in considerazione. Durante la fase di transizione le esigenze di formazione complementare in informatica devono essere significativamente ridotte per i docenti che già insegnano la disciplina. Ciò si applica in particolare ai docenti che hanno concluso con successo la formazione EFI/OCI-CH. I docenti d'informatica che insegnano l'Opzione complementare e che posseggono un diploma d'insegnamento riconosciuto dalla CDPE in un'altra disciplina liceale devono essere dispensati da tale formazione complementare.
- Le soluzioni transitorie devono prevedere tempi sufficientemente lunghi. L'obiettivo dei quattro anni è alquanto ambizioso e deve essere adattato ad almeno sei anni.
- Allo scadere del periodo di transizione, tutti gli insegnanti dovranno ottemperare alle disposizioni vigenti per le scuole di maturità liceale: titolo di studio nella disciplina insegnata e formazione pedagogica supplementare, pratica e teorica. I docenti che hanno insegnato l'informatica durante il periodo di transizione potranno però continuare ad insegnarla.
- La formazione disciplinare degli insegnanti d'informatica deve avvenire presso un'università o un politecnico; quella pedagogica può essere svolta presso un'università o un politecnico oppure presso un'alta scuola pedagogica.

Géométrie et nombres complexes

Alexandre Junod, Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), alexandre.junod@rpn.ch

1. Problématique

Dans le plan, un point $P(x; y)$ peut être associé à un nombre complexe $z_P = x + yi$ (appelé *affiche* de P) et les transformations géométriques élémentaires (translations, homothéties, rotations, symétries centrales et axiales) peuvent être décrites simplement par des fonctions complexes. Les nombres complexes fournissent ainsi un bel outil algébrique pour démontrer des résultats de nature géométrique. Ceux que nous démontrons ici ont pour point commun la construction de triangles équilatéraux ou de carrés sur chacun des côtés d'un triangle ou d'un quadrilatère.

2. Carrés construits sur les côtés d'un quadrilatère

On construit un carré externe sur chacun des côtés d'un quadrilatère et on considère le quadrilatère formé par les centres de ces carrés (voir fig.1) :

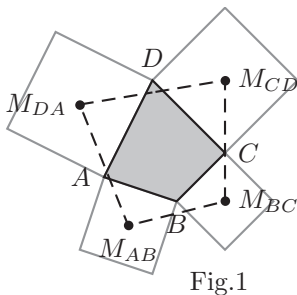


Fig.1

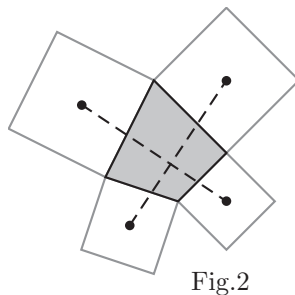


Fig.2

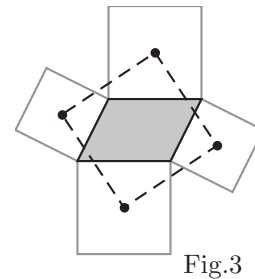
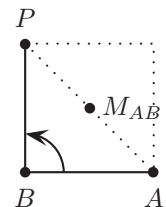


Fig.3

Nous allons montrer que les diagonales du quadrilatère construit ont la même longueur et se coupent à angle droit (*théorème de Van Aubel*¹, fig.2). De plus, le quadrilatère construit est un carré si, et seulement si le quadrilatère initial est un parallélogramme (*théorème de Thébault*², fig.3). Ces résultats sont encore valables pour des quadrilatères non convexes ou si on construit des carrés internes mais ces cas sont difficiles à illustrer car les carrés se chevauchent.

Une rotation de 90° autour de l'origine revient à multiplier un nombre complexe par i . Ainsi, si on fait tourner de 90° un point A autour d'un point B , on obtient le point P d'affixe $z_P = (z_A - z_B)i + z_B$. Le milieu M_{AB} du segment AP admet pour affixe la moyenne de z_A et z_P :

$$z_{M_{AB}} = \frac{1}{2}(z_A + z_B + (z_A - z_B)i) = \frac{1}{2}((1+i)z_A + (1-i)z_B).$$



On considère un quadrilatère dont les sommets A, B, C et D sont notés dans le sens positif. Les centres des carrés externes construits sur les côtés sont alors M_{AB}, M_{BC}, M_{CD} et M_{DA} (fig.1).

1. Henricus Hubertus van Aubel (1830-1906), mathématicien néerlandais, professeur à Anvers.

2. Victor Thébault (1882-1960), mathématicien français, surtout connu pour ses trois problèmes de géométrie.

Théorème. Les segments $M_{AB}M_{CD}$ et $M_{BC}M_{DA}$ sont perpendiculaires et ont la même longueur (Van Aubel). Ils ont de plus le même milieu si, et seulement si le quadrilatère initial est un parallélogramme (Thébault).

Preuve. Le vecteur $\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}}$ correspond au nombre complexe

$$z_{CD} - z_{AB} = \frac{1}{2}((1+i)(z_C - z_A) + (1-i)(z_D - z_B))$$

et une rotation de 90° donne

$$\begin{aligned} (z_{CD} - z_{AB})i &= \frac{1}{2}((i-1)(z_C - z_A) + (i+1)(z_D - z_B)) \\ &= \frac{1}{2}((1+i)(z_D - z_B) + (1-i)(z_A - z_C)) = z_{DA} - z_{BC}, \end{aligned}$$

ce qui correspond au vecteur $\overrightarrow{M_{BC}M_{DA}}$. Démontrons maintenant la deuxième assertion. Les segments considérés ont des milieux d'affixes respectifs

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}(z_{AB} + z_{CD}) = \frac{1}{4}((1+i)(z_A + z_C) + (1-i)(z_B + z_D)) \\ &= \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D + i(z_A - z_B + z_C - z_D)) \end{aligned}$$

et $z_2 = \frac{1}{4}(z_B + z_C + z_D + z_A + i(z_B - z_C + z_D - z_A))$ par permutation circulaire (de A, B, C et D). On a alors les équivalences $z_1 = z_2$, $z_A - z_B + z_C - z_D = 0$, $z_A - z_B = z_D - z_C$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, le quadrilatère initial est un parallélogramme. \square

Remarque. Pour démontrer l'analogie en construisant des carrés internes, il suffit de noter les sommets du quadrilatère dans le sens négatif.

3. Triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle

Nous voulons démontrer le *théorème de Napoléon*³ : sur chacun des côtés d'un triangle, on construit un triangle équilatéral externe; les centres de gravité des triangles construits forment alors un triangle équilatéral (voir le schéma ci-contre). Ceci reste valable si on construit des triangles internes. Nous utilisons la notation $\text{cis}(\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$.

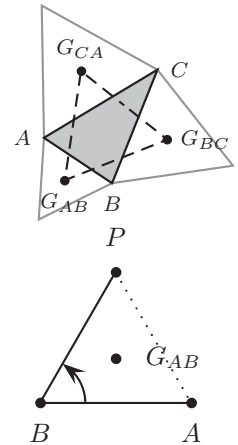
Si on fait tourner de 60° un point A autour d'un point B , on obtient le point P d'affixe $z_P = (z_A - z_B) \text{cis}(60^\circ) + z_B$. Comme $1 - \text{cis}(60^\circ) = \text{cis}(-60^\circ)$, on peut aussi écrire $z_P = z_A \text{cis}(60^\circ) + z_B \text{cis}(-60^\circ)$. Le centre de gravité G_{AB} du triangle ABP admet ainsi l'affixe

$$z_{AB} = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_P) = \frac{1}{3}((1 + \text{cis}(60^\circ))z_A + (1 + \text{cis}(-60^\circ))z_B).$$

Comme $1 + \text{cis}(60^\circ) = \sqrt{3} \text{cis}(30^\circ)$ (et $1 + \text{cis}(-60^\circ) = \sqrt{3} \text{cis}(-30^\circ)$ par conjugaison), on a

$$z_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\text{cis}(30^\circ)z_A + \text{cis}(-30^\circ)z_B).$$

On considère un triangle dont les sommets A, B et C sont notés dans le sens positif (resp. négatif). Les centres des triangles équilatéraux externes (resp. internes) construits sur les côtés sont alors G_{AB} , G_{BC} et G_{CA} .



3. L'énoncé apparaît pour la première fois quatre ans après la mort de Napoléon (1769-1821) mais un mathématicien italien a prétendu en 1911 que l'empereur aurait posé le problème à Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Théorème de Napoléon. Le triangle $G_{AB}G_{BC}G_{CA}$ est équilatéral.

Preuve. Le vecteur $\overrightarrow{G_{AB}G_{BC}}$ correspond au nombre complexe

$$z_{BC} - z_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\operatorname{cis}(30^\circ)(z_B - z_A) + \operatorname{cis}(-30^\circ)(z_C - z_B))$$

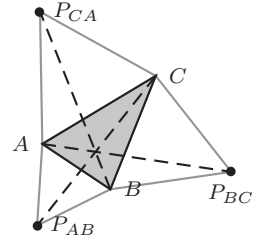
et une rotation de 60° donne $(z_{BC} - z_{AB}) \operatorname{cis}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} (i(z_B - z_A) + \operatorname{cis}(30^\circ)(z_C - z_B))$. En remplaçant i par $\operatorname{cis}(30^\circ) - \operatorname{cis}(-30^\circ)$, on obtient

$$(z_{BC} - z_{AB}) \operatorname{cis}(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\operatorname{cis}(30^\circ)(z_C - z_A) + \operatorname{cis}(-30^\circ)(z_A - z_B)) = z_{CA} - z_{AB}$$

ce qui correspond au vecteur $\overrightarrow{G_{AB}G_{CA}}$. \square

4. Point de Torricelli

Dans le contexte précédent, nous pourrions montrer que les droites AG_{BC} , BG_{CA} et CG_{AB} se coupent en un point (appelé *point de Napoléon*) mais nous préférons démontrer que les segments en traitillés dans le schéma ci-contre ont la même longueur et sont supportés par des droites concourantes qui forment des angles de 60° . De plus, nous donnerons une interprétation concrète de leur point d'intersection lorsque le triangle initial n'admet aucun angle supérieur à 120° .



On note P_{AB} le point d'affixe $z_{P(AB)} = z_A \operatorname{cis}(60^\circ) + z_B \operatorname{cis}(-60^\circ)$ comme déjà vu et on définit de manière analogue P_{BC} ainsi que P_{CA} .

Théorème. Les segments AP_{BC} , BP_{CA} et CP_{AB} ont la même longueur et sont supportés par des droites concourantes qui forment un angle de 60° les unes avec les autres.

Preuve. Si on fait tourner le vecteur $\overrightarrow{AP_{BC}}$ de 120° , on obtient le vecteur $\overrightarrow{BP_{CA}}$ car le nombre complexe résultant est

$$\begin{aligned} z &= (z_{P(BC)} - z_A) \operatorname{cis}(120^\circ) = (z_B \operatorname{cis}(60^\circ) + z_C \operatorname{cis}(-60^\circ) - z_A) \operatorname{cis}(120^\circ) \\ &= -z_B + z_C \operatorname{cis}(60^\circ) - z_A \underbrace{\operatorname{cis}(120^\circ)}_{=-\operatorname{cis}(-60^\circ)} = z_C \operatorname{cis}(60^\circ) + z_A \operatorname{cis}(-60^\circ) - z_B \\ &= z_{P(CA)} - z_B \end{aligned}$$

De manière analogue, en faisant tourner le vecteur $\overrightarrow{BP_{CA}}$ de 120° , on obtient le vecteur $\overrightarrow{CP_{AB}}$. Montrons maintenant que les trois droites sont concourantes. Soit I le point d'intersection des droites AP_{BC} et BP_{CA} . Il existe alors des nombres réels λ et μ tels que $z_I = z_A + \lambda(z_{P(BC)} - z_A)$ et $z_I = z_B + \mu(z_{P(CA)} - z_B)$. Multiplions la première relation par $\operatorname{cis}(60^\circ)$, la seconde par $\operatorname{cis}(-60^\circ)$ et ajoutons les deux résultats :

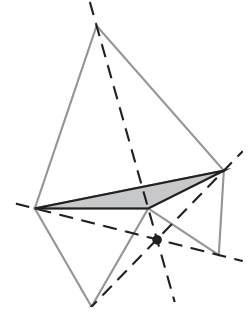
$$z_I = z_A \operatorname{cis}(60^\circ) + \lambda(z_{P(BC)} - z_A) \operatorname{cis}(60^\circ) + z_B \operatorname{cis}(-60^\circ) + \mu(z_{P(CA)} - z_B) \operatorname{cis}(-60^\circ).$$

Comme $(z_{P(BC)} - z_A) \operatorname{cis}(60^\circ)$ et $(z_{P(CA)} - z_B) \operatorname{cis}(-60^\circ)$ sont égaux à $z_C - z_{P(AB)}$, on obtient

$$\begin{aligned} z_I &= z_A \operatorname{cis}(60^\circ) + z_B \operatorname{cis}(-60^\circ) + (\lambda + \mu)(z_C - z_{P(AB)}) \\ &= z_{P(AB)} + (\lambda + \mu)(z_C - z_{P(AB)}), \end{aligned}$$

ce qui montre que le point I se trouve aussi sur la droite CP_{AB} . \square

Le point d'intersection des droites AP_{BC} , BP_{CA} et CP_{AB} est appelé *point de Torricelli*⁴(ou de Fermat⁵). Lorsque tous les angles du triangle initial sont inférieurs à 120° , il s'agit du point situé à l'intérieur du triangle à partir duquel on voit chaque arête sous un angle de 120° . Si le triangle initial présente un angle de 120° , le point de Torricelli est le sommet associé à cet angle. Si un angle est supérieur à 120° , le point de Torricelli se trouve à l'extérieur du triangle initial comme illustré ci-contre.



Théorème. Si aucun angle du triangle initial n'excède 120° , le point de Torricelli minimise l'expression $f(P) = \|\vec{PA}\| + \|\vec{PB}\| + \|\vec{PC}\|$.

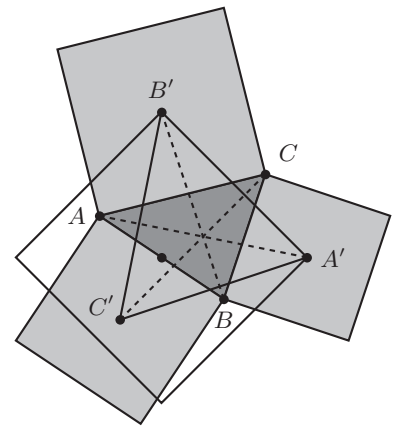
Preuve. On note T le point de Torricelli du triangle ABC , $a = \|\vec{TA}\| = |z_A - z_T|$, $b = \|\vec{TB}\| = |z_B - z_T|$, $c = \|\vec{TC}\| = |z_C - z_T|$, $\varphi = \arg(z_A - z_T)$ et $j = \text{cis}(120^\circ)$. Si aucun angle n'excède 120° , alors $z_A - z_T = a \cdot \text{cis}(\varphi)$, $z_B - z_T = b \cdot \text{cis}(\varphi)j$ et $z_C - z_T = c \cdot \text{cis}(\varphi)j^2$, donc

$$\begin{aligned} (a + b + c) \text{cis}(\varphi) &= (z_A - z_T) + (z_B - z_T)j^2 + (z_C - z_T)j \\ &= (z_A + z_B j^2 + z_C j) - z_T(1 + j + j^2). \end{aligned}$$

Comme $1 + j + j^2 = 0$, on peut remplacer z_T par n'importe quel nombre complexe z , donc $(a + b + c) \text{cis}(\varphi) = (z_A - z) + (z_B - z)j^2 + (z_C - z)j$. En considérant le module et en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient $a + b + c \leq |z_A - z| + |z_B - z| + |z_C - z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. \square

5. Carrés construits sur les côtés d'un triangle

On note $A' = M_{BC}$, $B' = M_{CA}$ et $C' = M_{AB}$ les centres des carrés externes construits sur les côtés d'un triangle ABC (voir formule §2). Le lecteur intéressé peut démontrer que $M_{B'A'}$ est le milieu du segment AB (*théorème de Neuberg*⁶) et que les segments AA' et $B'C'$ sont perpendiculaires et ont la même longueur. On en déduit que la droite AA' est une hauteur du triangle $A'B'C'$ et que les trois droites AA' , BB' et CC' se coupent en un point (appelé *point de Vecten*⁷).



4. Evangelista Torricelli (1608-1647), physicien et mathématicien italien, inventeur du baromètre.

5. Pierre de Fermat (?-1665), magistrat et mathématicien français.

6. Joseph Jean Baptiste Neuberg (1840-1926), mathématicien luxembourgeois qui prit la nationalité belge.

7. mathématicien peu connu dont on sait juste qu'il a enseigné au lycée de Nîmes dans les années 1810-1818.

La droite des moindres carrés par l’algèbre élémentaire

Maxime Zuber, Haute École Pédagogique BEJUNE, maxime.zuber@hep-bejune.ch

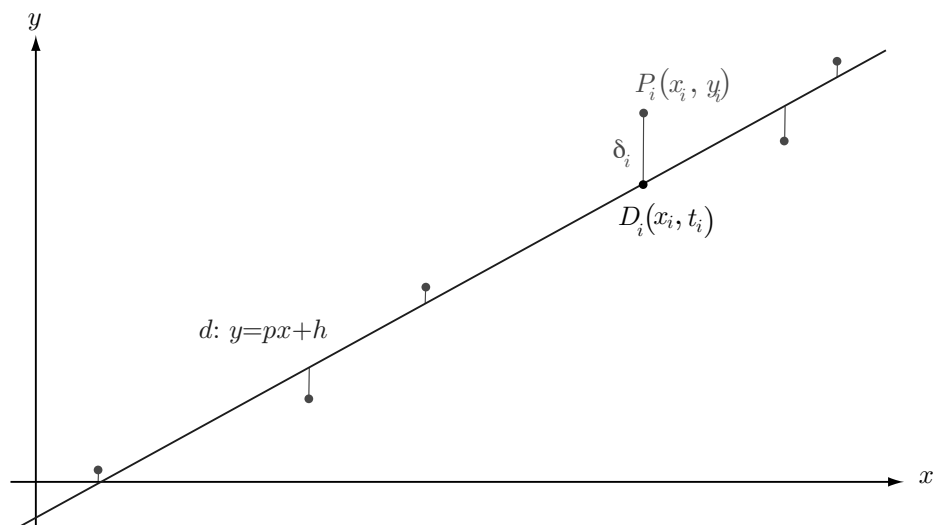
1 Introduction

Les enseignants qui, dans le cadre d’un cours de mathématiques appliquées aux sciences expérimentales ou à l’économie, souhaitent introduire la régression linéaire, s’en trouvent empêchés. Ils se considèrent à tort contraints d’enseigner des recettes dont les bases théoriques relèvent d’un niveau supérieur. Or, il n’en est rien. Nul n’est besoin en effet de faire appel au calcul différentiel, aux fonctions à deux variables ou à l’algèbre linéaire [1] pour établir l’équation de la droite des moindres carrés et évoquer la notion de corrélation. Les propriétés élémentaires de la parabole suffisent. C’est ce que nous proposons d’exposer ici. Les éléments théoriques présentés étant éminemment connus, le présent article ne prétend à aucune originalité quant au fond. Son intérêt réside dans la simplicité didactique de la démarche proposée.

Un nuage de n points $P_i(x_i; y_i)$ du plan devrait, en théorie, se situer exactement sur une droite. Les coordonnées y_i étant entachées d’erreur (elles représentent par exemple les mesures d’une expérience), les n points ne sont pas alignés. On cherche la droite d d’équation cartésienne $y = p \cdot x + h$ qui minimise la somme des carrés des distances verticales entre les points donnés $P_i(x_i; y_i)$ et les points théoriques $D_i(x_i; px_i + h)$ (cf. dessin ci-après), c’est-à-dire, la somme

$$E = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (t_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (px_i + h - y_i)^2.$$

Cette droite est appelée *droite des moindres carrés*.



Soit le barycentre $G(\bar{x}; \bar{y})$ de ce nuage, c’est-à-dire le point ayant les coordonnées moyennes $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ et $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$. Nous allons démontrer que la droite d contient le point G et que la pente p et l’ordonnée

à l'origine h sont données par

$$p = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

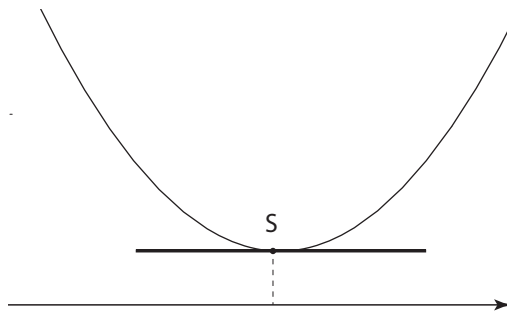
$$h = \bar{y} - p \cdot \bar{x} = \bar{y} - \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} \cdot \bar{x}$$

(Dans ces formules et celles qui suivent, le symbole \sum dénote une sommation pour l'indice i allant de 1 à n).

2 Démonstration

2.1 Lemme algébrique banal

La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a un sommet S d'abscisse $x = -\frac{b}{2a}$. Si $a > 0$, le point S correspond à un minimum de la fonction quadratique.



Ce résultat ne requiert pas de technique d'analyse. Il suffit d'observer que $y = a \cdot \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} - \frac{b^2}{4a} + c$ est minimal quand le terme positif $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est nul, c'est-à-dire quand $x = -\frac{b}{2a}$.

2.2 Les paramètres de la droite à partir du lemme

La droite optimale d ayant pour équation $y = p \cdot x + h$, toute autre droite conduit à une somme $\sum_{i=1}^n \delta_i^2$ supérieure à la valeur correspondante à d . Prouvons maintenant que la droite d contient le point G . Il se trouve que la droite de pente p a une ordonnée à l'origine h qui rend minimale la somme

$$\begin{aligned} S(h) &= \sum \delta_i^2 \\ &= \sum (px_i + h - y_i)^2 \\ &= \sum (h + px_i - y_i)^2 \\ &= \sum [h^2 + 2(px_i - y_i)h + (px_i - y_i)^2] \\ &= \underbrace{n}_a \cdot h^2 + h \cdot 2 \underbrace{\sum (px_i - y_i)}_b + \dots \end{aligned}$$

Cette expression quadratique est minimale (cf. lemme) pour

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2 \sum (px_i - y_i)}{2n} = \frac{1}{n} \sum y_i - p \cdot \frac{1}{n} \sum x_i = \bar{y} - p \cdot \bar{x}$$

Ainsi l'équation de d s'écrit

$$y = p \cdot x + \bar{y} - p \cdot \bar{x}$$

ce qui prouve qu'elle passe bien par le barycentre $G(\bar{x}; \bar{y})$.

La droite optimale ayant pour équation $y = p \cdot x + \bar{y} - p \cdot \bar{x}$, sa pente p rend forcément minimale l'expression quadratique

$$\begin{aligned} Q(p) &= \sum \delta_i^2 \\ &= \sum (px_i + \bar{y} - p\bar{x} - y_i)^2 \\ &= \sum [(x_i - \bar{x}) \cdot p - (y_i - \bar{y})]^2 \\ &= \sum [(x_i - \bar{x})^2 \cdot p^2 - 2(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})p + \dots] \\ &= \underbrace{\left[\sum (x_i - \bar{x})^2 \right]}_a \cdot p^2 + p \cdot \underbrace{(-2) \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}_b + \dots \end{aligned}$$

Ce qui signifie (cf. lemme) que

$$p = -\frac{b}{2a} = \frac{2 \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{2 \sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \frac{1/n}{1/n} = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)}$$

Il se trouve en effet que $\text{Var}(x) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$ est appelée *variance* de la variable x et $\text{Cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, *covariance* des variables x, y . Enfin

$$h = \bar{y} - p \cdot \bar{x} = \bar{y} - \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)} \cdot \bar{x}$$

3 Corrélation

3.1 La droite de régression de x et y

La droite d'ajustement $d : y = p \cdot x + h$ exprimant y en fonction de x minimise la somme des carrés des écarts verticaux entre les points donnés et les points de mêmes abscisses situés sur la droite. Cette droite est appelée *droite de régression de y en x* . Si on permute les rôles respectifs de x et y , on obtient une relation $x = p'y + h'$ caractérisant la droite d' qui minimise la somme des carrés des écarts horizontaux séparant les points donnés de ceux de mêmes ordonnées sur la droite. Une telle droite est appelée *droite de régression de x en y* . On détermine son équation

$$d' : x = p'y + h'$$

de la même manière que celle appliquée pour la première droite mais en échangeant les rôles de x et y .

3.2 Le coefficient de la corrélation

Si les points sont parfaitement alignés, alors les droites d et d' sont confondues. Dans ce cas, leurs pentes p et $1/p'$ étant égales, on a alors $p \cdot p' = 1$. En général, les points mesurés ne sont toutefois pas

alignés; la corrélation sera alors d'autant plus forte que les deux droites de régression sont proches. Pour mesurer la corrélation, on introduit le *coefficient de corrélation linéaire* r défini comme étant la moyenne géométrique des «pentes» p et p'

$$r = \pm \sqrt{p \cdot p'}$$

Ce nombre, qui a le même signe que p et p' , est toujours compris entre -1 et 1 . Il mesure le degré d'alignement des points et est donc tel que $r = \pm 1$ si les points sont parfaitement alignés. Si $r = 0$, il n'y a aucune dépendance *linéaire* entre x et y . Comme $p = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\text{Var}(x)}$ et $p' = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\text{Var}(y)}$, on a donc

$$r = \frac{\text{Cov}(x,y)}{S(x) \cdot S(y)}$$

relation dans laquelle $S(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}$ et $S(y) = \sqrt{\text{Var}(y)}$ désignent les écarts-types de x et y .

4 Les équations normales

4.1 Démarche analytique

On obtient d'ordinaire la pente p et l'ordonnée h comme étant le couple $(p; h)$ correspondant au minimum de la fonction de deux variables

$$E(p; h) = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (px_i + h - y_i)^2$$

c'est-à-dire le point pour lequel les dérivées partielles $\frac{\partial E}{\partial h}$ et $\frac{\partial E}{\partial p}$ s'annulent. Les conditions $\frac{\partial E}{\partial h} = 0$ et $\frac{\partial E}{\partial p} = 0$ conduisent au système

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial h} = \sum 2(px_i + h - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial p} = \sum 2(px_i + h - y_i) \cdot x_i = 0 \end{cases}$$

qui s'écrit aussi

$$\begin{cases} p \cdot \sum x_i + h \cdot \sum 1 = \sum y_i \\ p \cdot \sum x_i^2 + h \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i \end{cases}$$

ou encore

$$(S) : \begin{cases} p \cdot \sum x_i + n \cdot h = \sum y_i & | (1) \\ p \cdot \sum x_i^2 + h \cdot \sum x_i = \sum x_i y_i & | (2) \end{cases}$$

Les relations (1) et (2) sont appelées *équations normales*.

4.2 Démarche algébrique

On peut retrouver ces relations par une démarche purement algébrique.

Nous avons établi que

$$h = \bar{y} - p \cdot \bar{x}$$

Multipliée par n , cette relation s'écrit aussi

$$\begin{aligned} n \cdot h &= n \cdot \bar{y} - p \cdot n \cdot \bar{x} \\ n \cdot h &= \sum y_i - p \cdot \sum x_i \end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{p \cdot \sum x_i + n \cdot h = \sum y_i}$$

qui n'est autre que la première équation normale.

Quant à la relation $p \cdot \text{Var}(x) = \text{Cov}(x, y)$, multipliée par n , elle s'écrit aussi

$$\begin{aligned} p \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2 &= \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ p \sum x_i^2 - 2p\bar{x} \sum x_i + np\bar{x}^2 &= \sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i - \bar{y} \sum x_i + n\bar{x}\bar{y} \\ p \sum x_i^2 - 2pn\bar{x}^2 + np\bar{x}^2 &= \sum x_i y_i - \bar{x}n\bar{y} - \bar{y}n\bar{x} + n\bar{x}\bar{y} \\ p \sum x_i^2 - np\bar{x}^2 &= \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} \\ p \sum x_i^2 + \underbrace{(\bar{y} - p\bar{x})}_h \underbrace{n\bar{x}}_{\sum x_i} &= \sum x_i y_i \end{aligned}$$

ou encore

$$\boxed{p \sum x_i^2 + h \sum x_i = \sum x_i y_i}$$

qui n'est autre que la seconde équation normale.

Références

- [1] *Méthode des moindres carrés sans calcul différentiel*, Bulletin de la SSPMP, no 77, 1998

90 91 petits génies des mathématiques

Depuis plusieurs années, j'ai la chance de côtoyer notre membre et ami Jean-Michel Kern dans le cadre de la vérification des comptes de la SSPMP. C'est avec beaucoup de sérieux qu'il nous fait profiter de ses vastes connaissances comptables et juridiques, et je ne saurais trop le remercier pour ses conseils avisés.

Il était parfois difficile de fixer nos rencontres ces dernières années. Bon camarade, Jean-Michel disait que lorsqu'il enseignait, il était si occupé qu'il n'avait pas une minute à lui, alors que depuis qu'il est à la retraite, il n'a plus une seconde.



FIGURE 1 – Jean-Michel Kern

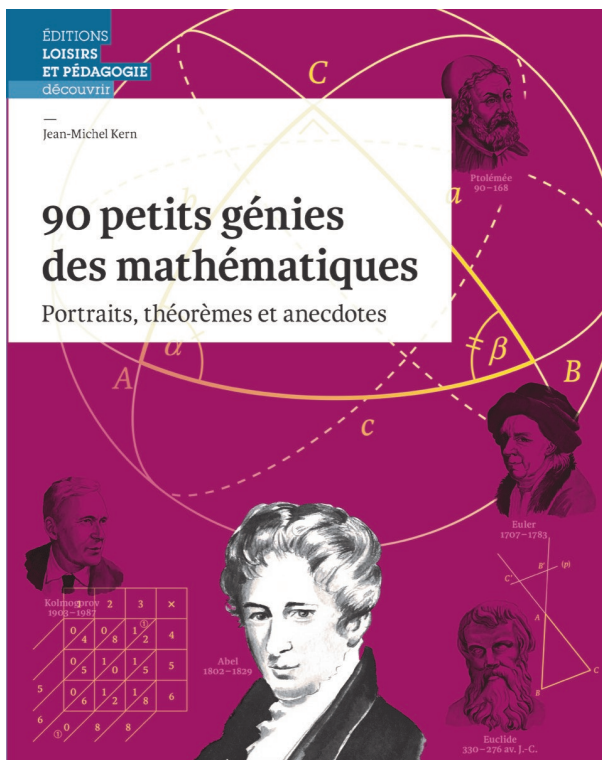


FIGURE 2 – Couverture du livre (ISBN : 978-2-606-01672-2)

Depuis la parution de son livre **90 petits génies des mathématiques** aux éditions Loisirs et Pédagogie, j'ai compris que ce n'était pas qu'une plaisanterie. Dans ce livre, Jean-Michel nous propose de revisiter les mathématiques en alliant les découvertes aux éléments biographiques de 90 personnages surprenants.

Nous remercions l'éditeur de nous avoir aimablement permis de publier 4 pages de ce livre ci-dessous. Dans l'avant-propos, Jean-Michel décrit précisément sa démarche, illustrée adéquatement par les deux pages consacrées à Leibniz. Je vous recommande vivement l'acquisition de cet ouvrage, Y. Roisin (Caissier SSPMP)

Avant-propos

J'ai enseigné les mathématiques pendant de nombreuses années. Dès les premiers temps, j'ai souvent été stupéfait de constater combien certains élèves accueillent mes propos sans se préoccuper de leur découvreur et de l'environnement dans lequel il vivait. D'autres, plus curieux, me demandaient : « Mais qui c'était, Pythagore ? », et j'ai donc commencé à collecter des renseignements sur ces personnages qui apparaissent dans les livres de mathématiques. Les discussions avec mes collègues m'ont rapidement montré qu'eux aussi baignaient dans la même ignorance que moi, d'autant que les mathématiciens et leurs découvertes ont rarement laissé des traces dans l'Histoire. Alors, petit à petit, à chaque cours ou conférence suivis, à chaque encyclopédie ou revue parcourues, j'ai constitué des notes, afin de renforcer mes connaissances, d'illustrer mes cours et de provoquer la curiosité de mes auditeurs.

Il a fallu attendre ma retraite pour que, à la suggestion de collègues, je me résolve à rassembler et à mettre en forme une partie des informations accumulées. Pourquoi une partie ? Parce que je destine ce livre d'abord à des jeunes ; j'ai donc laissé de côté ce qui s'apprend à l'université. Deux critères ont donc été retenus : être apparu dans un moyen d'enseignement officiel précédant le niveau universitaire, et dans une des langues que je connais.

Malheureusement, cette décision tardive de rédiger proprement mes notes contient un inconvénient majeur : l'absence de la liste des moyens d'enseignement consultés. Je prie par avance le lecteur de m'en excuser.

Naturellement, il manque beaucoup de monde dans cet ouvrage, car issu de ma Suisse natale, je n'ai certainement pas encore assez voyagé ni assez lu. Les personnages qui y sont présentés sont donc essentiellement européens, parfois africains ou asiatiques. Ainsi, les mathématiques chinoises, dont j'ai eu l'occasion de découvrir quelques beaux résultats, et qui sont aussi vieilles que les mathématiques européennes, n'apparaissent pas, ou presque pas, dans mon texte.

Ce qui sépare l'histoire de la préhistoire, c'est l'apparition de l'écriture, et donc de documents. Hélas, leur support n'a souvent pas résisté au temps. Les manuscrits sur papyrus, puis papier de bois, se détruisent facilement ; les parchemins ont été grattés pour pouvoir être réutilisés. Sans parler des destructions humaines, comme l'incendie de la bibliothèque d'Alexandrie par les troupes de Jules César en 48 av. J.-C. Bien que l'on sache que les érudits de

l'Antiquité et du Moyen-Âge rédigeaient beaucoup, et correspondaient parfois entre eux, les informations nous sont essentiellement parvenues par transmission orale, ou par un support écrit filtré par des religieux (chrétiens comme musulmans). De plus, n'oublions pas qu'en 454, l'empereur romain d'Orient Justinien ordonna la fermeture de toutes les écoles de philosophie, hauts lieux d'échanges des idées autour de la mer Méditerranée. Il a fallu l'invention par Gutenberg, vers 1450, de la typographie (que les Chinois connaissaient d'ailleurs depuis fort longtemps), pour que l'imprimerie se développe de manière fulgurante et que les connaissances soient dès lors diffusées universellement.

Toutes mes affirmations sur les mathématiciens antiques ou médiévaux, ainsi que sur leurs résultats mathématiques, sont donc peut-être très éloignées de la vérité. Pour les temps modernes ou contemporains, je suis un peu plus sûr, quoique l'exemple de la « droite de Simson » me donne à réfléchir.

Malheureusement, ce livre ne contient qu'un seul nom de femme. Pourtant, j'y aurais volontiers présenté les histoires d'Hypatie d'Alexandrie, de Sophie Germain ou d'Emmy Noether. Je le regrette, mais leur nom n'est attaché à aucun énoncé des manuels scolaires de mathématiques que j'ai lus.

Les notices bibliographiques se trouvant sur les pages paires sont volontairement réduites à une page. Les pages impaires, et parfois suivantes, sont réservées aux résultats mathématiques. Pour des raisons d'unité de présentation, je me suis toutefois permis de modifier la forme sous laquelle j'en ai trouvé certains.

Afin de faciliter la lecture, j'ai ajouté à la fin du livre un lexique des notations que j'ai utilisées. Les notices biographiques mentionnent parfois des expressions mathématiques peu usuelles, celles-ci font l'objet d'un glossaire en fin d'ouvrage. Elles sont signalées par un astérisque dans le corps du texte.

Enfin, comme je tenais à situer les personnages dans le temps et dans l'espace, quelques repères chronologiques et géographiques sont disponibles en début d'ouvrage.

À chaque lectrice ou lecteur, je souhaite le plus beau des voyages dans ce monde qui continue chaque jour à me fasciner : les mathématiques.

JEAN-MICHEL KERN
Mai 2018

Gottfried Wilhelm

Leibniz

1646-1716



Allemand
Né à Leipzig
(Allemagne)
Mort à Hanovre
(Allemagne)

En philosophie, Leibniz est l'un des principaux représentants du rationalisme, doctrine qui pose la raison comme principale source de la connaissance.

Fils d'un professeur de droit et de morale, Leibniz naît dans une pieuse famille luthérienne à la fin de la guerre de Trente Ans, qui a laissé la région en ruine. Il fréquente la Nicolai Schule, mais apprend surtout en autodidacte dans la bibliothèque de son père. Il suit ensuite l'Université de Leipzig. En 1666, sa thèse en droit est refusée à cause de son âge. Suite à cette déconvenue, il en présente une autre à l'Université de Nuremberg, qui est acceptée. On lui offre un poste de professeur, qu'il refuse, préférant entrer au service du prince-électeur et archevêque de Mainz. Ce dernier l'envoie en mission à Paris en 1672, où il rencontre Huygens.

Son protecteur meurt en 1673 et Leibniz est libéré de sa charge de diplomate. Il construit alors une machine à calculer qu'il présente à Londres, à la Royal Society. Fêru de sciences exactes, il s'intéresse à la dynamique en physique et pose les fondements du calcul différentiel* et le calcul intégral* en mathématiques. Les résultats de ces dernières recherches sont publiés en 1678 sous le titre *Nova methodus pro maximis et minimis*. En 1676, il cherche du travail pour mieux assurer ses ressources financières et entre au service du duc de Hanovre. Ce dernier le nomme conseiller, puis diplomate en 1678.

Leibniz étend désormais ses recherches au domaine philosophique – il publiera son célèbre *Discours de métaphysique* en 1686 – et utilise ses connaissances scientifiques pour des applications pratiques dans la gestion du duché. Il perfectionne, par exemple, les moulins à vent et améliore la productivité de l'exploitation des mines. Nommé historien de la maison de Brunswick, il effectue une grande recherche généalogique, qui le fait beaucoup voyager, et obtient ainsi pour son maître le titre d'électeur du Saint-Empire.

Le duc meurt en 1698 et c'est son frère Georges Louis qui lui succède. Grâce notamment à l'action de Leibniz, celui-ci deviendra le roi Georges I^{er} d'Angleterre en 1714, à la mort de la reine Anne.

Patriote mais solitaire, Leibniz a néanmoins eu près de 600 correspondants, dont le tsar Pierre le Grand, qu'il rencontrera en 1715. Il est emporté par la maladie de la goutte.

Calcul d'un déterminant selon Leibniz

Aussi appelé formule des mineurs :

Le déterminant d'ordre 1, noté $|a_{11}|$, a pour valeur a_{11} ;

le déterminant d'ordre 2, noté $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, a pour valeur

$$(-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot |a_{22}| + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot |a_{12}|;$$

le déterminant d'ordre 3, noté $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, a pour valeur

$$(-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix};$$

et ainsi de suite.

Notation de Leibniz pour la dérivée* d'une fonction*

Pour une fonction donnée $y = f(x)$, sa fonction dérivée est obtenue

en calculant $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ et on la note $\frac{dy}{dx}$.

NOTA Le Δy (ou Δx), qui représente une différence « détectable » de y (ou x), devient si petit (« infiniment » petit), donc différence « indétectable », qu'on le note dy (ou dx) et qu'on parle alors d'une différentielle.

Signe de Leibniz pour l'intégration

Avec sa belle écriture ronde de l'époque, le mot latin Summa (pour somme) de ses textes a été abrégé en S; il est utilisé de nos jours en

\int dans l'écriture d'une intégrale $\int_a^b f(x) \cdot dx$.

NOTA Il semble que l'usage de ce signe lui a été suggéré par son correspondant Johann (Jean) Bernoulli.

Expérience sur le frottement d'une corde

Markus Meier et Barbara Roos, Olympiades de physique, broos@gmx.ch

Etes-vous à la recherche d'une bonne expérience sur les frottements et la mécanique ? Et voilà: les Olympiades de Physique vous offrent à cet effet l'expérience « frottement d'une corde ». A l'issue de celle-ci, vos élèves comprendront comment une simple corde peut permettre d'arrimer un bateau entier. Et pourquoi un câble de frein rouillé est une chose plutôt pénible.

Idéalement aux classes situées à deux ans de la maturité. Les élèves devraient connaître la fonction exponentielle. Des élèves plus jeunes peuvent par contre déjà explorer le phénomène en lui-même.

Environ 150 minutes. Mais il faudra probablement compter plus de temps pour une solution exhaustive.

1 Description

1.1 Comment l'expérience est-elle construite ?

Vos élèves analysent le frottement entre une corde et un barreau. L'expérience comporte trois exercices:

- Détermination des forces lors d'un frottement statique maximal, détermination du coefficient de frottement statique.
- Détermination des forces lors d'un frottement cinétique, détermination du coefficient de frottement cinétique.
- Détermination des forces lors d'un frottement cinétique en fonction de l'angle d'enroulement et du coefficient de frottement cinétique.

1.2 Qu'apprennent les élèves ?

Ils se confrontent à la loi d'Euler-Eytelwein et la comprennent. Ils peuvent expliquer pourquoi quelques tours de corde autour d'une bitte d'amarrage suffisent à amarrer un lourd bateau. Ils apprennent à monter, exécuter et évaluer une expérience de physique.

1.3 Matériel à prévoir

- Ficelle
- 2 dynamomètres à ressort (domaines de mesure 0 – 3 N, 0 – 10 N)
Attention : selon l'orientation des dynamomètres lors de leur utilisation (verticalement contre le haut, verticalement contre le bas, horizontalement), leur échelle doit être mise à 0 au moyen de leur vis de réglage.
- Matériel de fixation : étau de table, tige de statif, noix de serrage, tige de mesure de frottement
- Papier pour graphiques
- Seau, récipient rempli d'eau, balance

- Set de poids
- Papier absorbant

1.4 Origine et solutions

Cette expérience a été élaborée par Markus Meier et Barbara Roos à partir d'une idée provenant des Olympiades Asiatiques de Physique 2012. Lien pour la description et les solutions de l'expérience: <https://science.olympiad.ch/fr/enseignantes/>

2 Expérience: Frottement d'une corde

2.1 Indications

- Toutes vos mesures ainsi que vos calculs doivent être documentés de manière compréhensible et lisible. Cela signifie que toutes les grandeurs mesurées doivent être notées clairement dans des tableaux, toutes les valeurs utilisées dans vos calculs doivent être évidentes, tous vos calculs doivent être compréhensibles. Soyez également attentifs au nombre de chiffres significatifs.
- Toutes les grandeurs doivent être exprimées dans les unités SI correctes.
- Les graphes doivent être complets et correctement labellisés.
- En plus du papier quadrillé, du papier millimétré est à votre disposition pour les diagrammes et les graphiques.
- Pour des angles d'enroulement supérieurs à 2π , il est important que la ficelle ne s'enroule pas plusieurs fois sur elle-même et que les « spires » ne se touchent pas.
- La tige utilisée pour les mesures de frottement comporte une zone sur laquelle la ficelle va être enroulée ; ne touchez pas cette zone avec les doigts (vous la graisseriez, ce qui modifierait ainsi le coefficient de frottement). Les tiges auront été nettoyées au préalable. Pour les mêmes raisons, la ficelle ne doit être manipulée qu'à ses extrémités.
- Placez la ficelle si possible toujours au même endroit de la tige.

2.2 Description de l'expérience

Loi d'Euler-Eytelwein

Une corde S est enroulée autour d'une barre B avec un angle d'enroulement φ (cf Fig. 1). Afin de maintenir la masse M à l'équilibre, une force de tension F doit être appliquée à l'autre extrémité de la corde. Grâce à la force de frottement entre la corde S et la barre B , la force de tension F nécessaire est plus petite que le poids généré par la masse M et est donnée par la formule suivante :

$$F = F_M \cdot e^{-\mu\varphi}$$

avec	F_M	Poids
	F	Force de tension
	φ	Angle d'enroulement (en radians)
	μ	Coefficient de frottement
	e	Constante d'Euler

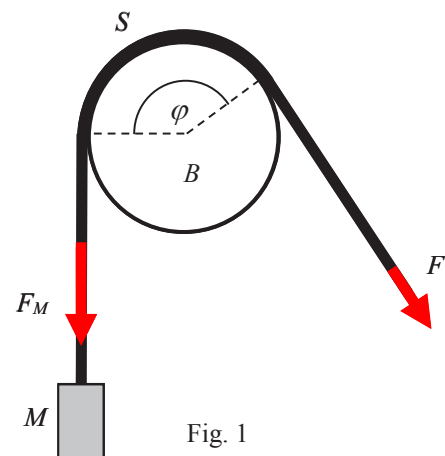


Fig. 1

2.3 Problèmes

Question 1: Détermination des forces lors d'un frottement statique maximal, détermination du coefficient de frottement statique

On souhaite déterminer les forces entre la ficelle et la tige lors d'un frottement statique maximal, et ce pour plusieurs masses. L'angle d'enroulement $\varphi = \pi$ doit rester constant. On augmente lentement la force de tension F jusqu'à ce que la ficelle commence à bouger sur la tige. La masse est fixée à une extrémité de la ficelle, et la force de tension est générée comme suit : on attache un seau d'eau à l'autre extrémité de la ficelle ; on verse ensuite de l'eau dans le seau jusqu'à ce que la ficelle commence à bouger et que la masse commence à se déplacer vers le haut. La masse du seau d'eau détermine la force de tension lors du frottement statique. **Attention:** Pour éviter que le seau ne touche la masse, il faut qu'au début de la mesure, le seau se trouve plus bas que la masse. Il ne faut en aucun cas mouiller la ficelle !

- Effectuez pour un angle d'enroulement constant $\varphi = \pi$ la mesure de la force de tension pour 8 masses différentes dans l'intervalle 0 g à 160 g. Pour chaque masse, il est nécessaire d'effectuer la mesure au moins trois fois et d'en calculer la moyenne.
- A partir des mesures de (a), déterminez pour chacune des 8 mesures le coefficient de frottement statique μ_{stat} entre la ficelle et la tige. A partir de ces valeurs, calculez la moyenne pour μ_{stat} .

Question 2: Détermination des forces lors d'un frottement cinétique, détermination du coefficient de frottement cinétique

Prenez un nouveau morceau de ficelle. L'angle d'enroulement $\varphi = \pi$ doit à nouveau rester constant. Lors d'un frottement cinétique, les forces peuvent être mesurées par deux méthodes au moyen des dynamomètres. Dans la première méthode, on tire une masse vers le haut, dans la deuxième, on la laisse descendre. Dans la première méthode (cf. (a)), on augmente progressivement la force de tension au moyen du dynamomètre, jusqu'à ce que la ficelle commence à bouger sur la tige. A partir de ce moment, on continue à tirer lentement avec une vitesse constante tout en lisant la force sur le dynamomètre. Avec la deuxième méthode (cf. (b)), la force de tension causée par le dynamomètre est diminuée jusqu'à ce que la ficelle commence à bouger sur la tige. A ce moment-là, on continue à bouger à vitesse constante tout en lisant la force sur le dynamomètre.

- Pour un angle d'enroulement constant $\varphi = \pi$, effectuez la mesure de la force de tension (en tirant la masse vers le haut) pour 8 masses différentes dans l'intervalle 0 à 160 g. Pour chaque masse, on veillera à effectuer au moins trois mesures et à en calculer la moyenne.
- Pour un angle d'enroulement constant $\varphi = \pi$, effectuez la mesure de la force de tension (en laissant descendre la masse) pour 8 masses différentes dans l'intervalle 0 à 160 g (utilisez les mêmes masses que dans la partie (a)). Pour chaque masse, on veillera à effectuer au moins trois mesures et à en calculer la moyenne.
- Représentez graphiquement toutes les forces (leurs moyennes) des parties (a) et (b) en fonction de la masse. On représentera ces valeurs dans le même graphe comme deux ensembles de mesures.

Etablissez un tableau de valeurs dans lequel pour chaque poids, vous y indiquerez le rapport entre la force de tension et le poids, aussi bien pour la méthode où l'on tire la masse que celle où on la laisse descendre. Quel est le lien entre ces deux rapports ? Calculez pour chaque poids le coefficient de frottement cinétique μ_{cin} entre la ficelle et la tige en utilisant à chaque fois les deux valeurs mesurées (en tirant la masse, resp. en la laissant descendre). A partir de ces valeurs, calculez la moyenne pour μ_{cin} .

Question 3: Détermination des forces lors d'un frottement cinétique en fonction de l'angle d'enroulement, détermination du coefficient de frottement cinétique

Dans cette mesure, on cherche à étudier la dépendance des forces (seulement avec la méthode où l'on tire la masse) à l'angle d'enroulement. On détermine les forces au moyen des dynamomètres. Pour toute cette partie 3, la masse doit rester constante à 55 g.

- (a) Déterminez les forces de tension pour au moins 6 angles d'enroulement dans l'intervalle $\varphi = 0$ à $\varphi = 8\pi$. Pour chaque angle, on répétera chaque mesure au moins cinq fois.
- (b) Etablissez pour chaque angle d'enroulement la moyenne ainsi que l'écart-type pour les forces de tension mesurées.
- (c) Au moyen d'un graphe adéquat, vérifiez la validité de la loi d'Euler-Eytelwein. Expliquez le choix de votre méthode !
- (d) Pour chaque grandeur en question, dessinez les barres d'erreur dans votre diagramme.
- (e) Déterminez le coefficient de frottement cinétique μ_{cin} entre la ficelle et la tige à partir du graphe établi en (c). Estimez de manière appropriée l'erreur sur le coefficient de frottement cinétique. Documentez vos calculs.
- (f) Comparez μ_{cin} de la question 3 (e) avec μ_{cin} de la question 2 (d) et calculez l'écart relatif de la valeur en 2 (d) par rapport à celle de 3 (e).

Usage de simulateurs informatisés *PHET*¹ en cours et laboratoire de physique

Jean-Jacques Rochat, Gymnase de La Cité (retr.), jj.rochat@gmail.com

Introduction

La conceptualisation et la modélisation en physique se révèlent parfois difficiles pour les élèves. Autant l'abord d'un dispositif ou d'une expérience peut être très intuitif et rapide pour certains, autant il peut se révéler quasi insurmontable pour d'autres. En plus de l'expérience réelle, il est souvent bénéfique de faire intervenir des moyens auxiliaires de visualisation permettant d'approfondir la réflexion. C'est le cas des interfaces de mesure et des simulateurs. Les interfaces de mesure nous ont donné un accès aisé à maintes mesures qu'il était très difficile d'obtenir dans un laboratoire de gymnase avant leur avènement dans les années nonante². Il suffit de songer aux dispositifs compliqués de chronophotographie à disque tournant ou à stroboscope. Les simulateurs permettent aussi de fixer les paramètres d'une manière qui ne serait pas possible en démonstration ou au laboratoire. Par exemple, en changeant la gravité ou les frottements dans un cas mécanique ou en changeant tous les paramètres d'un condensateur plan. Cet article évoque quelques expériences que j'ai faites avec des simulateurs *PHET*, dans des classes de gymnase, en entrant dans les détails de l'une d'elle. Des fiches de TP en lien avec cet article peuvent être téléchargées sur mon site³.

Choix de simulateurs

En cherchant sur le net et dans les publications, on trouve de nombreuses simulations de qualité et aussi de nombreuses simulations peu ergonomiques, voire incompréhensibles. Le problème du langage de programmation se pose également. Maintes simulations de qualité que j'ai utilisées sont tombées en désuétude au fil du rythme effréné des mises à jour de *Flash* et de *Java*. Aujourd'hui, notamment pour des raisons de sécurité et d'unification de la programmation pour l'ensemble des plateformes (ordinateur, tablette, téléphone), c'est la programmation en *HTML5* qui s'impose.

Je confirme avoir fait des expériences très positives avec les familles de simulations suivantes, notamment :

Les simulations de *Walter Fendt*, en mathématique⁴ et en physique⁵ sont souvent très utiles pour illustrer un propos dans le cadre d'un cours. D'abord réalisées en flash, l'auteur les a portées maintenant en *HTML5* et elles valent la découverte, mais leur utilisation ne sera pas commentée dans cet article.

Les simulations *Physique Chimie Collège Lycée PCCL*⁶, sont elles aussi intéressantes et permettent de faire des exercices avec les élèves. Elles sont néanmoins encore au format *Flash* au moment de la rédaction de cet article, ce qui complique leur utilisation.

Gilbert Gastebois entretient aussi un site de qualité⁷ où on trouve maints éléments utiles au maître de physique et aussi des simulations. Néanmoins, elles sont en *Java* et nécessitent donc de configurer

¹ Simulations en ligne de l'Université de Colorado

² Voir par exemple les excellents équipements Vernier : <https://www.vernier.com> ou <https://educatec.ch>

³ <http://physique.jjrochat.ch>

⁴ <http://www.walter-fendt.de/html5/mfr/index.html>

⁵ <http://www.walter-fendt.de/html5/phfr/index.html>

⁶ <https://www.pccl.fr>

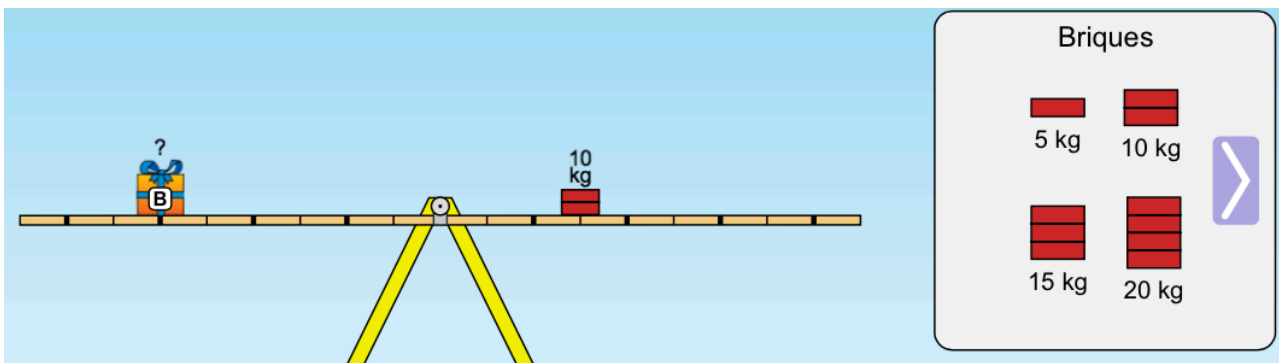
⁷ <http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr>

l'extension de manière adéquate.

L'université de Colorado met en ligne toute une série de simulations depuis 2002, sous l'impulsion du prix Nobel Carl Wieman⁸, nommées *PHET* elles sont de très grande qualité tout en restant simples. Elles sont aussi gratuites. D'abord écrites en *Flash* ou *Java*, elles sont progressivement portées en *HTML5*. Le site original est en anglais⁹, mais on les trouve traduites dans maintes langues dont le français¹⁰ et l'allemand¹¹. Les simulations sont disponibles en ligne mais peuvent aussi être téléchargées¹² en un bloc pour résider dans un ordinateur. On s'affranchit ainsi du risque de panne de connexion internet au moment critique. J'ai beaucoup utilisé certaines de ces simulations à l'appui de mon cours, mais aussi dans le cadre des laboratoires. Des exemples sont développés dans les paragraphes qui suivent. Les liens internet ne sont pas donnés en note pour les simulations car trop complexes. Elles sont toutes à retrouver sur la page générale d'accès aux simulations¹³.

Utilisation dans le cadre du cours

La simulation permet d'illustrer le propos du cours assez simplement et de manière un peu ludique. Par exemple, pour les classes non scientifiques¹⁴, l'utilisation de la balançoire pour aborder la loi des leviers s'est révélée adéquate.



Ou alors, pour une discussion des échanges d'énergie, de notion d'équilibre stable ou instable, la simulation de la planche à roulette sur une piste qu'on peut configurer facilement s'est révélée très appropriée. Elle favorise la compréhension qualitative, permet de visualiser les échanges d'énergie, puis, on peut introduire la dissipation par frottement :

⁸ Co-lauréat du prix Nobel de Physique de 2001 avec Eric Cornell et Wolfgang Ketterle

⁹ <https://phet.colorado.edu>

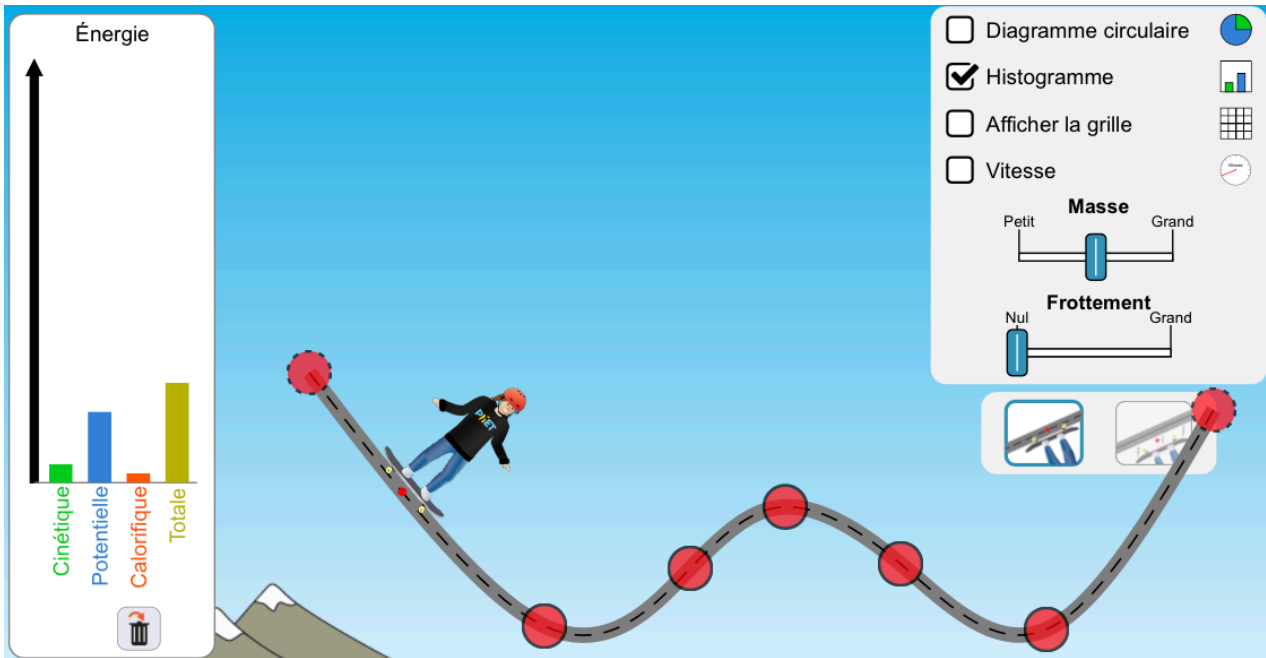
¹⁰ <https://phet.colorado.edu/fr/>

¹¹ <https://phet.colorado.edu/de/>

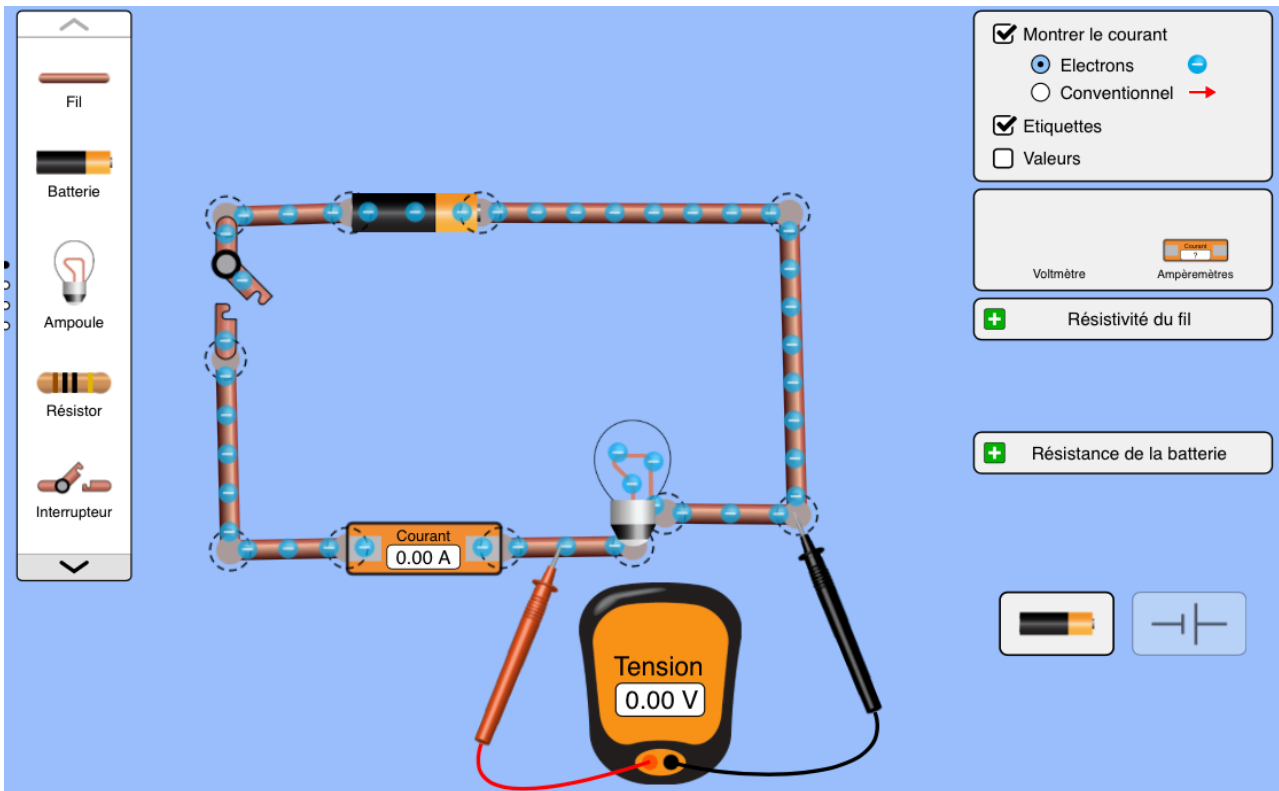
¹² <https://phet.colorado.edu/fr/offline-access>

¹³ <https://phet.colorado.edu/fr/simulations>

¹⁴ Dans les gymnases vaudois, l'Ecole de Culture Générale est incluse



Dans le domaine de l'électricité, des montages peuvent aussi être simulés, qui permettent une étape de facilitation de la compréhension du lien entre le montage réel et son schéma usuel. Le maître peut illustrer le mouvement des électrons ou le sens conventionnel du courant ou déclencher cette visualisation :



Les simulations *PHET* offrent au maître de nombreuses autres possibilités d'illustrer son cours de manière simple. Il reste que l'enseignant doit disposer d'un ordinateur et d'un projecteur et maîtriser la technique informatique y relative pour en faire usage. A défaut, en cas de non fonctionnement ou de flottement, la classe va se dissiper et poser des problèmes. La préparation soignée des présentations est donc à planifier.

Utilisation au laboratoire

Pendant de nombreuses années, j'ai intégré des simulations *PHET* non seulement dans mes cours mais aussi au laboratoire. Je me suis cependant toujours attaché à partir d'expériences réelles ; les simulations ne venant qu'à l'appui de la démarche des élèves pour aider à leur compréhension et à leur faculté de modélisation. Je tiens à insister sur le fait que je ne voudrais pas d'une physique « étudiée » rien que par ces moyens. Je suis convaincu qu'il faut en rester à une approche primaire expérimentale. Les simulations permettent cependant de faciliter la démarche intellectuelle et aussi, souvent, elles donnent la possibilité de s'affranchir de problèmes parasites, par exemple la difficulté technique d'effectuer certaines mesures ou permettent de modifier des paramètres à l'infini, y compris certains qui ne sont pas accessibles lors de l'expérimentation classique (par exemple la valeur de la gravité dans une expérience sur les ressorts ou la masse volumique du liquide dans une expérience sur la loi d'Archimède).

J'ai donc utilisé des simulations *PHET* (et d'autres) au laboratoire, toujours en lien avec une vraie expérience de base, dans des domaines aussi variés que les ressorts, la gravité, les mouvements, les chocs à une et deux dimensions, la somme vectorielle de forces, la force d'Archimède, la loi des gaz parfaits, l'expérience de Millikan, les champs électriques et condensateurs, notamment.

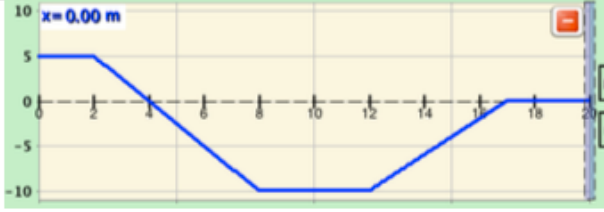
J'ai choisi de développer ci-dessous l'une de mes expériences avec le simulateur *L'homme en mouvement*. La place dans cet article manque pour entrer dans d'autres descriptions détaillées, mais outre celle de *L'homme en mouvement*, quelques fiches peuvent être téléchargées sur mon site¹⁵, à titre d'exemple. Il est vrai que, sortie de leur contexte d'utilisation, sans la connaissance du matériel et en l'absence des informations prodiguées en début de séance, elles pourront paraître lacunaires. Je reste disponible pour en parler de vive voix avec le lecteur intéressé, cas échéant.

Utilisation au laboratoire – *L'homme en mouvement*

Depuis plusieurs années, j'ai opté pour une approche au laboratoire de la cinématique élémentaire sur les mouvements rectilignes composé d'abord d'une partie expérimentale sur le mouvement rectiligne uniforme (MRU) suivi d'une séance de simulation permettant une transition vers le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA). Une troisième séance de travaux pratique était consacrée ensuite à des expériences de MRUA. Lors de la première séance, la notion d'horaire et les calculs de vitesse étaient abordés expérimentalement. Là aussi, par des angles différents avec un laboratoire en trois parties : introduction (10 min), chronométrage d'une personne parcourant la longueur du couloir à diverses allures (20 min), enregistrement manuel des positions toutes les deux secondes d'une petite voiture électrique se mouvant dans un rail de 5 mètres (20 min), enregistrement par interface d'un chariot sur un rail horizontal (20 min). Lors d'une deuxième séance, j'ai donné une fiche de TP avec des *missions* allant du plus simple au plus compliqué en utilisant la simulation *PHET l'homme en mouvement (The Moving Man)*. Chaque groupe de deux (avec un groupe de 3 en cas de non-parité de la demi-classe au labo) devait résoudre les *missions* successivement et m'appeler pour la vérification et le commentaire de chacune, ou pour de l'aide.

Voici par exemple ce qui était demandé en question 3, facile, en début de fiche :

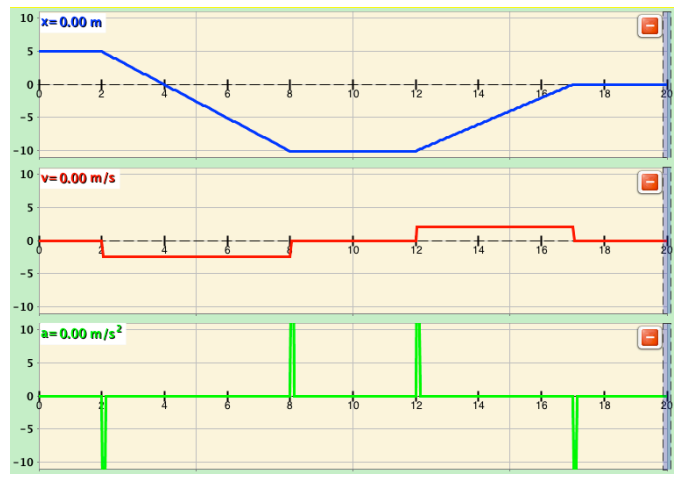
¹⁵ <http://physique.jjrochat.ch>

<p>3. Prévoir les contraintes nécessaires pour simuler ce mouvement (temps, position initiale, vitesses) donné par $x(t)$. Le simuler ensuite pour obtenir le même résultat que la donnée ci-contre. Ne pas considérer $a(t)$.</p> <p>Mentionner ici les vitesses nécessaires :</p> <p>0-2s : 2-... : ...</p> <p>Dessiner ci-contre $v(t)$ en synchronisation avec $x(t)$ donné.</p>		<p>auto contrôle</p> <p>OK</p>
--	--	--------------------------------

La discussion à deux s'est révélée à chaque coup fructueuse et des erreurs étaient discutées en groupe avant de m'appeler, puisque le logiciel permettait l'autocontrôle.

La réponse à fournir était bien sûr celle donnée ci-contre. Il était intéressant de prolonger la discussion en analysant la plausibilité de la variation instantanée de vitesse (choc), ainsi que la notion de saccade (donc de variation instantanée de l'accélération).

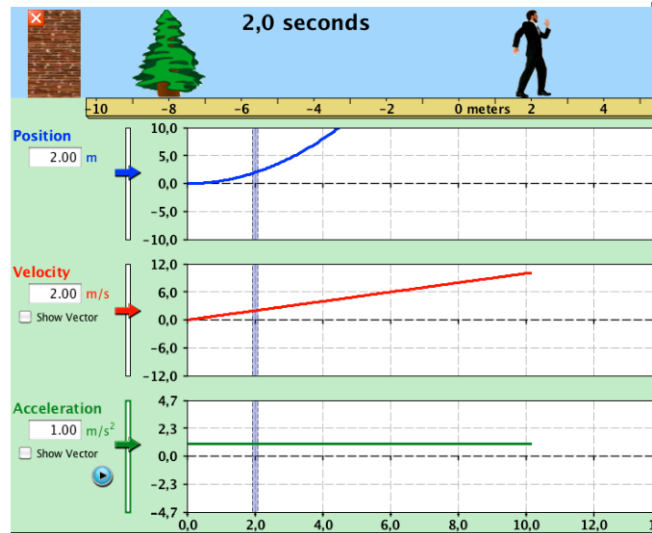
3) (0 ; -2.5 ; 2 m/s)



Dès la question 5, le MRUA était abordé avec pour défi de trouver un modèle mathématique adéquat dans un cas précis :

<p>5. On s'intéresse désormais à des vitesses qui varient avec une pente constante. Régler l'échelle de l'accélération sur la valeur la plus sensible (la plus basse), de -5 à + 5 m/s/s environ. Enlever les murs.</p> <p>Choisir la situation initiale suivante :</p> <p>$x(t=0) = 0$ m $v(t=0) = 0$ m/s $a(t=0) = 0.2$ m/s/s</p> <p>Exécuter la simulation pendant 10 secondes environ.</p> <p>Avec le curseur vertical, analyser en mode <i>playback</i> comment la vitesse varie pendant ces 10 secondes. Faire un tableau comprenant t, x et v. Trouver une formule donnant la vitesse en fonction du temps (en utilisant l'accélération !).</p>		<p>Et. en gpe</p> <p>disc. ens. en classe.</p> <p>auto contrôle</p> <p>OK</p>
--	--	---

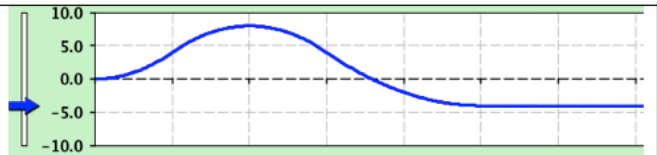
On obtient la simulation illustrée ci-contre. Le tableau comprenant la variable indépendante t et les variables dépendantes x et v était utilisé pour trouver la loi donnant la vitesse en fonction du temps (relativement simple car c'est une fonction affine). A la question 6, il s'agissait de trouver une loi donnant cette fois la position en fonction du temps et de voir si la loi trouvée pouvait s'appliquer à d'autres cas simulés. Si non, il convenait de la généraliser.



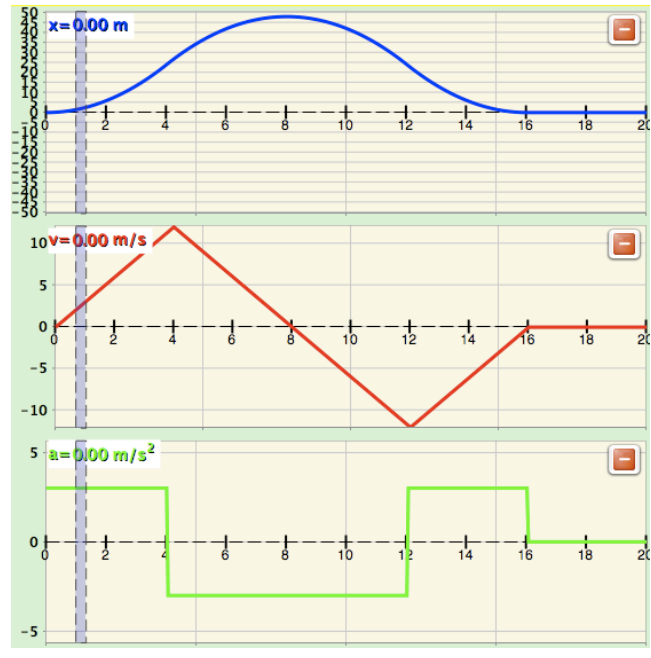
Enfin les questions subséquentes permettaient aux groupes rapides et à l'aise d'appliquer leurs découvertes à la résolution de cas plus complexes. Voici pour exemple la question 10 :

10. (plus difficile) Considérant $x(t)$ donné ci-contre et sachant que les changements d'accélération se font exactement à des secondes entières, prévoir les fonctions $v(t)$ et $a(t)$ d'abord qualitativement seulement, puis avec les valeurs numériques nécessaires pour pouvoir reproduire le cas en simulation. Effectuer cette simulation et l'imprimer. Indiquer sur l'impression les calculs effectués.

Pour indication, l'homme est à la position 8 m à l'instant $t = 4$ s.



Cette *mission* nécessite l'identification des quatre phases du mouvement et l'application adéquate des lois découvertes relatives au MRUA. Elle constitue un défi assez important pour des élèves non scientifiques, mais a pu être résolue généralement par un ou deux groupes dans des demi-classes ayant une OS non scientifique. Les élèves d'OS biologie-chimie s'en sortaient un peu mieux. Les élèves d'OS Physique-application des mathématiques étaient pratiquement tous capables de mener les analyses proposées par la fiche au moins jusqu'à cette question. Une question similaire portant le numéro 11 les occupait s'ils avaient terminé.



Après la deuxième séance de simulation, une troisième séance sur les mouvements accélérés était proposée aux élèves d'un type différent selon les classes ; par exemple en utilisant des enregistrements vidéo de mouvements accélérés avec des relevés sur une règle visible en arrière plan ou en utilisant un logiciel d'analyse de mouvement par vidéo¹⁶. D'autres fois, j'utilisais une approche expérimentale plus classique avec des chariots et dispositifs enregistreurs ou aussi une expérience permettant de mesurer les réflexes des élèves au moyen de la théorie du MRUA (temps de chute d'une règle qui doit être rattrapée entre deux doigts ou entre les pieds). Ces séances de laboratoire ont été expérimentées avec succès dans mes classes depuis de nombreuses années. A tout le moins, j'ai la prétention de dire qu'elles ont suscité l'intérêt et la participation des élèves, même les plus réfractaires à la physique.

Conclusion

Les simulations informatisées peuvent éclairer des sujets de physique (mais aussi d'autres disciplines comme les mathématiques, la chimie, les sciences de la terre), sous un jour intéressant pour les élèves, à la fois ludique et de nature à développer leur faculté de raisonnement et de modélisation. Cependant, il convient de conserver des fondements réels lors de l'étude des sciences expérimentales. L'étude de la physique au gymnase est à mes yeux plus une formation structurée de l'esprit et l'exercice à la fois de l'ouverture d'esprit et de la rigueur qu'un apprentissage servile de lois qu'il conviendrait d'appliquer de mémoire. Les simulations que j'ai utilisées me semblent avoir contribué à cette fin. J'ai fait de très bonnes expériences avec les simulations *PHET* de l'Université de Colorado. Je me tiens disponible¹⁷ pour échanger éventuellement avec l'un ou l'autre des lecteurs de cet article.

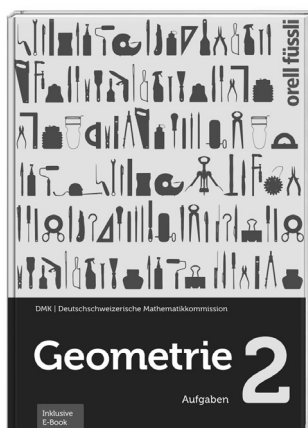
¹⁶ Logiciel *Logger Pro* proposé par Vernier (<https://www-vernier.com>)

¹⁷ jj.rochat@gmail.com

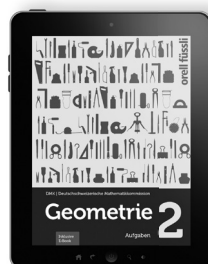
NEU

Geometrie 2

Der zweite Band des neuen DMK-Lehrmittels



+



DMK (Hrsg.)
Michael Graf, Heinz Klemenz

Geometrie 2

Aufgaben inkl. E-Book

1. Auflage 2019

160 Seiten, 18,3 x 26,5 cm, broschiert
978-3-280-04137-6, Fr. 32.–

Erhältlich Ende Februar 2019

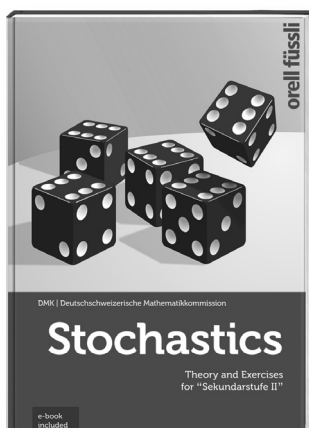
 **BLICK INS BUCH:**
www.ofv.ch/lermedien

«Geometrie 2» umfasst den gesamten Unterrichtsstoff für das Kurzzeitgymnasium und kann unabhängig vom ersten Band verwendet werden. Vielfältige Problemstellungen, Arbeitsweisen und Lösungsmethoden stehen im Zentrum der Aufgabensammlung. Jedes Kapitel enthält vermischte und weiterführende Aufgaben sowie numerische Lösungen, um das Gelernte zu festigen und ein Angebot an herausfordernden Fragestellungen zu bieten. Separat ist ein Lehrerband mit Lösungen, Kommentaren, kurzer Theorie, digitalen Vorlagen und E-Book erhältlich.

Inhaltsübersicht: Ähnlichkeit, Trigonometrie, Räumliche Geometrie, Vektoren, Analytische Geometrie

Stochastics

Die Eins-zu-eins-Übersetzung für den Immersionsunterricht



+



DMK (Hrsg.)
Eva Frenzel, Fabian Glötzner, Hansruedi Künsch,
Nora Mylonas, Hansjürg Stocker

Stochastics

**Theory and Exercises for «Sekundarstufe II»
e-book included**

1. Auflage 2019

184 Seiten, 18,4 x 26,5 cm, broschiert mit Klappe
978-3-280-04182-6, ca. Fr. 37.–

Erhältlich Mai 2019

 **BLICK INS BUCH:**
www.ofv.ch/lermedien

Das seit 2018 erhältliche DMK-Lehrmittel „Stochastik Theorie und Aufgaben für die Sekundarstufe II“ erscheint aufgrund des stetig zunehmenden bilingualen Unterrichts an Gymnasien auch in englischer Sprache. Die beiden Sprachversionen sind in Text und Gestaltung identisch und können parallel zueinander verwendet werden.

**Bestellen Sie online über
www.ofv.ch/lermedien**

orell füssli Verlag

Fixpunktfreie Permutationen — Aller guten Dinge sind drei

Peter Gallin, eh. Kantonsschule Zürcher Oberland und Universität Zürich, peter@gallin.ch

Nachdem nun auf kunstvolle Weise in den Bulletins Nr. 137 und Nr. 138 die Anzahl Permutationen berechnet wurde, bei denen kein Element auf seinem ursprünglichen Platz liegen bleibt — sog. fixpunktfreie Permutationen —, möchte ich eine dritte Berechnungsvariante vorstellen, welche auf nur einer Seite Platz findet. Ich habe sie von meinem Doktorvater Prof. Dr. Max Jeger † (ETH) gelernt.

Dazu betrachten wir die Menge Ω aller Permutationen von n Elementen und deren Mächtigkeit $\mu(\Omega) = n!$. Dann definieren wir die Menge A_i als die Menge derjenigen Permutationen, bei denen das i -te Element an seinem Platz sitzt. Dann ist $\overline{A_i}$ die Menge der Permutationen, bei denen das i -te Element nicht an seinem Platz sitzt. Die Mächtigkeiten der Permutationen, bei denen gewisse Elemente an ihrem Platz sitzen, lässt sich leicht berechnen: $\mu(A_i) = (n-1)!$, $\mu(A_i \cap A_j) = (n-2)!$ ($i \neq j$), $\mu(A_i \cap A_j \cap A_k) = (n-3)!$ ($i \neq j \neq k, i \neq k$), usw. bis $\mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = 1$.

Gesucht ist nun $f(n) = \mu(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}) =$ Mächtigkeit der Menge der Permutationen, bei denen weder das 1. noch das 2. noch ... noch das n -te Element an seinem Platz sitzt.

Nach der De Morganschen Regel gilt:

$$f(n) = \mu(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = \mu(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n}) = \mu(\Omega) - \mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

Nun kommt die sogenannte Ein- und Ausschaltregel zum Zug, mit der man die Mächtigkeit von Vereinigungsmengen berechnen kann:

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) - \sum_{i \neq j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ i \neq k}} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - + \dots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Da man die Anzahl Summanden in diesen Summen kennt und jeder Summand innerhalb einer Summe den gleichen, oben berechneten Wert hat, erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(n) &= n! - \left(n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - + \dots + (-1)^{n-1} \cdot 1 \right) = \\ &= n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + - \dots + (-1)^n \cdot 1 = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \approx \frac{n!}{e} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass eine beliebige Permutation fixpunktfrei ist, beträgt damit

$$p(n) = \frac{f(n)}{n!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \approx \frac{1}{e} \quad .$$

Erstaunlicherweise kann $f(n)$ für alle natürlichen n einfach dadurch berechnet werden, dass man $n!$ durch die Eulersche Zahl e dividiert und das Ergebnis auf die nächste ganze Zahl rundet.

Walser, Hans. Der Würfel, Ansichten, Dimensionen, Modelle. 113 Seiten, EUR 14.50, Edition am Gutenbergplatz Leipzig EAGLE, 2018, EAGLE 102, ISBN 978-3-95922-102-3

Der banale Würfel dient Hans Walser gleichsam als Kondensationskeim, um welchen sich andere Begriffe, Konzepte, Gedankengänge assoziativ anlagern. Dabei entsteht wie bei einem Kristall eine wunderbare Struktur mit vielen Facetten, die unerwartete Einsichten vermittelt und Gedanken aufblitzen lässt. Hier wird Elementarmathematik inszeniert, die Weite, Breite und Tiefe von Begriffen auslotet, mathematische Denk- und Werkzeuge einsetzt und unerwartete Beziehungen offenlegt. Leserin und Leser werden weit über das Lesen hinaus zum eigenen Denken und Tun aufgefordert und gründlich mit zugänglicher aber nicht-trivialer Mathematik benetzt.

Kurz zum Inhalt:

- *Die Einführung* tippt die Begriffe Dimension, Farbwürfel, Symmetrien des Würfels, Weltkarten auf einem Würfel, räumliches Schachbrett und die Konstruktion eines hohlen Würfels aus sechs kongruenten Holzplatten an.
- *Wege und Streifen* handelt von extremalen Verbindungen zwischen Punkten auf dem Würfel.
- *Darstellungen* führt ein in verschiedene Projektionsarten und schematische Darstellungen für Würfel.
- *Hyperwürfel* führt Würfel ein in Dimensionen über drei mit Fragen zur Kombinatorik und zur Darstellung und einer Anwendung in der Kodierungstheorie mit der Hammingdistanz auf dem Hyperwürfel.
- In *Würfel und Kugeln* kommen Inkugel, Umkugel und Kantenberührkugel zur Sprache, ebenso wie Kugelpackungen und der bekannte Spielwürfel, der ein Zwitter zwischen Würfel und Kugel ist.
- Nicht fehlen darf das Problem der *Würfelverdoppelung*, was einen Abstecher ins 3D-Origami motiviert.

Eines von Walsers Markenzeichen sind die sorgfältig konzipierten *Aufgaben*, welche oft als Lernaufgaben Gedanken aus dem Text aufnehmen, variieren, weiterspinnen. Zudem setzt Walser auf Materialisierung mit dem Bau von *Modellen*, die Einsichten und Erfahrungen vermitteln, fassbare Mathematik eben aus der Welt der Gegenstände als Kontrast zur bloss denkbaren Ideenwelt der Mathematik.

Ein Literaturverzeichnis und Hinweise auf Websites, Abbildungsverzeichnis und Verzeichnisse für Namen und Stichworte beschliessen den Text.

Hans Walser bezeugt ein weiteres Mal sein didaktisches Flair und seine Affinität zur Welt der Dinge und zur Welt der Gedanken in der Geometrie. So kann er vielen als Wegweiser für einen anregenden und aufbauenden Unterricht dienen, der auch jene erreicht, denen die idealen Denkmäler der Mathematik kaum zugänglich sind.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Náboj - Mathematikteamwettbewerb für Gymnasiasten

Nina Stumpf, ETH, stumpfn@student.ethz.ch

Ondrej Budac, Google, ondrob@gmail.com

Marek Tesar, Google, tesulo@gmail.com

***Jahr 2018, Aufgabe 4:** Laura und Marie stehen auf einem Marktplatz und zählen im Uhrzeigersinn alle rundherum angrenzenden Häuser. Als Startpunkt hat sich jede ein anderes Haus gewählt, so dass Lauras Haus Nummer 4 dasselbe ist wie Maries Haus Nummer 16 und Lauras Nummer 12 dasselbe ist wie Maries Nummer 7. Wie viele Häuser grenzen an den Marktplatz?*

Das ist eine der 55 Aufgaben, die Teilnehmer an Náboj 2018 bearbeiteten. Der internationale Wettbewerb dauert 120 Minuten, in denen Teams à fünf Gymnasiasten so viele Aufgaben wie möglich zu lösen versuchen. Der Schwierigkeitsgrad steigert sich fortlaufend, je länger je mehr sind eigene Ideen und Kreativität gefordert, es geht um mehr als die Anwendung erlernter Methoden.

2019 wird der Wettbewerb erstmals auch in der Schweiz stattfinden - vielleicht mit einem Team fünf Ihrer SchülerInnen?

1 Ablauf des Wettbewerbs

Vor Beginn des Wettbewerbs erhält jedes Team einen geschlossenen Umschlag mit den ersten sechs Aufgaben. Sobald es los geht, dürfen sie diesen öffnen und beliebige der Aufgaben bearbeiten. Ausser Schreibzeug und Zeichenutensilien sind keine weiteren Hilfsmittel erlaubt.

Die Lösung ist üblicherweise eine einzelne Zahl. Das Resultat ist auf dem Aufgabenzettel zu notieren und beim Kontrollpunkt vorbeizubringen. Ist die Lösung korrekt, erhält das Team eine neue Aufgabe. Sonst kann die Lösung korrigiert werden, bei zu vielen Versuchen kann eine Erklärung der Lösung verlangt werden.

Es gewinnt das Team mit den meisten gelösten Aufgaben. Preise werden auf lokaler Ebene vergeben, während dem Wettbewerb wird aber die Live-Rangliste über sämtliche Austragungsorte angezeigt, um den internationalen Charakter des Anlasses erlebbar zu machen. Die Rangverkündigung findet direkt anschliessend an den Wettbewerb statt.

2 Wie Náboj sich entwickelte

Náboj wurde erstmals 1998 in Bratislava (Slowakei) durchgeführt. Damals wurde auf einer Pinnwand (slowakisch *nástenka*) Buch geführt über die Anzahl gelöster Aufgaben, deshalb auch der Name *Náboj*, der eine Kurzform ist von *nástenkový boj*, was so viel heisst wie Pinnwandwettkampf. Dass das Wort auch Projektil bedeutet, ist kein Zufall, sondern unterstreicht die Rolle der Geschwindigkeit.

2005 wurde nach Prag (Tschechien) expandiert, seitdem wuchs der Wettbewerb exponentiell. Wegen der grossen Beliebtheit kamen 2012 zwei weitere Städte in Tschechien und der Slowakei hinzu. Richtig international wurde es 2014, als Passau (Deutschland) hinzukam. Ein Jahr später folgten Budapest

(Ungarn), Krakau (Polen) und Linz (Österreich), im Jahr darauf vier weitere Städte, 2017 mit Edinburgh (Schottland) der bisher westlichste Austragungsort und 2018 mit Constanta (Rumänien) der bisher östlichste. 2018 fand Náboj somit in 15 Städten in 8 Ländern statt - und 2019 nun auch in Zürich!

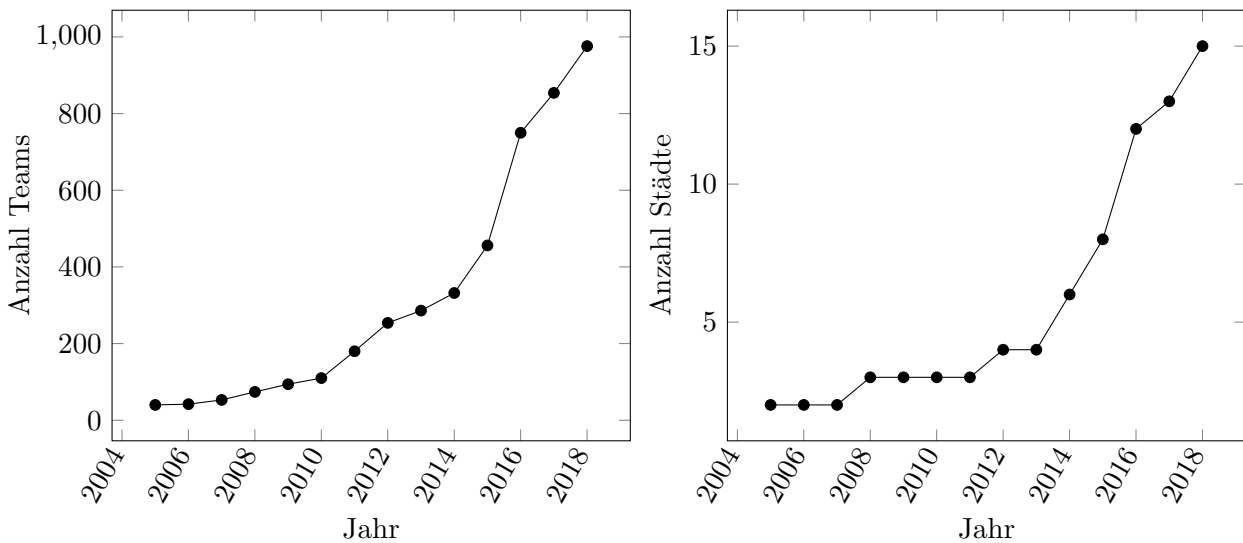


Abbildung 1 – Wachstum von Náboj über die Jahre.

3 Beispielaufgaben

Jahr 2018, Aufgabe 4 (Artikelanfang)

Ergebnis: 17

Lösungsweg: Da Lauras Haus Nummer 4 dasselbe ist wie Maries Haus Nummer 16, gibt es bei der Zählung der Häuser einen Abschnitt, in dem Maries Nummern um 12 grösser sind als Lauras Nummern. Allerdings muss dieser Abschnitt an Häusern enden, bevor Laura ihr zwölftes Haus erreicht, weil dieses Haus ja sonst in Maries Zählung die Nummer $12 + 12 = 24$ hätte. Der Unterschied zwischen dieser Zahl 24 und der tatsächlich von Marie gezählten Nummer 7 gibt die Anzahl der Häuser an. Also grenzen $24 - 7 = 17$ Häuser an den Marktplatz an.

Jahr 2017, Aufgabe 2: Ein Rechteck ist wie abgebildet in neun kleinere Rechtecke unterteilt. Die Zahl, die in einem kleinen Rechteck steht, gibt den Umfang dieses kleinen Rechtecks an. Welchen Umfang hat dann das grosse Rechteck?

	9	
14	10	17
	12	

Ergebnis: 42

Lösungsweg: Bei einem Blick auf die Abbildung erkennt man Folgendes: Der Umfang des grossen Rechtecks ist gleich der Summe der Umfänge der vier äusseren kleinen Rechtecke, bei denen der

Umfang gegeben ist, minus den Umfang des kleinen Rechtecks in der Mitte. Also ist die Antwort $14 + 9 + 17 + 12 - 10 = 42$.

Jahr 2016, Aufgabe 8: Ein Tag soll Glückstag heissen, wenn sein im Format $TT.MM.JJJJ$ geschriebenes Datum aus acht verschiedenen Ziffern besteht. Dabei steht TT für den Tag, MM für den Monat und $JJJJ$ für das Jahr, wobei Tage und Monate unter 10 mit führender Null geschrieben werden. Beispielsweise war der 26.04.1785 ein Glückstag. Wann wird vom heutigen Tag aus gesehen der nächste Glückstag sein?

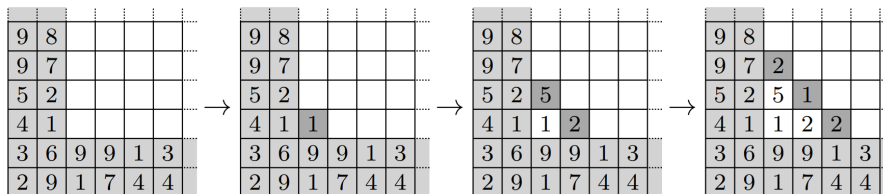
Ergebnis: 17.06.2345

Lösungsweg: In allen kommenden Jahren der Form 20^{**} kann es keinen Glückstag geben, denn es lässt sich kein passender Monat finden. Sollen Jahre 21^{**} zu einem Glückstag führen, so muss der Monat eine 0 enthalten, weshalb es dann unmöglich wird, einen geeigneten Tag zu finden. Nun werden Jahre der Form 23^{**} betrachtet. Der Monat eines Glückstages muss dann eine 0 enthalten und der Tag muss folglich mit 1 beginnen. Als nächstgelegenes Jahr kommt 2345 mit dem Monat 06 in Frage. Indem man noch die 17 als Tag setzt, erhält man den 17.06.2345 als den gesuchten Glückstag.

Jahr 2018, Aufgabe 33: In jede Zelle einer Tabelle der Grösse 2018×2018 soll eine Zahl aus $\{1, 2, \dots, 9\}$ geschrieben werden, so dass in jedem Quadrat der Grösse 3×3 die Summe der darin enthaltenen Zahlen durch 9 teilbar ist. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, um dies zu erreichen?

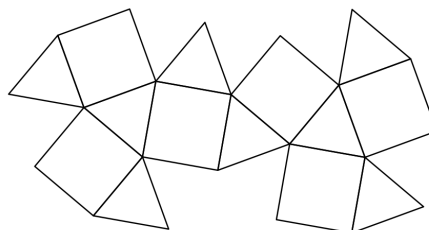
Ergebnis: 9^{8068}

Lösungsweg: Jede Füllung der 8068 Zellen, welche die zwei untersten Reihen und die ersten zwei Spalten am linken Rand bilden, legt die gesamte Füllung fest, da die übrigen Zahlen in aufeinander folgenden Diagonalen eindeutig bestimmt sind. Ein Beispiel dafür ist in der Abbildung zu sehen.



Offensichtlich legt jedes korrekte Füllen der 2018×2018 Tabelle auch eine Füllung dieser 8068 Zellen am Rand fest. Daher entspricht die Anzahl der beliebigen Füllungen dieser Zellen der Anzahl der Möglichkeiten, die gesamte Tabelle zu füllen. Die gesuchte Anzahl ist also 9^{8068} .

Jahr 2016, Aufgabe 37 Das Netz eines Körpers besteht aus acht regelmässigen Dreiecken und sechs Quadraten, wie in der Abbildung zu sehen ist:



Angenommen die Länge jeder Kante beträgt 1 km. Wie gross ist das Volumen des Körpers in km^3 ?

Ergebnis: $\frac{5}{3}\sqrt{2}$

Lösungsweg: Der beschriebene Körper kann wie folgt aus einem Würfel entstehen: Jede Ecke des Würfels wird so weggeschnitten, dass der Schnitt durch die Mittelpunkte der benachbarten Kanten verläuft. Der Würfel besitzt also die Kantenlänge $\sqrt{2}$ und somit das Volumen $2\sqrt{2}$. Die weggeschnittenen Körper haben die Form von (schiefen) Pyramiden mit einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche. Die Kathetenlänge dieses Dreiecks beträgt $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und auch die Höhe beträgt $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Das Volumen einer weggeschnittenen Pyramide beträgt daher $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{24}$. Damit ist das Volumen des gegebenen Körpers $2\sqrt{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{24} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$.

4 WE LIKE NABOJ

Zum "wir" zählen hoffentlich auch Sie schon. Bevor Sie nun Ihre SchülerInnen zur Teilnahme motivieren noch einige Informationen zur Durchführung des Wettbewerbs:

Datum 22. März 2019

Zeit 11:00 bis 15:00

Ort ETH Zürich, Gebäude LEE, Raum E101

Anmeldung als 5er-Team, offiziell ab dem 18.02.2019 über math.naboj.org

Teilnahmeberechtigt sind sämtliche SchülerInnen Schweizer Gymnasien. Die Aufgaben werden jedoch ausschliesslich auf Deutsch zur Verfügung gestellt und sind vom Schwierigkeitsgrad her auf die letzten beiden Jahre vor der Matura ausgelegt.

Und nun zum Abschluss:

Jahr 2017, Aufgabe 48 Von dem Kryptogramm $WE \cdot LIKE = NABOJ$ sind folgende Eigenschaften bekannt: Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedene Ziffern und keine der Zahlen beginnt mit der Ziffer Null. Bezeichnet man mit $Q(n)$ die Quersumme einer natürlichen Zahl n , so gilt $Q(WE) = 11$, $Q(LIKE) = 23$ und $Q(NABOJ) = 19$. Bestimme als Lösung die fünfstellige Zahl, die sich hinter $NABOJ$ verbirgt.

Die Lösung zur Aufgabe findet sich im Archiv auf der Webseite. Ganz so gross wie die gesuchte Zahl wird das Interesse an Náboj wohl nicht sein, wir können aber sehr schlecht einschätzen, wie gross und wie gut der Informationsfluss funktioniert, deshalb wären wir froh um **provisorische Anmeldungen per E-Mail an info-ch@math.naboj.org** sobald wie möglich. Unter dieser Adresse stehen wir auch für Fragen zu Verfügung.

Links

[1] *Offizielle Webseite von Náboj* (math.naboj.org)

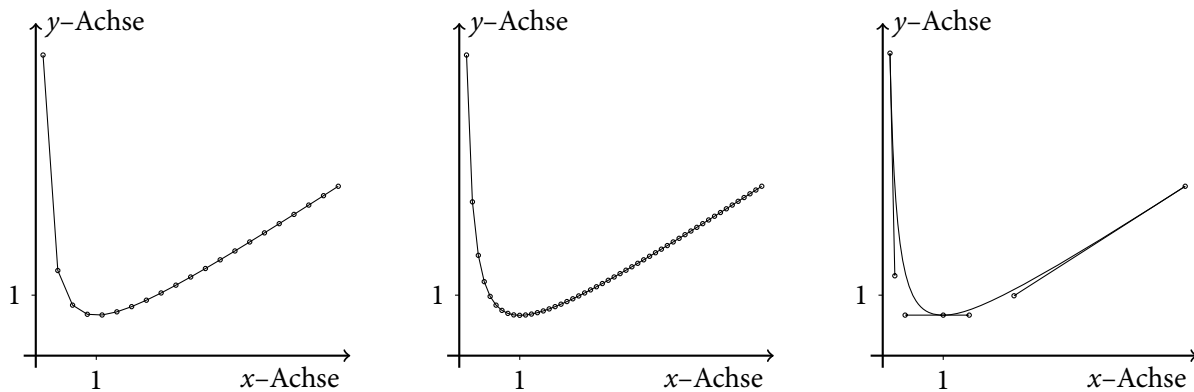
Approximation von Funktionsgraphen mit kubischen Bézierkurven

Linus Romer, Kantonsschule Glarus, linus.romer@gmx.ch

1 Motivation

Damit Funktionsgraphen in befriedigender Qualität in Vektorgraphiken dargestellt werden können, müssen oft viele Punkte in der Vektorgraphikdatei abgespeichert werden. Wenn man die Funktionsgraphen mit kubischen Bézierkurven approximiert, können häufig enorm viele Punkte eingespart werden, wodurch sich der Speicherbedarf verringert.

Im Folgenden soll als Beispiel der Graph der Funktion $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{3x}$ im Bereich $x \geq 0$ und $y \leq 5$ dargestellt werden:



In der linken Darstellung wurden 21 Graphenpunkte in konstanter Horizontalabstand berechnet und durch einen Streckenzug verbunden. In der mittleren Darstellung wurde die Zahl der Graphenpunkte auf 51 erhöht. In der rechten Darstellung wurde der Graph durch zwei kubische Bézierkurven approximiert. Dafür wurden nur 7 Punkte benötigt.

Bei der Approximation ist es sinnvoll, Extrema und Wendepunkte als mögliche Zwischenpunkte in Betracht zu ziehen. Extrema helfen bei der Berechnung des optimalen Begrenzungsrechtecks der Vektorgraphik und haben für einige auf Gymnasialstufe gebräuchliche Funktionstypen (Parabeln, Hyperbeln, Sinuskurven etc.) betragsmässig maximale Krümmung. Umgekehrt haben Wendepunkte betragsmässig minimale Krümmung.

Der Autor hat ein Lua-Programm und ein dazugehöriges \LaTeX -Paket namens `bezierplot` [1] geschrieben, welches Graphen von zweifach differenzierbaren Funktionen durch kubische Bézierkurven approximiert. Dieser Artikel nimmt jedoch nur am Rande und am Ende Bezug auf `bezierplot`.

2 Polynomfunktionen bis 3. Ordnung

Graphen von Funktionen der Art $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit reellen Koeffizienten a , b , c und d können zwischen zwei beliebigen Graphenpunkten P und S *exakt* als kubische Bézierkurve dargestellt werden!

Dazu wählen wir die Kontrollpunkte Q und R so, dass $x_Q - x_P = x_S - x_R = \frac{1}{3}(x_S - x_P)$ gilt und Q auf der Tangente in P und R auf der Tangente in S liegen (siehe Abbildung rechts). Als Beweis verwendet man die oben genannten Bedingungen

$$\begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_P + \frac{1}{3}x_S \\ y_P + \frac{1}{3}(x_S - x_P)(3ax_P^2 + 2bx_P + c) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_P + \frac{2}{3}x_S \\ y_S + \frac{1}{3}(x_P - x_S)(3ax_S^2 + 2bx_S + c) \end{pmatrix}$$

sowie

$$y_P = ax_P^3 + bx_P^2 + cx_P + d$$

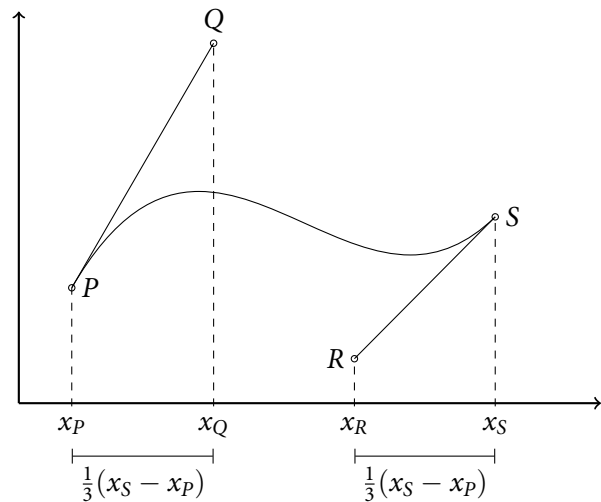
und

$$y_S = ax_S^3 + bx_S^2 + cx_S + d$$

und die Parametrisierung

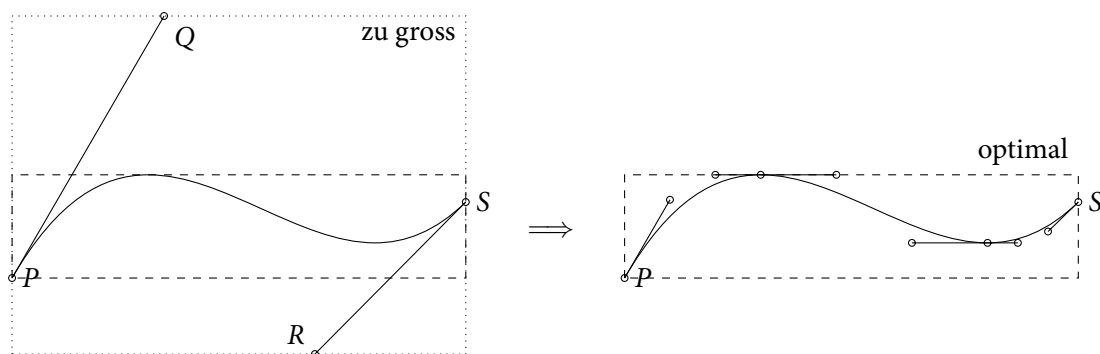
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} x_R \\ y_R \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$$

der kubischen Bézierkurve. Dadurch kann man die parametrische Darstellung der y -Koordinate wie gewünscht in $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ umformen. Das Zwischenresultat $x = (1-t)x_P + tx_S$ zeigt nebenbei, dass die Bézierkurve eine konstante Horizontalgeschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ hat.



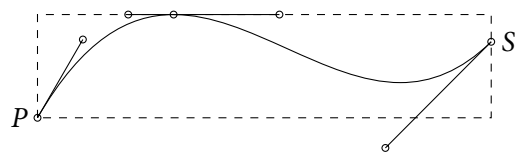
2.1 Unterteilungen in den Extrema als Hilfe für ein optimales Begrenzungsrechteck

Manche Vektorgraphikprogramme (beispielsweise das im Zusammenhang mit \LaTeX gebräuchliche TikZ) berechnen das Begrenzungsrechteck (engl. bounding box) von Bézierkurven einzig aufgrund der darin aufgeführten Punkte und Kontrollpunkte. Der abgebildete Graph hätte dann unnötigerweise ein zu grosses Begrenzungsrechteck (siehe folgende Abbildung links):

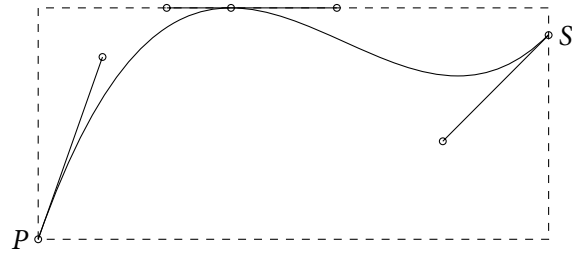


Ein möglicher Trick, um das Unvermögen dieser Programme zu umgehen, ist oben rechts abgebildet: Man unterteilt den Graphen mithilfe der lokalen Extrema in weitere Abschnitte. (In TikZ bestünde auch die Möglichkeit, mit `\clip` vorher manuell ein Begrenzungsrechteck festzulegen.)

Im vorherigen rechten Beispiel, welches den Graphen $\{(x, y) \mid y = 0.15 \cdot (x - 1.7)^2 \cdot (x - 4.7) + 2, 0.5 \leq x \leq 4.5\}$ zeigt, könnte man vielleicht auf die Idee kommen, dass die Unterteilung im Tiefpunkt unnötig ist. Ohne diese Unterteilung würde jedoch ein Kontrollpunkt ausserhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks liegen (siehe Abbildung rechts).



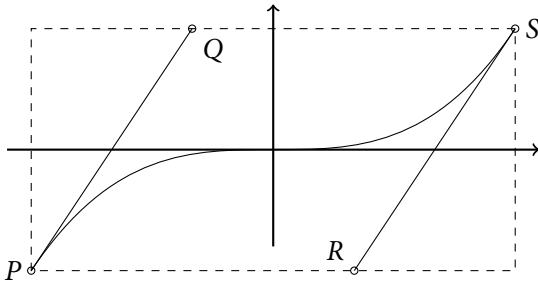
Tatsächlich muss man aber nicht immer bei allen dazwischenliegenden Extrema unterteilen, wie der im Vergleich zu vorher links erweiterte Graph $\{(x, y) \mid y = 0.15 \cdot (x - 1.7)^2 \cdot (x - 4.7) + 2, 0 \leq x \leq 4.5\}$ zeigt (siehe Abbildung rechts).



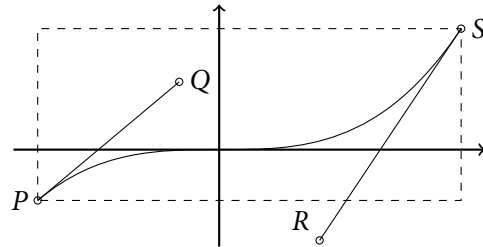
2.2 Unterteilung im Wendepunkt als Hilfe für ein optimales Begrenzungsrechteck

Eine Unterteilung im Wendepunkt kann sinnvoll sein, damit die Kontrollpunkte im optimalen Begrenzungsrechteck liegen. Wir schauen dazu im Folgenden einige Beispiele an:

Wenn zwischen den Randpunkten P und S ein Sattelpunkt liegt, ist das optimale Begrenzungsrechteck genau dann durch P und S als Eckpunkte gegeben, wenn der Sattelpunkt der Mittelpunkt von P und S ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir ohne Einschränkung den Sattelpunkt im Ursprung an und setzen $x_P < 0 < x_S$, sowie $|x_P| \leq |x_S|$. Der Graph wird dann durch $y = ax^3$ beschrieben mit $a \neq 0$.



Symmetrischer Fall: Q und R liegen innerhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks

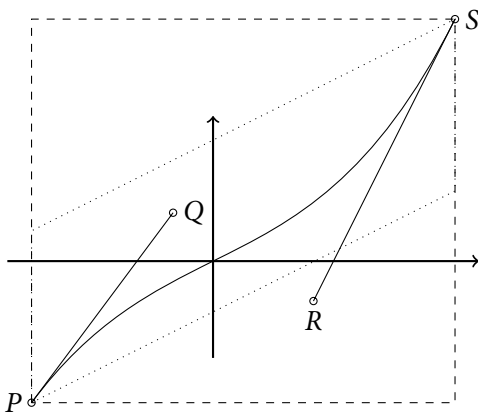


Asymmetrischer Fall: R liegt ausserhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks

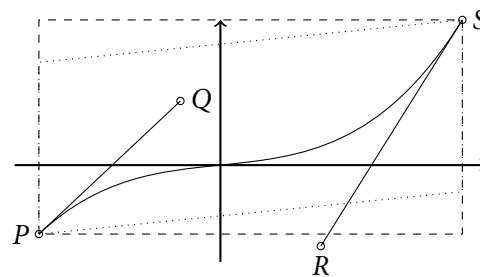
Wegen der Tangentialität gilt $\frac{y_S - y_R}{x_S - x_R} = 3ax_S^2$ und somit besitzt der Kontrollpunkt R die y -Koordinate $y_R = ax_S^3 - ax_S^2(x_S - x_P) = ax_S^2 x_P$.

y_R hat also das selbe Vorzeichen wie y_P und ist wegen $|ax_S^2 x_P| \geq |ax_P^3|$ auch betragsmässig mindestens so gross wie y_P . Die Gleichheit $y_R = y_P$ besteht nur im symmetrischen Fall $|x_P| = |x_S|$.

Je nach dem, wie stark wir das oben rechts abgebildete asymmetrische Beispiel vertikal scheren, liegen die Kontrollpunkte innerhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks oder eben nicht:



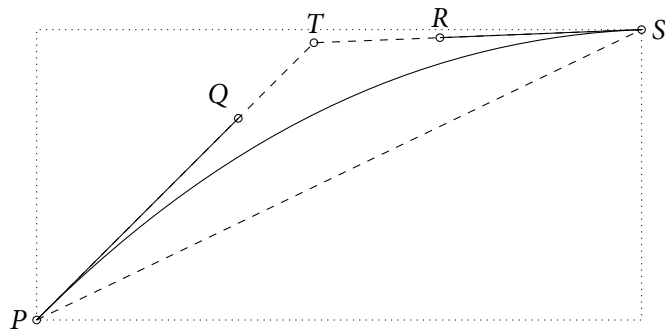
Starke vertikale Scherung: R liegt im optimalen Begrenzungsrechteck



Schwache vertikale Scherung: R liegt ausserhalb des optimalen Begrenzungsrechtecks

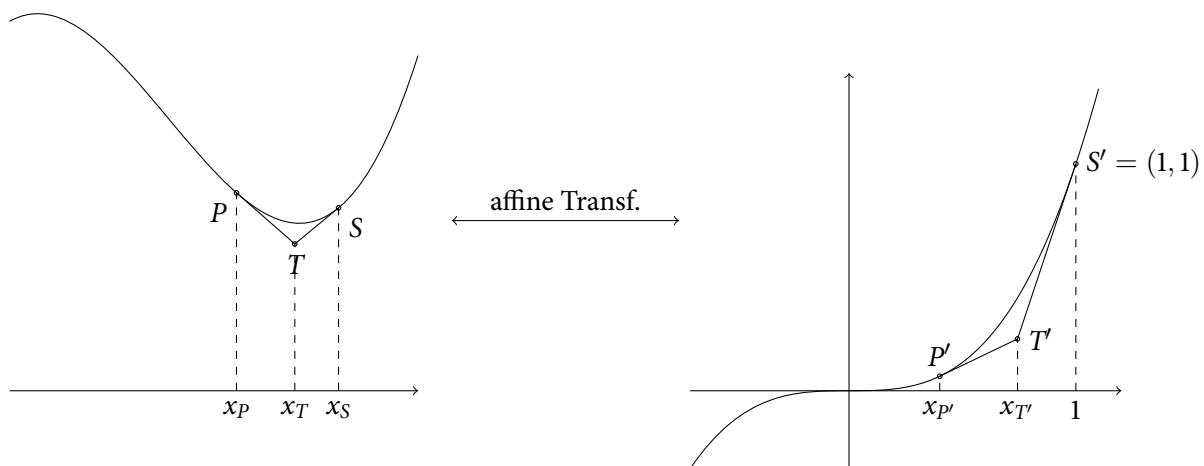
2.3 Unterteilungen in Extrema und im Wendepunkt

Man kann auf jeden Fall sagen, dass alle Kontrollpunkte innerhalb des Begrenzungsrechtecks liegen, wenn der Graph in jedem Extremum und Wendepunkt unterteilt wird. Um dies zu zeigen, schauen wir das Dreieck an, das durch die Abschnittsenden P und S und den Schnittpunkt T derer Tangenten gebildet wird (siehe Abbildung rechts). Durch unsere Unterteilung ist gewährleistet, dass innerhalb eines Abschnittes das Krümmungsvorzeichen und das Steigungsvorzeichen nicht wechselt.



Wenn wir nun zeigen können, dass die x -Koordinate von T tatsächlich zwischen den x -Koordinaten der Kontrollpunkte Q und R liegt, folgt daraus einerseits, dass der Kurvenabschnitt innerhalb des Dreiecks PST liegt und andererseits, dass die y -Koordinate von T zwischen den y -Koordinaten von P und S liegt und somit die Kontrollpunkte Q und R innerhalb des von P und S aufgespannten Begrenzungsrechtecks liegen.

Wir zeigen nun sogar noch etwas allgemeiner als vorhin gefordert, dass die x -Koordinate x_T des Tangentenschnittpunkts T zwischen den x -Koordinaten x_Q und x_R der Kontrollpunkte Q und R liegen, wenn P und S auf der gleichen horizontalen Seite des Wendepunkts liegen oder einer der beiden Punkte P oder S der Wendepunkt ist. Dazu bilden wir den Graphen der Ausgangsfunktion $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mithilfe einer affinen Transformation auf $y = x^3$ so ab, dass P oder S auf $(1, 1)$ zu liegen kommt. Konkret geschieht das durch die Verschiebung des Wendepunkts auf den Ursprung, durch eine anschließende vertikale Scherung, sodass der Wendepunkt zum Sattelpunkt wird, und durch darauffolgende horizontale und vertikale Streckungen. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass S auf $(1, 1)$ abgebildet wird, $x_{P'}$ ist dann automatisch ≥ 0 .



Die Tangenten in S' respektive P' können mittels $y = 3x - 2$ respektive $y = x_{P'}^2(3x - 2x_{P'})$ beschrieben werden. Dadurch erhält man $x_{T'} = \frac{2}{3} \left(\frac{x_{P'}^2 + x_{P'} + 1}{x_{P'} + 1} \right)$ und somit das Verhältnis

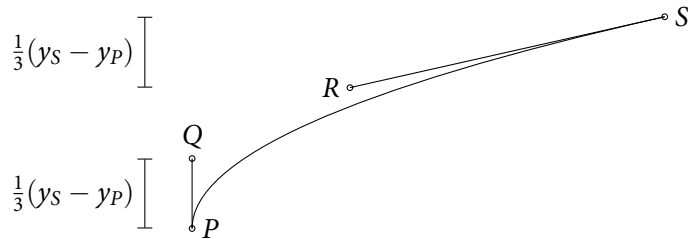
$$\frac{x_{T'} - x_{P'}}{x_{S'} - x_{P'}} = \frac{x_{P'} + 2}{3(x_{P'} + 1)}.$$

Die Verhältnisfunktion $\frac{x_{P'} + 2}{3(x_{P'} + 1)}$ liegt im Bereich $0 \leq x_{P'} \leq 1$ zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, somit ist auch $\frac{1}{3} < \frac{x_{T'} - x_{P'}}{x_{S'} - x_{P'}} < \frac{2}{3}$. Da affine Transformationen Teilverhältnisse bewahren, haben wir unsere Behauptung bewiesen:

$$\frac{1}{3} < \frac{x_T - x_P}{x_S - x_P} < \frac{2}{3}$$

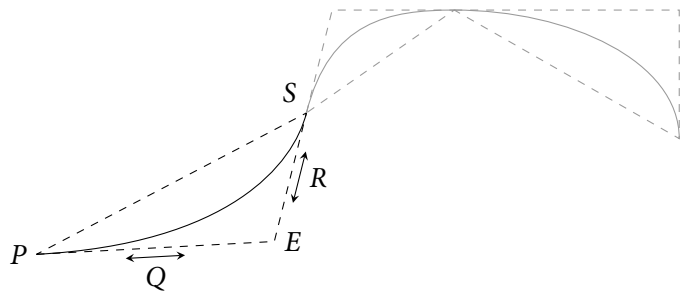
3 Umkehrfunktionen von Polynomfunktionen bis 3. Ordnung

Eine Funktion, deren Umkehrung eine Polynomfunktion der Ordnung ≤ 3 ist, kann automatisch auch exakt als kubische Bézierkurve dargestellt werden. Die Kontrollpunkte Q und R müssen dann so gewählt werden, dass $y_Q - y_P = y_S - y_R = \frac{1}{3}(y_S - y_P)$ und Q auf der Tangenten in P und R auf der Tangenten in S liegen. Das rechte Beispiel zeigt den Graphen von $y = \sqrt{x}$.



4 Weitere zweifach differenzierbare Funktionen

Nach einer Unterteilung des Graphen durch Extrema und Wendepunkte befinden sich die zu approximierenden Kurventeile jeweils innerhalb nichtspitzwinkliger Dreiecke, welche durch die Tangenten gegeben sind. Unter Variation von Q respektive R über die Strecke \overline{PE} respektive \overline{SE} kann man Q und R so bestimmen, dass der Fehler der Bézierkurve zum Funktionsgraphen minimal wird.



Dabei sollte bewusst darauf verzichtet werden, Q oder R jenseits von E zu positionieren. Denn dann könnte die Bézierkurve plötzlich zusätzliche Extrema oder Wendepunkte aufweisen, welche der originale Graph nicht besitzt. (Ohne genauere Analyse wissen wir nur, dass Bézierkurven sicherlich innerhalb der konvexen Hülle des Kontrollpolygons liegen [5].)

Wenn der minimale Fehler der Bézierkurve zum Funktionsgraphen zu gross ist, kann man rekursiv den Graphen in weitere Teile unterteilen.

Natürlich besteht die Möglichkeit, dass der Fehler der Bézierkurve zum Funktionsgraphen noch kleiner wird, wenn die Tangentialität in P und S aufgegeben wird. Dadurch hätte die Bézierkurve allerdings Extrema und Wendepunkte eventuell an einem anderen Ort als der originale Graph.

Statt mit der oben genannten Variation könnte man P und Q direkt so berechnen, dass die Bézierkurve zusätzlich auch in der 2. Ableitung übereinstimmt.

Für Graphen, welche stark gekrümmte Extrema haben, ist eine Bézierkurven-Approximation üblicherweise visuell klar im Vorteil gegenüber einer Streckenzug-Approximation. Im folgenden Beispiel wird der Graph $\{(x, y) \mid y = 5e^{-\frac{x^2}{2}}, -5 \leq x \leq 5\}$ mit 19 Punkten links mit Bézierkurven und rechts mit einem Streckenzug approximiert:



5 Das Programm `bezierplot` und vergleichbare Programme

Funktionsplotter wie `gnuplot` [2], der in TikZ implementierte Plotter [3] oder der Funktionsplotter des Vektorgraphikprogramms *Inkscape* [4] können Graphen zwar durch kubische Bézierkurven glätten ohne aber «unnötige» Graphenpunkte zu entfernen.

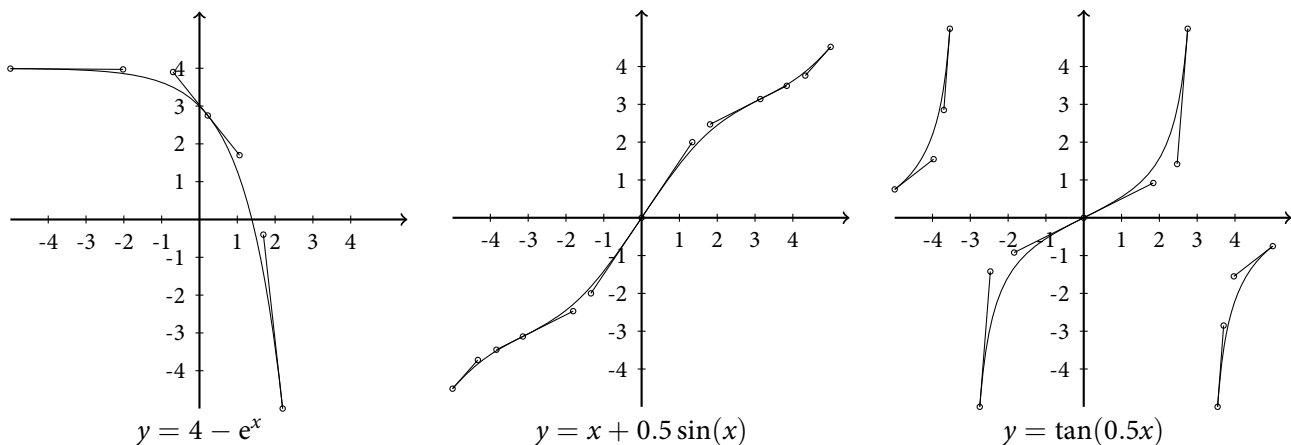
`bezierplot` ist ein auf den in diesem Artikel vorgestellten Grundlagen erstelltes Programm. Um `bezierplot` direkt mit Lua \LaTeX nutzen zu können, wurde es in der Programmiersprache Lua geschrieben (ausserdem ist Lua im Vergleich zu anderen Skriptsprachen schnell). Als Eingabe erwartet `bezierplot` einen Funktionsterm wie " x^2 " und allenfalls Angaben über das x - und das y -Intervall. Der ausgegebene Pfad entspricht der Notation von TikZ bzw. METAPOST.

Eingabe	Ausgabe im Bereich $(x, y) \in [-5, 5]^2$
<code>sqrt(x)</code>	<code>(0,0) .. controls (0,0.7454) and (1.66667,1.4907) .. (5,2.2361)</code>
<code>1.1*x+1.9</code>	<code>(-5,-3.6) -- (2.8182,5)</code>

Bei der Verwendung des (Lua) \LaTeX -Pakets wird die Ausgabe üblicherweise direkt an TikZ bzw. METAPOST weitergeleitet und bleibt verborgen.

5.1 Einige Beispielgraphen

Die folgenden Graphen wurden mit `bezierplot` approximiert. Aus Visualisierungsgründen wurden die Punkte der Bézierkurve zusätzlich hervorgehoben.



Literatur

- [1] Romer, Linus. *bezierplot* (\LaTeX -Paket mit Dokumentation auf ctan.org/pkg/bezierplot), 2018
- [2] Williams, Thomas und Kelley, Colin. *gnuplot 4.2 – An Interactive Plotting Program*, 2004
- [3] Tantau, Till. *The TikZ and PGF Packages*, 2015
- [4] Bah, Tavmjong. *Inkscape: Guide to a Vector Drawing Program*, 2017
- [5] K. A. Semendjajew et al. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teubner, 2003

IMO, Parität, Gleichdick und Archimedische Spirale

Hans Walser, hwalser@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

Worum geht es?

Eine kleine Erweiterung einer IMO-Aufgabe führt zu einem Paritätsproblem, zu Kurven mit konstantem Durchmesser und zu einer Art archimedischer Spiralen.

Problemstellung

An der IMO 2011 in Amsterdam wurde folgende Aufgabe gestellt [1]:

Aufgabe 2. Sei S eine endliche Menge von mindestens zwei Punkten in der Ebene. Dabei wird angenommen, dass keine drei Punkte von S kollinear sind. Als Windmühle bezeichnen wir einen Prozess der folgenden Art. Wir starten mit einer Geraden l , die genau einen Punkt P von S enthält. Die Gerade l wird im Uhrzeigersinn um den Drehpunkt P so lange gedreht, bis sie zum ersten Mal auf einen weiteren Punkt aus S , der mit Q bezeichnet sei, trifft. Die Gerade wird weiter im Uhrzeigersinn mit Q als neuem Drehpunkt gedreht, bis sie wieder auf einen Punkt aus S trifft. Dieser Prozess wird unbegrenzt fortgesetzt.

Man beweise, dass für geeignete Wahl eines Punktes P von S und einer Ausgangsgeraden l , die P enthält, die resultierende Windmühle jeden Punkt aus S unendlich oft als Drehpunkt hat.

Die Aufgabe und ihre Lösung werden von Arnaud (2018) diskutiert.

Und nun die Erweiterung: Wir wählen auf der Geraden l einen beliebigen Punkt B und fragen nach der Bahnkurve von B beim Windmühlenprozess.

Bearbeitung

Die Bahnkurve verhält sich völlig unterschiedlich je nach der Parität der Anzahl der Punkte in S . Zu Paritätsfragen siehe Jaggi (2018).

Für eine ungerade Anzahl von Punkten ergibt sich eine geschlossene Kurve. Diese hat überall denselben Durchmesser.

Für eine gerade Anzahl von Punkten ergibt sich ein Verhalten nach der Art einer archimedischen Spirale.

Ungerade Anzahl von Punkten

Die Abbildung 1a zeigt ein Beispiel für fünf Punkte. Es sind sämtliche Positionen der Geraden l eingezeichnet, wo diese beim Windmühlenprozess durch zwei der fünf Punkte geht. In diesen Positionen wechselt der Drehpunkt.

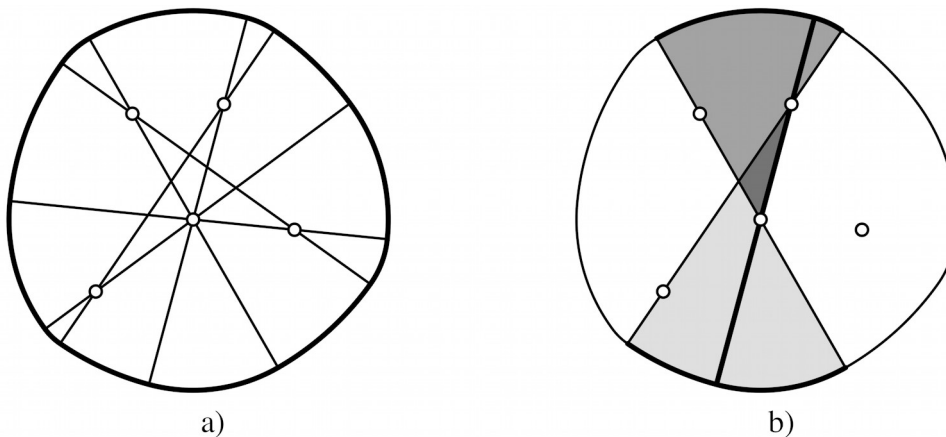


Abb. 1: Beispiel für fünf Punkte

Bei einer ungeraden Anzahl von Punkten verläuft die Gerade l nach einer Drehung um 180° wieder durch denselben Punkt von S (Arnaud 2018, S. 29). Daher gibt es zu jedem durch die Bahnkurve definierten Kreis-sektor einen Gegensektor mit dem Scheitelwinkel als Sektorwinkel. Die Radien der beiden Sektoren sind verschieden. Beim Übergang von einem solchen Sektorenpaar zum benachbarten Sektorenpaar (Abb. 1b) wird aber die Summe der beiden Sektorradien übernommen. Daher ist die Kurve geschlossen und hat überall den gleichen Durchmesser. (Falls der Punkt B zu nahe an den gegebenen Punkten aus S liegt, ist die Kurve nicht konvex und die Frage nach dem „Durchmesser“ muss diskutiert werden. Das Problem kann behoben werden, indem wir mit dem Punkt B nach aussen fahren.)

Kurven mit konstantem Durchmesser wurden von Euler als *Orbiforme* bezeichnet. Der Schülerinnenausdruck dafür ist *Gleichdick*. Das bekannteste Beispiel ist (nach dem Kreis) das Reuleaux-Dreieck. Der Umfang der Orbiforme ist Durchmesser mal π .

Gerade Anzahl von Punkten

Die Abbildung 2a zeigt ein Beispiel für vier Punkte.

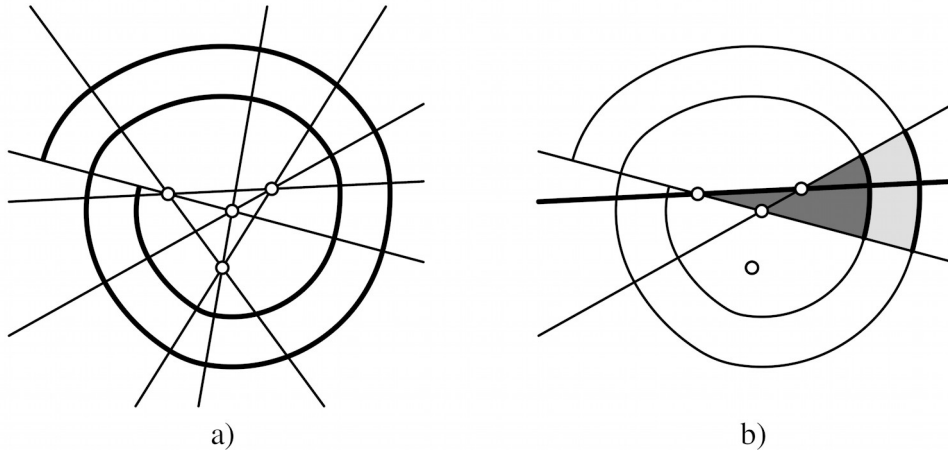


Abb. 2: Beispiel für vier Punkte

Bei einer geraden Anzahl von Punkten verläuft l erst nach einer Drehung um 360° wieder durch denselben Punkt von S . Wir erhalten daher nicht Gegensektoren, sondern gleichliegende Sektoren (Abb. 2b). An der Schnittstelle zum benachbarten Sektorenpaar wird die Radiendifferenz weitergegeben. Daher erhalten wir eine spiralförmige Kurve mit überall demselben Abstand zwischen zwei Kurvendurchgängen. Das einfachste Beispiel dazu ist die archimedische Spirale.

Links

[1] <http://www.imo-official.org/problems.aspx>

Literatur

Arnaud, Maret (2018): Die Schweizer Mathematik-Olympiade. VSMP Bulletin. Ausgabe 138, September 2018, 26-29.

Jaggi, Beat (2018): Gerade oder ungerade — das ist hier die Frage! VSMP Bulletin. Ausgabe 138, September 2018, 30-45.

goMATH Ausstellung und Workshops für Schulklassen

Monika Krichel, Departement Mathematik, ETH Zürich, communication@math.ethz.ch

goMATH, gehe den mathematischen Weg. Unter diesem Motto veranstaltet das Departement Mathematik der ETH Zürich vom **11. bis 22. März 2019** eine Ausstellung in der Haupthalle des ETH Hauptgebäudes begleitet von einer Reihe von Veranstaltungen für Schulklassen.

Gesamtprogramm siehe: <https://www.math.ethz.ch/gomath>

Ausstellung mit Berufsportraits und mathematischen Objekten

Die Ausstellung fokussiert auf folgende Themenbereiche:

Berufswege von Mathematikerinnen

Welche Berufswege haben Mathematikerinnen nach ihrem Studium eingeschlagen? Wir portraituren die vielfältigen Berufswege von Frauen von der Datenmodelliererin über die Finanzmathematikerin bis zur Professorin.

Mathematische Forschung von Frauen

In welchen Forschungsbereichen arbeiten Mathematikerinnen heute? Welche Herausforderungen müssen die Frauen meistern für eine Karriere in der Forschung? In Video-Portraits erzählen ETH-Mathematikerinnen von ihrem Weg zur Mathematik und was sie heute noch immer daran fasziniert.

Mathematische Objekte

Im Zentrum der Ausstellung werden die Objekte des Space-Wettbewerbs gezeigt. Schulklassen hatten die Aufgabe ein Objekt zu basteln, das einen mathematischen Sachverhalt so gut veranschaulicht, dass ein Ausserirdischer ohne Kenntnisse der irdischen Zeichen und Symbole sie versteht.

(Details und Wettbewerbsausschreibung siehe: VSMP-Bulletin, Ausgabe 137, Mai 2018)

Mathematik zum Anfassen – Workshops für Schulklassen

Den Schulklassen wird ein spannendes, mathematisches Problem unterbreitet, für das sie zusammen mit Mathematik-Studierenden und ihrer Lehrperson eine Lösung suchen. Die Workshops finden am **18., 19. und 21. März 2019** zu verschiedenen Zeiten im Hauptgebäude der ETH Zürich statt und dauern eine Stunde. Es werden **deutsch- und englischsprachige Workshops** angeboten.

Inhalte

Auf den Spuren des Königsberger Brückenproblems

- Sieben Brücken verbinden die drei Stadtteile von Königsberg, die von einem Fluss voneinander getrennt werden. Gibt es einen Weg bei dem jede der Brücken genau einmal überquert wird, so dass man wieder beim Ausgangspunkt landet?
- Anhand von Modellen wird dieses Problem in abstrakter Form durchgespielt und die Frage geklärt, ob in diesem und auch in anderen Fällen eine Lösung existiert.

Flächen von Polygonen vergleichen ohne Taschenrechner

- Wie kann man entscheiden welches von zwei oder mehr Polygonen die grösste Fläche hat?

- Zerlegt man jedes Polygon in Teile aus denen eine Quadrat gebildet werden kann und setzt diese zusammen, müssen nur noch die Quadrate verglichen werden. Und das ist easy ... oder?

Exploring multiplication tables – Englisch

- Vicky Neale our special guest from Oxford University presents this workshop on multiplication tables. The pupils will look for patterns and structure in the fascinating world of modular arithmetic. (No prior knowledge of modular arithmetic necessary!)

Anmeldung

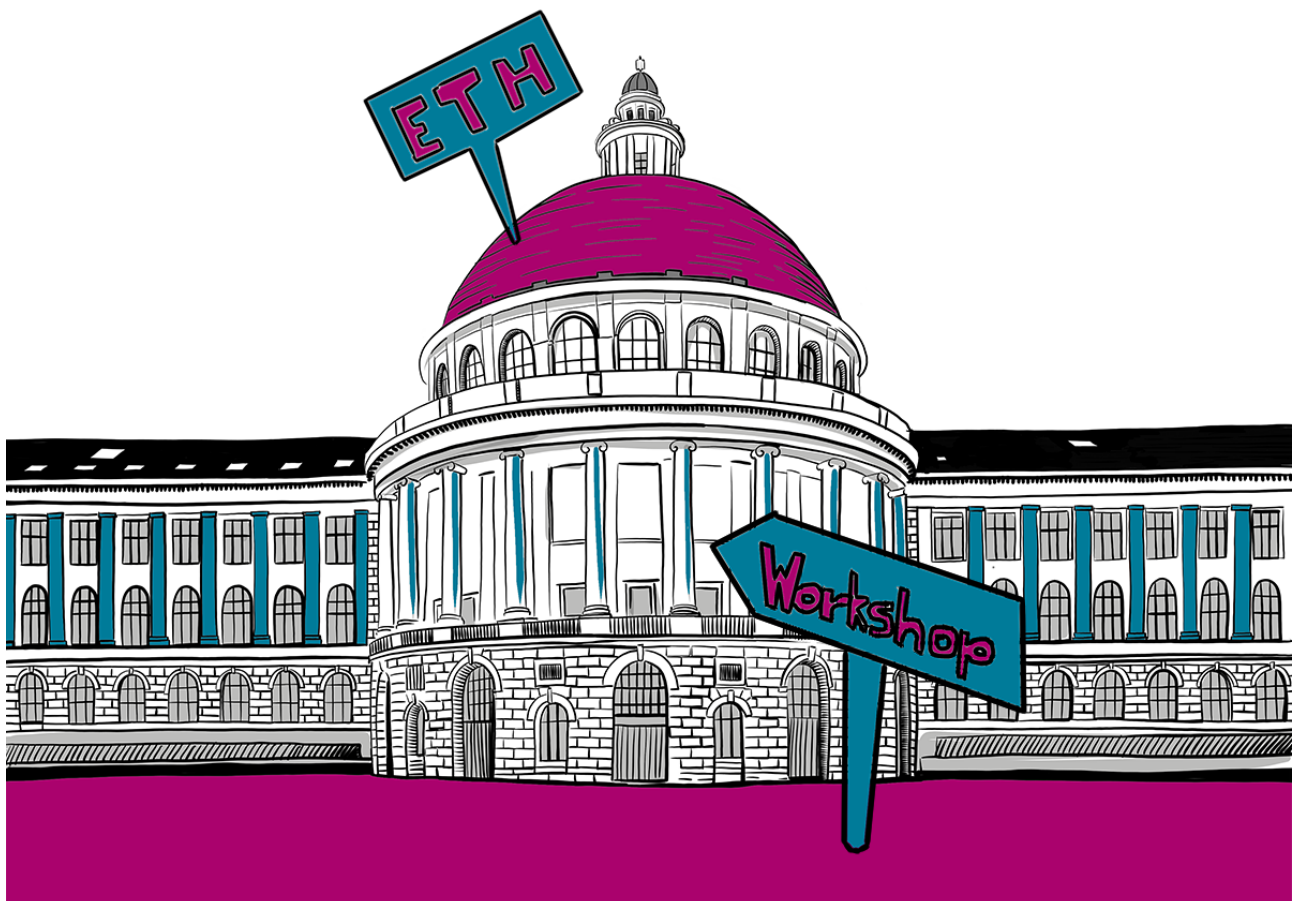
Der Workshop richtet sich an Schulklassen der Sekundarstufen I und II.
Details und Anmeldung siehe: <https://www.math.ethz.ch/gomath/workshops>

Halbtagesprogramm

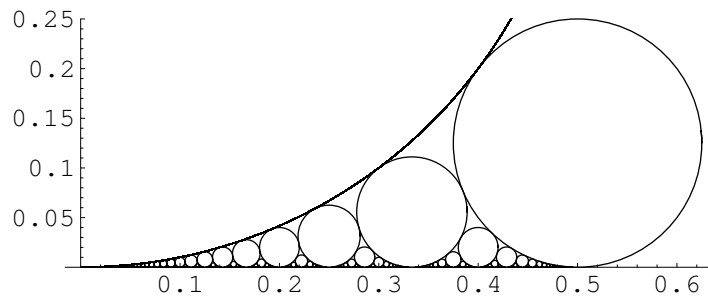
Der Besuch der Workshops kann am 19. und 21. März 2019 zu einem abwechslungsreichen Halbtagesprogramm erweitert werden:

- Ab 15.00 Uhr berichten **Mathematik-Studierende** über die Gründe ihrer **Studienwahl** und ihr Leben an der ETH.
- Ab 16.30 Uhr besuchen uns **Mathematikerinnen aus verschiedenen Berufsfeldern** und erzählen uns über ihren Alltag und welche Rolle die Mathematik darin spielt.

Für diese Veranstaltungen ist keine Anmeldung nötig.



Weiterbildung zum Thema Kettenbrüche



Neben einer allgemeinen Einführung in die Theorie der Kettenbrüche wird auch gezeigt, wie Kettenbrüche in diversen Themen des Grundlagenunterrichts eingebaut werden können. Beispiele dafür sind lineare und quadratische Gleichungen, binomische Formeln, sowie Näherungsbrüche für π , e und Wurzeln natürlicher Zahlen. Im letzten Teil werden Anwendungen von Kettenbrüchen in der RSA-Verschlüsselung, der Kalendermathematik und der Musik gezeigt, und zum Schluss wird mit Hilfe eines Kettenbruchs das archimedische Rinderproblem gelöst.

Referent: PD Dr. Lorenz Halbeisen, ETH Zürich

Zielpublikum: Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik

Organisation: Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH),
Andrea Peter (DMK)

Datum und Zeit: Mittwoch, der 27. März 2019, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr
Ab 9:00 Begrüßungskaffee

Kursort: ETH Zürich, Hauptgebäude Raum HG G 19.1

Kurskosten: CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen)
CHF 100 für VSMP-Mitglieder (www.vsmpp.ch)

Anmeldung: <http://math.ch/DMK2019b>

Anmeldeschluss: 24. März 2019

Weiterbildungsveranstaltung: Online-Aufgaben, Hausaufgaben und Tests mit Maple T.A.

Der Kurs bietet einen Überblick über die Einsatzmöglichkeiten von Maple T.A. bis zur Durchführung von einfachen Experimenten. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer können im Workshop-Teil selbst Übungs- und Prüfungsfragen kreieren, die Bewertungskriterien dazu bestimmen sowie die Erstellung der Auswertung und Rückmeldung an die Schülerinnen und Schüler festlegen.

Referentin:	Stefanie Winkler (Technische Universität Wien)
Ort:	ETH Zürich, Raum HG G19.1
Datum:	Donnerstag, 7. Februar 2019
Organisation:	Andrea Peter (DMK), Aret Kocaman (KS Wattwil), Norbert Hungerbühler (ETH)
Kursbeitrag:	CHF 120 (inkl. Mittagessen und Kaffeepause) CHF 100 für VSMP-Mitglieder
Anmeldung:	bis 1. Februar 2019, Teilnehmeranzahl begrenzt

Programm

ab 09:30	Begrüssungskaffee
10:00 - 10:05	Begrüssung und Einführung
10:05 - 13:00	Vorstellung des Programms und Erstellen eigener ersten Beispiele
13:00 - 14:00	Mittagessen im Dozentenfoyer
14:00 - 15:00	Wie kann ich die Bewertung/Rückmeldung beeinflussen
15:00 - 15:30	Pause
15:30 - 17:00	Erstellen eines eigenen Tests mit individuellen Bewertungskriterien
17:00	Schlussrunde: Rückblicke und Ausblicke

Inhalt: Online-Lernen und digitales Testen sind zunehmend wichtige Elemente von neuen, digitalen Ansätzen im Unterricht. Maple T.A. ist ein Online-Bewertungssystem für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften. Es bietet einen flexiblen und einfachen Weg zum Erstellen von Aufgaben sowie die individuelle Auswertung, und es erlaubt einen Überblick über den Leistungsstand und das erreichte Verständnis der Klasse. Insbesondere ist Maple T.A. auch im Rahmen von Prüfungen einsetzbar. Einmal erstellte Aufgaben können mit Kolleginnen und Kollegen sehr einfach geteilt werden. Das Erstellen von Aufgaben erfolgt über ein bedienungsfreundliches Authoring-Werkzeug, das Userinnen und User Schritt für Schritt durch den Prozessablauf führt. Individuelle Einstellungen ermöglichen es, die Aufgabensammlungen sowohl für Hausübungen als auch für kleine Tests und Prüfungen einzusetzen. Didaktische Aspekte und Grenzen des Einsatzes derartiger Tools werden kritisch diskutiert.

Material: Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Veranstaltung werden gebeten, ihr eigenes Notebook mitzubringen. Ein WLAN Zugang ist vorhanden.

Zielpublikum: Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik

Weitere Informationen zu den Vorträgen, Workshops, Anreise sowie das Anmeldeformular finden Sie unter: www.math.ch/DMK2019

SNF-Studie **TraM – Transfer der Mathematik Wir suchen SIE!**

Wie können wir Schülerinnen und Schüler im Gymnasium noch besser auf den Unterricht zu anspruchsvollen Inhalten in Mathematik und Physik vorbereiten?

Diese Frage steht im Mittelpunkt einer vom Schweizerischen Nationalfonds (SNF) geförderten Studie, die von Prof. Dr. Norbert Hungerbühler, Dr. Ralph Schumacher und Prof. Dr. Elsbeth Stern von der ETH Zürich durchgeführt wird. Im Einzelnen wird untersucht, wie sich optimierter Unterricht zum Thema „Funktionen“ langfristig auf den Physikunterricht zur Kinematik sowie auf das Verständnis der Differentialrechnung auswirkt.

Wir suchen Sie!

Für die oben genannte Studie suchen wir Lehrpersonen und ihre Klassen, die ab dem Schuljahr 2018/19 unsere erprobten Materialien zum Themenblock „Funktionen“ und/oder zum Themenblock „Differentialrechnung“ einsetzen.

Was haben Sie davon?

Sie erhalten nicht nur hervorragende lernwirksame Unterrichtsmaterialien, welche den gesamten Themenblock abdecken, sondern auch eine dazugehörige Einführung und Fortbildung durch das MINT-Lernzentrum, völlig kostenfrei. Ihre Klasse erhält zudem für die Teilnahme an der Studie 200 CHF für die Klassenkasse.

Sie würden gerne mitmachen, aber ...

... Sie möchten sich gerne zunächst einen Überblick über unsere Materialien verschaffen?

Auf unserer Homepage (www.math.ethz.ch/tram) finden Sie ein paar Beispielauszüge aus den Materialien. Gerne lassen wir Ihnen auch die vollständigen Materialien zukommen, wenn Sie dies wünschen.

... Sie möchten lieber Ihre eigenen Materialien verwenden?

Gerne schlagen wir Ihnen Möglichkeiten vor, um Sie mit Ihren eigenen Materialien ins Programm aufzunehmen – kontaktieren Sie uns!

... Sie unterrichten zurzeit keine passende Klasse?

Gerne diskutieren wir gemeinsam mit Ihnen Möglichkeiten, um Ihre Klasse(n) zu einem späteren Zeitpunkt ins Programm aufzunehmen – kontaktieren Sie uns!

Zögern Sie nicht, uns zu kontaktieren, wenn Sie weitere Fragen haben!

www.math.ethz.ch/tram
tram@ethz.ch

Anti-hookesche Federn

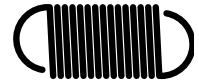
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Im Unterricht behandeln wir – ich nehme an, Sie tun dasselbe – das hookesche Federgesetz $F = ky$ und tun dann so, als ob es das einzige Federgesetz wäre. Dabei kann die Federkraft F auch in nicht-proportionaler Weise von der Dehnung y abhängen, siehe z.B. Abbildung 1

Abbildung 1: Spann- oder Zugfeder

Die Charakteristik dieses Federtyps lautet beispielsweise $F = F_0 + ky$, d.h. die Zugkraft an der Feder muss grösser als ein F_0 sein, damit sich die Windungen von einander lösen. Danach wächst die Kraft linear mit der Dehnung.



Kann eine Feder oder ein Spann-Element mit einem beliebigen Kraft-Dehnungsgesetz konstruiert werden?

2 Konstruktionselemente

Zwei seriell geschaltete, hookesche Federn mit Federkonstanten k_1 und k_2 haben als System die Federkonstante $k_{\text{res}}^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$ und erfüllen das hookesche Gesetz ebenfalls. Die Federkennlinie $F(y)$ einer gewöhnlichen Schraubenfeder seriell kombiniert mit einer Spannfeder weist einen Knick auf: Die Feder wird weicher ab der Kraft, wo sich die Spannfeder dehnt.

Die Federkonstante k einer gleichmässig eng gewundenen Schraubenfeder mit Drahtdurchmesser d , mittlerem Wendel-Durchmesser D , Anzahl Windungen N und Schermodul G des Federmaterials ist [1]

$$k = \frac{Gd^4}{8ND^3} \left(1 + \frac{d^2}{2D^2} \right)$$

Die Federkonstante ist also proportional zur Anzahl Windungen respektive zur Länge der entspannten Feder. Die Federkonstante wird grösser, je kleiner der Federdurchmesser D ist. In der Kegelstumpffeder wird dies ausgenützt, um die Federkonstante von der Länge abhängig zu machen, siehe Abbildung 2.

Abbildung 2: Kegelstumpf-Feder

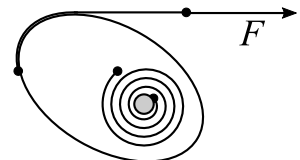
Die Feder ist weicher am breiteren Ende. Wird sie gegen eine Unterlage gedrückt, so liegen die unteren Windungen auf. Da der effektiv noch wirksame Teil kürzer und schmaler geworden ist, steigt die Federkonstante. Die Feder wird um so härter, je stärker sie komprimiert wird.



Das Beispiel in Abbildung 5 zeigt, dass die Kennlinie degressiv oder sogar fallend werden kann.

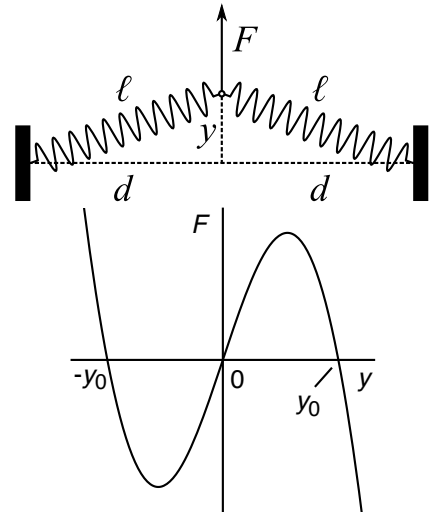
Abbildung 3: Spiralfeder mit exzentrischem Wellrad (Nockenwelle)

Mit dem Winkel des Wellrads ändert der Hebelarm der Zugkraft und variiert die effektive Federkonstante. Die Form des Wellrads beeinflusst die Kennlinie. Bei Compound-Bögen wird analog eine degressive Federkraft erzeugt, damit man beim gespannten Bogen leichter zielen kann.



Die Federkraft kann eine fallende Charakteristik aufweisen. Der Mechanismus in Abbildung 4 soll das Konzept erläutern. Der Apparat besteht aus zwei gleichen Federn mit Federkonstante k und entspannter Länge ℓ_0 . Eine dieser Federn übe die Kraft F_1 aus. Die zwei Federn zusammen erzeugen die Kraft F am Verbindungsgelenk.

Abbildung 4: Apparat aus zwei Federn, der umschnappen kann
Zwei Federn sind aussen drehbar verankert und in der Mitte gelenkig verbunden. Die Federn sollen gerade bleiben und nicht ausknicken. Die Federn erzeugen gemeinsam die Kraft F auf das Gelenk in der Mitte. [2]



$$y_0^2 = \pm \sqrt{\ell_0^2 - d^2} \quad F(y_0) = 0$$

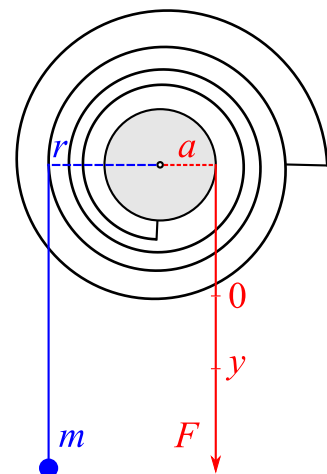
$$F_1 = k(\ell_0 - \ell) \quad \ell = \sqrt{d^2 + y^2}$$

$$\frac{F}{F_1} = \frac{2y}{\ell} \Rightarrow F = \frac{2yk\ell_0}{\sqrt{d^2 + y^2}} - 2yk \quad (\text{Abb. 5})$$

Abbildung 5: Federkraft des Apparats von Abbildung 4 als Funktion der Auslenkung y . Die Kennlinie ist hochgradig nichtlinear.

Abbildung 6 zeigt ein Spannelement, dessen Zugkraft umgekehrt proportional zum Weg variiert.

Abbildung 6: Ein Wellrad in Form einer hyperbolischen Spirale ist zentriert an einer zylindrischen Achse mit Radius a befestigt. Der Spiralradius wächst antiproportional zum Drehwinkel: $r = b/\varphi$. Ein Körper mit Gewicht mg hängt an einem Faden, der auf die Spirale gewickelt ist. Um die Achse ist ebenfalls ein Faden gewickelt, an dem die Kraft F zieht. Im Gleichgewicht kompensieren sich die Drehmomente: $F a \approx mg r$. Wenn der Achsen-Faden um die Strecke y nach unten gezogen wird, dreht sich die Achse und das austarierte Wellrad um $\varphi = y/a$. Der Nullpunkt der y -Achse muss geeignet gewählt werden. Somit gilt



$$F = \frac{mg}{a} \cdot r = \frac{mg}{a} \cdot \frac{b}{\varphi} = \frac{mgb}{y} \sim \frac{1}{y} \quad \text{“Anti-Hooke”}$$

3 Schluss

Die angeführten Beispiele zeigen, dass sich die Kraft-Weg-Charakteristik eines Spannelements in vielfältiger Weise beeinflussen lässt. Mit Hilfe eines Finite-Element-Programms können Ingenieure ein Federelement sogar so gestalten, das es in einem bestimmten Bereich eine vorgegebene Federcharakteristik aufweist. Das hooke-sche Federgesetz $F = ky$ ist nur ein Spezialfall, allerdings ein wichtiger. 10. November 2018, Lie.

Literatur

[1] P. Mohazzabi et. al., “On the spring constant of a close-coiled helical spring”, Am. J. Phys. 57 (7), July 1989, 639-641
 [2] <https://www.comsol.com/blogs/can-a-stiffness-be-negative/> (Abruf am 16. Sept. 2018)

Drehmomente beim konischen Doppelpendel

Rolf Strassfeld, 6318 Walchwil, rolfst@alumni.ethz.ch

1 Einleitung

In seiner Untersuchung eines konischen Stangenpendels in der Ausgabe 137 des Bulletins hat Martin Lieberherr den Angriffspunkt der Fliehkraft in einem mitbewegten Bezugssystem ermittelt und festgestellt, dass er nicht mit dem Schwerpunkt der Stange zusammenfallen kann, weil sich sämtliche Drehmomente aufheben müssen. Nun gehören Angriffspunkte und Wirkungslinien von Kräften eher zur technischen Mechanik, beim Newtonschen Kraftbegriff und in der theoretischen Mechanik kommen beide meines Wissens nach nicht vor. Daher hat mich interessiert, wie sich die Situation aus der Perspektive der klassischen Mechanik darstellt. In Inertialsystemen können alle Bewegungen starrer Körper in Translationen ihrer Schwerpunkte und Rotationen um durch sie verlaufende Achsen zerlegt werden. Um zu ermitteln, welche Kräfte und Drehmomente bei einem in einem Inertialsystem rotierenden Körper (einem Kreisel) auftreten, habe ich anstatt einer Stange ein starres Doppelpendel untersucht. Hier treten die gleichen Phänomene wie an der Stange auf, die Situation ist aber ein wenig übersichtlicher. Es zeigt sich, dass das Doppelpendel im Inertialsystem Drehmomenten unterworfen ist, wie die Bewegung seines Schwerpunktes unter dem Einfluss der wirkenden Kräfte entsteht, und wie die Bilanz der Drehmomente in einem mitrotierenden Bezugssystem ausfällt.

2 Das konische Doppelpendel mit rotierendem Drehimpuls

In Abbildung 1 sind zwei im folgenden punktförmig gedachte Pendelkörper mit gleichen Massen m zu sehen, die auf gerader Strecke mit masselosen Stangen der Länge ℓ miteinander starr und einem Drehlager D reibungsfrei verbunden sind. Sie mögen mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω und dem konstanten Spreizwinkel ϑ um eine vertikale Achse kreisen und im abgebildeten Moment in die Zeichenebene eintauchen. Wo nicht anders gesagt, beziehen sich Ortsvektoren, Drehimpulse und -momente auf D als Bezugspunkt und Ursprung eines Koordinatensystems. Im dargestellten, zweidimensionalen Schnitt treten horizontale und vertikale Richtungen auf, auf die wir uns später beziehen. Für die Koordinatenachsen wählen wir die Richtungen «nach rechts» und «nach oben». Senkrecht in die Schnittebene weisende Drehmomente können im Bedarfsfall negativ, entgegengesetzte positiv gezählt werden.

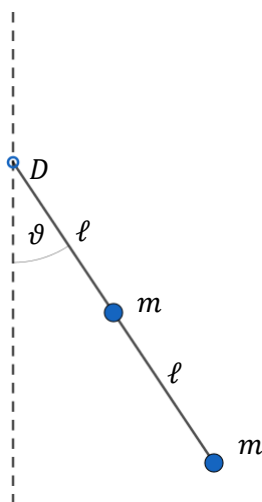


Abbildung 1

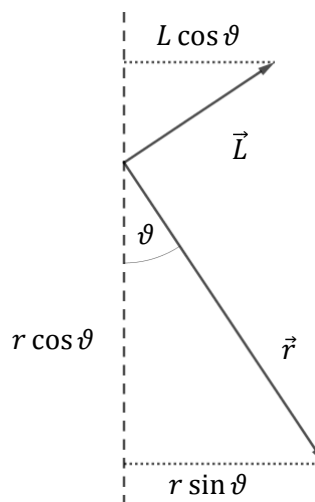


Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt den Ortsvektor \vec{r} und den Drehimpuls $\vec{L} (\perp \vec{r})$ einer um eine vertikale Achse rotierenden Masse. Mit dem Impuls weist auch das Drehmoment \vec{M} in die Zeichenebene. Da \vec{L} mit der Winkelgeschwindigkeit ω einen Kreis vom Radius $L \cos \vartheta$ beschreibt, hat das Drehmoment $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ die Grösse $M = \omega L \cos \vartheta$.

3 Drehimpulse und ihre Änderung durch Zentripetalkräfte

Wir können die beiden rotierenden Pendelmassen als Ganzes oder separat untersuchen. Zunächst untersuchen wir sie einzeln.

Für den Drehimpuls der oberen (ersten) Masse erhalten wir $L_1 = m\omega\ell^2 \sin\vartheta$, für den der unteren (zweiten) $L_2 = 4m\omega\ell^2 \sin\vartheta$. Beide Drehimpulsvektoren stehen senkrecht zu den Ortsvektoren der kreisenden Massen und rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Diese Rotationen können nur mit Drehmomenten erzwungen werden, deren Größen durch $M_1 = m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$ bzw. $M_2 = 4m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$ gegeben sind.

Wir prüfen, wie die Drehmomente aus den angreifenden Kräften entstehen. Zwar kennen wir die von den Stangen ausgeübten Kräfte noch nicht, da aber die Zentripetalkräfte \vec{F}_Z die Summen aller wirkenden Kräfte sind, berechnen sich die Drehmomente jeweils als $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_Z$.

Kaum überraschend finden wir daher mit $F_{Z,1} = m\omega^2\ell \sin\vartheta$ und $F_{Z,2} = 2m\omega^2\ell \sin\vartheta$ die zur zeitlichen Änderung der Drehimpulse nötigen Drehmomente wieder:

Für die erste Masse ist $F_{Z,1} \cdot \ell \cos\vartheta = m\omega^2\ell \sin\vartheta \cdot \ell \cos\vartheta = M_1$
 und für die zweite Masse $F_{Z,2} \cdot 2\ell \cos\vartheta = 2m\omega^2\ell \sin\vartheta \cdot 2\ell \cos\vartheta = M_2$.

Betrachten wir nun die beiden Massen als einen einzigen Körper, so stellt sich dessen Bewegung als eine Translation seines Schwerpunkts S dar, die so erfolgt, als wäre die gesamte Masse des Körpers in S konzentriert und dem Einfluss aller äusseren Kräfte unterworfen, und einer Drehung bezüglich S , wobei allenfalls auftretende Drehmomente ebenfalls durch die äusseren Kräfte in Bezug auf S zu berechnen sind. Der Drehimpuls \vec{L} des Körpers zerfällt analog in einen Bahndrehimpuls \vec{L}_B und einen Eigendrehimpuls \vec{L}_E .

Für den Bahndrehimpuls (in Bezug auf den Drehpunkt D) und den Eigendrehimpuls (bezüglich S) erhalten wir

$$L_B = 2m\omega \left(\frac{3}{2}\ell\right)^2 \sin\vartheta = \frac{9}{2}m\omega\ell^2 \sin\vartheta \quad \text{und} \quad L_E = 2m\omega \left(\frac{1}{2}\ell\right)^2 \sin\vartheta = \frac{1}{2}m\omega\ell^2 \sin\vartheta.$$

Ihre zeitlichen Änderungsraten werden durch die Drehmomente $\vec{M}_B := \dot{\vec{L}}_B$ und $\vec{M}_E := \dot{\vec{L}}_E$ verursacht:

$M_B = \frac{9}{2}m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$ bzw. $M_E = \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$, da die Momente gleich orientiert sind insgesamt also $5m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$.

Der Betrag der Zentripetalkraft \vec{F}_Z , die die Kreisbewegung des Schwerpunktes bewirkt, ergibt sich mit der Gesamtmasse $2m$ zu $F_Z = 2m\omega^2 \frac{3}{2}\ell \sin\vartheta = 3m\omega^2\ell \sin\vartheta$. Das ihr zugehörige Drehmoment hat mit $M = 3m\omega^2\ell \sin\vartheta \cdot \frac{3}{2}\ell \cos\vartheta$ genau die Größe, die zur Änderungsrate des Bahndrehimpulses passt.

Die Drehmomente der Kräfte $\vec{F}_{Z,1}$ und $\vec{F}_{Z,2}$ im Schwerpunktsystem betragen unter Berücksichtigung ihrer Orientierung $m\omega^2\ell \sin\vartheta \cdot \frac{\ell}{2} \cos\vartheta$ für die obere Masse und $-2m\omega^2\ell \sin\vartheta \cdot \frac{\ell}{2} \cos\vartheta$ für die untere, in der Summe erzeugen sie das Drehmoment zur Änderungsrate des Eigendrehimpulses.

Addiert man die Kräfte $\vec{F}_{Z,1}$ und $\vec{F}_{Z,2}$ im Sinne der technischen Mechanik unter Einbezug ihrer parallelen Wirkungslinien, so findet man ihre Ersatzkraft (wie beim Hebel) mit der Größe $3m\omega^2\ell \sin\vartheta$ und einer Wirkungslinie, die den Abstand der Massen im Verhältnis 2:1 teilt. Da ihr Kraftarm bezüglich S die Länge $\frac{1}{6}\ell \sin\vartheta$ besitzt, verursacht ihr Drehmoment wieder genau die zeitliche Änderungsrate des Eigendrehimpulses.

4 Zu den Winkelgeschwindigkeiten passende Spreizwinkel

Zur weiteren Untersuchung ermitteln wir die konstanten Winkel $\vartheta > 0$, bei denen Rotationen mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten erfolgen können.

Unter Einbezug von Wirkungslinien erhielten wir die gesuchte Relation geschenkt: Da das Drehmoment der Zwangskraft bezüglich des Drehpunktes D verschwindet, weil dieser auf ihrer Wirkungslinie liegt, muss das gesamte Drehmoment ausschliesslich durch die Gewichtskräfte entstehen. Demnach wäre $5m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta = 2mg\frac{3}{2}\ell \sin\vartheta \iff \ell\omega^2 = \frac{3g}{5\cos\vartheta}$, wobei g den Ortsfaktor bezeichnet. Hier können wir das Geschenk nicht annehmen.

Im Kontext der klassischen Mechanik verwenden wir eine Lagrange-Funktion, am besten eine zweiter Art, also mit einbezogenen Zwangsbedingungen. Rotiert das Pendel mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so erhalten wir als kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m(\ell^2\omega^2\sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}m(4\ell^2\omega^2\sin^2\vartheta\omega^2) = \frac{5}{2}m(\ell^2\omega^2\sin^2\vartheta),$$

die potentielle Energie ergibt sich zu

$$U = -mg\ell \cos\vartheta - 2mg\ell \cos\vartheta = -3mg\ell \cos\vartheta$$

Ist $\mathcal{L} = T - U$ die Lagrange-Funktion des Systems, so liefert

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = 0 = 5m\ell^2\omega^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - 3mg\ell \cos\vartheta = m\ell(5\ell\omega^2 \cos\vartheta - 3g) \sin\vartheta$$

die Bedingung, unter der Rotationen mit konstanten $\vartheta > 0$ möglich sind, nämlich

$$\cos\vartheta = \frac{3g}{5\ell\omega^2} \iff \ell\omega^2 = \frac{3g}{5\cos\vartheta} \quad (*)$$

Wir beobachten an dieser Stelle, dass ein Fadenpendel der Länge $\ell_F = \frac{5}{3}\ell$ mit gleichen ϑ und ω wie das Doppelpendel rotieren kann, denn bei Fadenpendeln finden wir

$$\frac{F_Z}{F_G} = \tan\vartheta \iff m\ell_F\omega^2 \sin\vartheta = mg \tan\vartheta \iff \cos\vartheta = \frac{g}{\ell_F\omega^2}$$

Das erinnert an den Schwingungsmittelpunkt eines physikalischen Pendels. Ausserdem erkennen wir daran, dass die beiden Massen nicht durch eine gerade gespannte Schnur auf ihrer Bahn gehalten werden könnten. (Analog zum Reversionspendel könnte das Doppelpendel in diesem Punkt gestützt mit gleichen Kombinationen von ϑ und ω wie im hier untersuchten Fall rotieren.)

5 Drehmomente von Gewichts- und Zwangskräften

Über die Zentripetalbeschleunigungen berechnete Zentripetalkräfte verraten nichts über ihre Herkunft. Beim Doppelpendel entstehen sie als Summen von Gewichtskräften und der vom Lager auf die Massen ausgeübte Zwangskraft \vec{F}_{Zwang} . Diese Kraft muss die Gewichtskräfte der Massen kompensieren und die nötigen Zentripetalkräfte erzeugen. Ihre Horizontalkomponente beträgt daher $F_{Zwang,h} = -3m\omega^2\ell \sin\vartheta$, ihre Vertikalkomponente $F_{Zwang,v} = 2mg$. Die Richtung der Zwangskraft kann über das Verhältnis ihrer Komponenten mit Hilfe von (*) ermittelt werden:

$$\tan\vartheta' = \frac{3m\omega^2\ell \sin\vartheta}{2mg} = \frac{3 \cdot 3 \sin\vartheta}{2 \cdot 5 \cos\vartheta} = \frac{9}{10} \tan\vartheta$$

Weil die vom Lager ausgeübte Kraft nicht parallel zu den Stangen ist, bewirkt sie ein Drehmoment beim Pendel. Mit dem Ortsvektor \vec{r}_S des Schwerpunkts können wir dieses Drehmoment komponentenweise berechnen. Aufgrund $r_S = \frac{3}{2}\ell$ betragen die von der Horizontal- und der Vertikalkomponente verursachten Anteile

$$F_{Zwang,h} \frac{3}{2}\ell \cos\vartheta = -3m\omega^2\ell \sin\vartheta \frac{3}{2}\ell \cos\vartheta \quad \text{bzw.} \quad F_{Zwang,v} \frac{3}{2}\ell \sin\vartheta = 2mg \frac{3}{2}\ell \sin\vartheta$$

In der Summe ergibt sich mit (*) das Drehmoment

$$\begin{aligned}
 M_{Zwang} &= -3m\omega^2 \ell \sin \vartheta \frac{3}{2} \ell \cos \vartheta + 2mg \frac{3}{2} \ell \sin \vartheta \\
 &= -3m\omega^2 \ell \sin \vartheta \frac{3}{2} \ell \cos \vartheta + 5m\ell\omega^2 \cos \vartheta \ell \sin \vartheta \\
 &= \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta
 \end{aligned}$$

Die Gewichtskraft als zweite am Pendel angreifende Kraft bewirkt mit dem Kraftarm $\frac{3}{2} \ell \sin \vartheta$ das Drehmoment $M_G = -2mg \frac{3}{2} \ell \sin \vartheta = -5m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$. Addiert erzeugen beide hier das zur Änderung des Bahndrehimpulses nötige Moment.

$$M_B = \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - 5m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = -\frac{9}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

Bei dieser Berechnung des Drehmomentes hätten wir uns durchaus auf die Horizontalkomponenten der Kräfte beschränken können, weil sich die Anteile der Vertikalkomponenten kompensieren. Zwangs- und Gewichtskraft verändern auch den Eigendrehimpuls wie gewünscht mit $M_E = \frac{1}{9} M_B$, denn der Abstand der beiden Massen von ihrem Schwerpunkt beträgt mit $\frac{1}{2} \ell$ ein Drittel der Distanz des Schwerpunktes zum Drehpunkt ($\frac{3}{2} \ell$). Da die betreffenden Längen bei der Berechnung der Drehmomente quadratisch auftreten, weil sie im Kraftarm ebenso wie in den Kräften linear erscheinen, ergibt sich der Multiplikator $\frac{1}{9}$.

6 Drehmomente im mitrotierenden Bezugssystem

Bei der Beobachtung des Pendels in einem mitrotierenden Bezugssystem (mit dem Drehpunkt als Ursprung) kommt zu den Gewichtskräften und der vom Lager ausgeübten Zwangskraft noch die Fliehkraft hinzu. Für das Gleichgewicht der Drehmomente sind alle drei Kräfte zu berücksichtigen. Zum Drehmoment der Zwangskraft ($M_{Zwang} = \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$) und dem der Gewichtskraft ($M_G = -2mg \frac{3}{2} \ell \sin \vartheta = -5m\ell\omega^2 \cos \vartheta \ell \sin \vartheta$) kommt das der Fliehkraft ($M_F = 2m\omega^2 \frac{3}{2} \ell \sin \vartheta \cdot \frac{3}{2} \ell \cos \vartheta$) hinzu, zusammen heben sie sich auf:

$$\begin{aligned}
 M_{Zwang} + M_G + M_F &= \frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - 5m\omega^2 \ell^2 \cos \vartheta \sin \vartheta + \frac{9}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dabei ist die Wirkung der Kräfte bei der Berechnung der Drehmomente auf die im Massenzentrum konzentriert gedachte Gesamtmasse $2m$ bezogen. Entfernt man M_F aus der Gleichung, erhält man das «Bahndrehmoment» im Inertialsystem.

Die Drehmomente kompensieren sich ebenso, wenn sie auf den Schwerpunkt bezogen sind: Dann verursacht die Zwangskraft das Drehmoment $\frac{9}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - 5m\omega^2 \ell^2 \cos \vartheta \sin \vartheta$, das Drehmoment der Gewichtskraft verschwindet, und das der an den beiden einzelnen Massen wirkenden Fliehkräfte beträgt $\frac{1}{2} m\omega^2 \ell^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$. Letzteres Drehmoment findet man natürlich auch, wenn man die beiden Fliehkräfte durch eine einzelne ersetzt, deren Wirkungslinie nicht durch den Schwerpunkt verläuft, und entfernt man es aus der Gleichung, bleibt das «Eigendrehmoment» im Inertialsystem übrig.



Experiment Seilreibung

Markus Meier und Barbara Roos, Physik-Olympiade, broos@gmx.ch

Sie suchen nach einem guten Experiment zu den Themen Reibung und Mechanik? Et voilà: Die Physik-Olympiade bietet Ihnen hierzu das Experiment "Seilreibung". Danach wird Ihren Schülerinnen und Schülern klar sein, warum Seile ganze Schiffe befestigen können. Oder verrostete Bremszüge eher mühsam sind.

Ideal für Klassen, die in zwei Jahren die Matura schreiben. Die Schülerinnen und Schüler sollten die Exponentialfunktion kennen. Das Phänomen an sich können aber auch jüngere Schülerinnen und Schüler erkunden.

Das Experiment dauert ungefähr 150 Minuten. Wer die vollständige Lösung finden will, braucht etwas länger.

1 Beschrieb

1.1 Wie ist das Experiment aufgebaut?

Ihre Schüler analysieren die Reibung zwischen einem Seil und einer Stange. Das Experiment hat drei Aufgaben:

- Bestimmung der Kräfte bei maximaler Haftreibung und des Haftreibungskoeffizienten
- Bestimmung der Kräfte bei Gleitreibung und des Gleitreibungskoeffizienten
- Bestimmung der Kräfte bei Gleitreibung als Funktion des Umschlingungswinkels sowie des Gleitreibungskoeffizienten

1.2 Was lernen die Schüler?

Sie lernen das Gesetz von Euler-Eytelwein kennen und verstehen es. Sie können erklären, warum wenige Umschlingungen um einen Poller reichen, um ein schweres Schiff festzumachen. Sie lernen, ein Physik-Experiment zu bauen, auszuführen und auszuwerten.

1.3 Benötigtes Material

- Schnur
- 2 Federkraft-Messer (Bereich 0 – 3 N, 0 – 10 N)
Achtung: Die Skala von Federkraftmessern muss je nach Verwendungslage (senkrecht nach oben, senkrecht nach unten, waagrecht) mit Hilfe der Verstellerschraube auf 0 gestellt werden.
- Stativmaterial: Tischklammer, Stativstange, Muffe, Stativstange für Reibungsmessung
- Diagrammpapier
- Kessel, Wassergefäß (mit Wasser), Waage
- Gewichtssatz
- Papiertücher

1.4 Ursprung und Lösungen

Die Idee des Experiments ist von der Asiatischen Physik-Olympiade 2012 übernommen. Ausgearbeitet wurde das Experiment von Markus Meier und Barbara Roos. Den Beschrieb und Lösungen des Experimentes finden Sie auch unter <https://science.olympiad.ch/de/lehrpersonen/>.

2 Experiment Seilreibung

2.1 Hinweise

- Alle Messungen und Berechnungen müssen nachvollziehbar dokumentiert werden. Das heisst, alle gemessenen Grössen müssen in übersichtlichen Tabellen notiert werden, alle in die Rechnungen eingehenden Werte müssen ersichtlich sein, Rechnungen müssen nachvollziehbar sein. Signifikante Stellen sind zu beachten.
- Alle Grössen müssen mit den richtigen SI-Einheiten versehen sein.
- Grafiken müssen vollständig und korrekt beschriftet werden.
- Zur Verfügung steht neben dem karierten Papierbogen auch Millimeterpapier für Diagramme und Plots.
- Bei Umschlingungswinkeln von mehr als 2π ist darauf zu achten, dass die Schnurwindungen nebeneinanderliegen und sich weder berühren noch überlappen.
- Die Stange, welche für die Messung der Reibungskräfte verwendet wird, soll im Bereich, in dem sie von der Schnur umschlungen wird, nicht mit den Fingern angefasst werden (Verschmutzung mit Hautfett, dies verändert die Reibungskoeffizienten). Die Stangen sind vorgängig gereinigt worden. Ebenfalls soll die Schnur nur an den Enden angefasst werden.
- Positioniere die Schnur auf der Stange möglichst immer am gleichen Ort.
- In diesem Dokument wird der Begriff Reibungskoeffizient verwendet, er ist gleichbedeutend mit Reibungszahl.

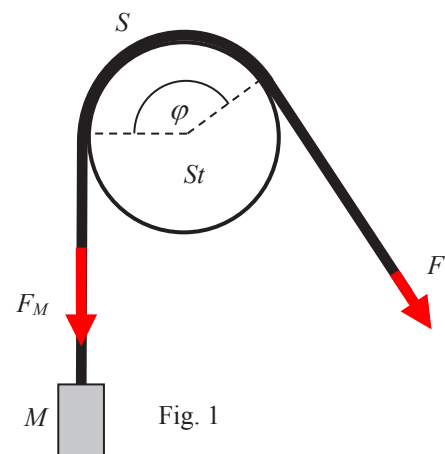
2.2 Beschreibung des Experimentes

Gesetz von Euler-Eytelwein

Ein Seil S umschlingt eine Stange St mit dem Umschlingungswinkel φ (siehe Fig. 1). Um die Masse M im Gleichgewicht zu halten, ist die Zugkraft F am anderen Ende des Seils notwendig. Durch die Reibungskraft zwischen dem Seil S und der Stange St ist die dafür notwendige Zugkraft F kleiner als die Gewichtskraft der Masse M und gegeben durch folgenden Zusammenhang:

$$F = F_M \cdot e^{-\mu\varphi}$$

mit	F_M	Lastkraft
	F	Zugkraft
	φ	Umschlingungswinkel (im Bogenmass)
	μ	Reibungskoeffizient
	e	Eulersche Zahl



2.3 Aufgaben

Aufgabe 1: Bestimmung der Kräfte bei maximaler Haftreibung und des Haftreibungskoeffizienten

Es sollen die Kräfte bei maximaler Haftreibung zwischen der Schnur und der Stativstange für verschiedene Lastmassen bestimmt werden. Der Umschlingungswinkel soll konstant $\varphi = \pi$ betragen. Dabei wird langsam die Zugkraft F erhöht, bis sich die Schnur auf der Stange zu bewegen beginnt. Die Lastmasse wird an einem Ende der Schnur befestigt. Die Zugkraft wird wie folgt erzeugt: Ein Wasserkessel wird am anderen Ende der Schnur befestigt. In den Kessel wird so lange langsam Wasser gegossen, bis sich die Schnur gegen die Stange zu bewegen beginnt, und die Lastmasse gerade beginnt, sich nach oben zu bewegen. Die Masse des Kessels mit Wasser bestimmt die Zugkraft bei Haftreibung: **Achtung:** Damit der Kessel die Lastmasse nicht berührt, muss der Kessel zu Beginn der Messung tiefer sein als die Lastmasse. Die Schnur darf keinesfalls nass werden!

- (a) Führe für einen konstanten Umschlingungswinkel $\varphi = \pi$ die Messung der Zugkraft für 8 verschiedene Lastmassen im Bereich 0 g bis 160 g durch. Für jede Lastmasse ist die Messung mindestens dreimal durchzuführen und der Mittelwert zu bilden.
- (b) Bestimme aus den Messwerten von (a) für jede der 8 Messungen den Haftreibungskoeffizienten μ_{Haft} zwischen Schnur und Stativstange. Bilde daraus den Mittelwert für μ_{Haft} .

Aufgabe 2: Bestimmung der Kräfte bei Gleitreibung und des Gleitreibungskoeffizienten

Benutze ein neues Stück Schnur. Wiederum soll der Umschlingungswinkel $\varphi = \pi$ konstant gelassen werden. Die Kräfte bei der Gleitreibung werden mit zwei Methoden mit den Federkraftmessern gemessen. Bei der ersten Methode wird die Lastmasse hochgezogen, bei der zweiten Methode wird sie heruntergelassen. Bei der ersten Methode, siehe (a), wird mit dem Federkraftmesser die Zugkraft langsam erhöht, bis die Schnur sich gegen die Stange zu bewegen beginnt. Nun wird langsam mit konstanter Geschwindigkeit weitergezogen und die Kraft am Federkraftmesser abgelesen. Bei der zweiten Methode, siehe (b), wird mit dem Federkraftmesser die Zugkraft vermindert, bis sich die Schnur gegenüber der Stange zu bewegen beginnt. Nun wird langsam mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt und die Kraft am Federkraftmesser abgelesen.

- (a) Führe für einen konstanten Umschlingungswinkel $\varphi = \pi$ die Messung der Zugkraft beim Hochziehen der Masse für 8 verschiedene Lastmassen im Bereich 0 bis 160 g durch. Für jede Lastmasse ist die Messung mindestens dreimal durchzuführen und der Mittelwert zu bilden.
- (b) Führe für einen konstanten Umschlingungswinkel $\varphi = \pi$ die Messung der Zugkraft beim Herunterlassen der Masse für 8 verschiedene Lastmassen (verwende die gleichen Massen wie bei (a)) im Bereich 0 g bis 160 g durch. Für jede Lastmasse ist die Messung mindestens dreimal durchzuführen und der Mittelwert zu bilden.
- (c) Stelle alle gemessenen Kräfte (Mittelwerte) aus (a) und (b) als Funktion der Lastkraft grafisch dar. Alle Werte sind in derselben Grafik als zwei Datenreihen darzustellen.
- (d) Stelle eine Wertetabelle auf, in der für jede Lastkraft das Verhältnis von der Zugkraft zur Lastkraft sowohl beim Hochziehen als auch beim Herunterlassen dargestellt wird. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen beiden Verhältnissen? Berechne für jede Lastkraft den Gleitreibungskoeffizienten zwischen Schnur und Stativstange μ_{Gleit} unter Verwendung jeweils beider Messwerte (Hochziehen, Herunterlassen). Bilde aus den einzelnen μ_{Gleit} den Mittelwert.

Aufgabe 3: Bestimmung der Kräfte bei Gleitreibung als Funktion des Umschlingungswinkels sowie des Gleitreibungskoeffizienten

In dieser Messung soll die Abhängigkeit der Kräfte (stets nur beim Hochziehen der Lastmasse) vom Umschlingungswinkel untersucht werden. Die Kräfte werden mit den Federkraftmessern bestimmt. Die Lastmasse soll jedoch nun in der ganzen Aufgabe 3 konstant 55 g betragen.

- (a) Bestimme die Zugkräfte für mindestens 6 Umschlingungswinkel im Bereich $\varphi = 0$ bis $\varphi = 8\pi$. Für jeden Winkel soll die Kraft mindestens fünfmal gemessen werden.
- (b) Ermittle für jeden Umschlingungswinkel den Mittelwert sowie die Standardabweichung für die gemessenen Zugkräfte.
- (c) Die Gültigkeit des Euler-Eytelweinschen Gesetzes soll mit einer geeigneten Grafik überprüft werden. Erläutere Deine gewählte Methode!
- (d) Trage für alle in Frage kommenden Größen Fehlerbalken in Deinem Diagramm ein.
- (e) Bestimme den Gleitreibungskoeffizienten zwischen Schnur und Stativstange μ_{Gleit} aus der Grafik in (c). Schätze den Fehler des Gleitreibungskoeffizienten in geeigneter Weise ab. Dokumentiere die Auswertung.
- (f) Vergleiche μ_{Gleit} aus 3 (e) mit μ_{Gleit} aus 2 (d) und berechne die prozentuale Abweichung des Wertes von 2 (d) von demjenigen aus 3 (e).

Ja – Oui – Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematikund Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la Société Suisse des Professeurs de l'Enseignement Secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120 (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40 (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prénom/Nome:

Adresse/Indirizzo:

PLZ Ort/NP Ville/CAP Luogo:

(Land/Pays/Paese):

E-Mail:

Tel.:

Geburtsdatum/Date de Naissance/
Data di nascita:

Sprache/Langue/Lingua: D F I

Schule/École/Scuola:

Kanton/Canton/Cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: aktiv/actif/attivo passiv/passif/passivo

StudentIn/Étudiant(e)/Studente/ssa.

Mitglied der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft/Membre de la Société Suisse de Physique/Membro della Società Svizzera di Fisica

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG – SSPES – SSISS, Sekretariat, z. H. Doris Lazzeri, 3000 Bern

www.vsg-sspes.ch

Herausgeber — *Éditeur*
VSMP — SSPMP — SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 032 512 01 28
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
Monbijoustrasse 36
3011 Bern
Tel. 031 382 52 33
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Josef Züger j.zueger@sunrise.ch
Via Salens Tel. 081 641 10 94
7402 Bonaduz

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03
Pestalozzistrasse 17
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
Rue Louis-de-Meuron 4 Tél. 032 544 47 53
2074 Marin-Epagnier

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 139 30.11.2018 (Ende Januar)
Nr. 140 31.03.2019 (Ende Mai)
Nr. 141 31.07.2019 (Ende September)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch