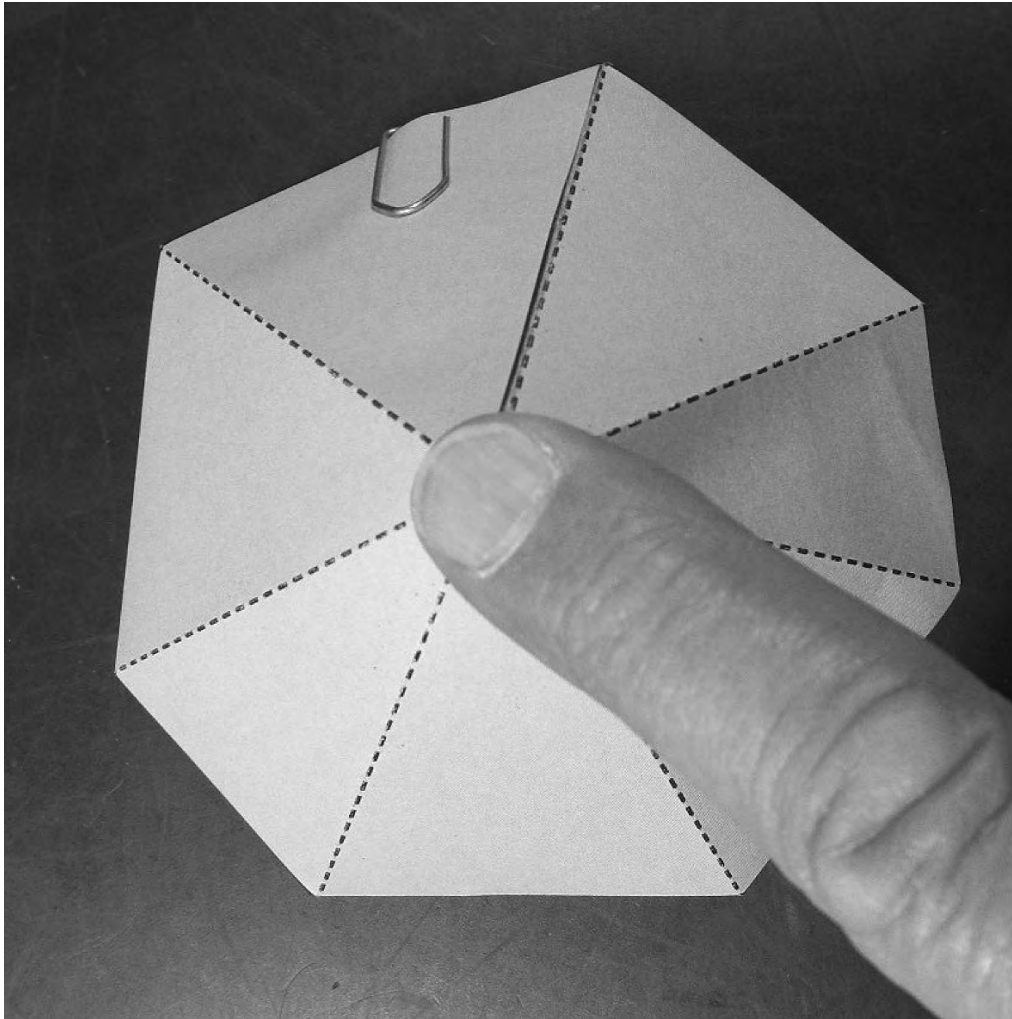




# Bulletin

September 2016 — Septembre 2016

N° 132

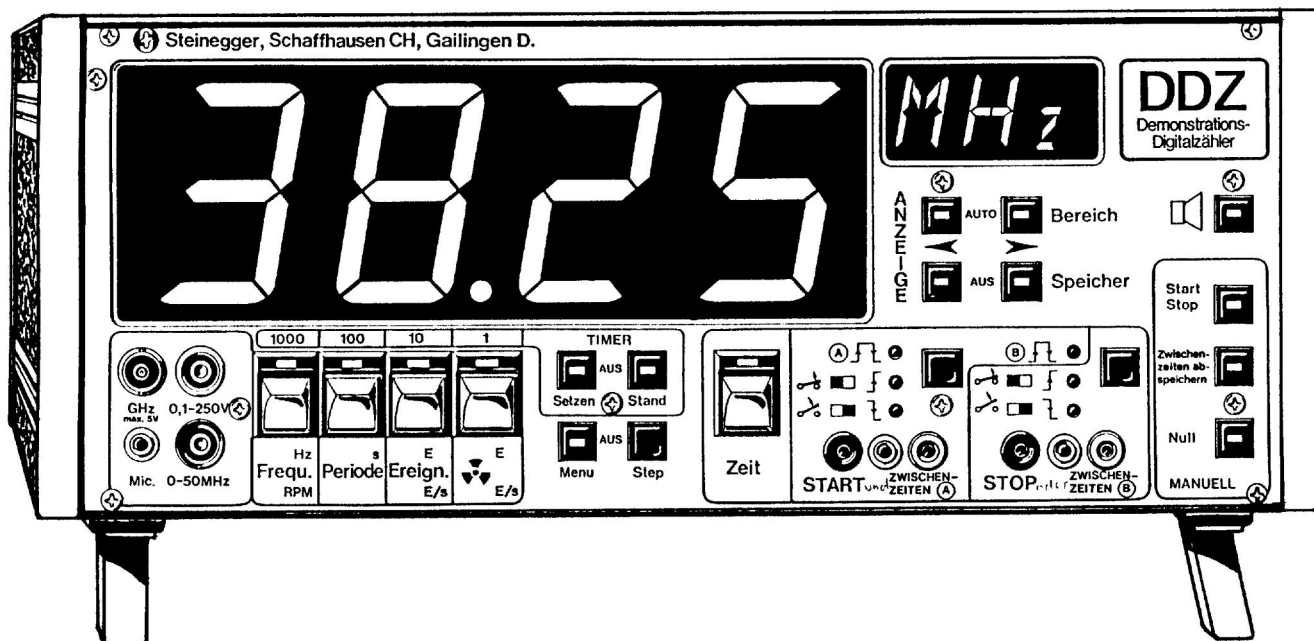


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte  
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique  
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

# Demonstrations-Digitalzähler DDZ

Art. Nr. 51



*Preis inkl. MWSt nur SFr 2'330.-*

## Kompakt-Multifunktionszähler der Spitzenklasse!

- 56 mm hohe helle Ziffern- und 3-stellige Einheitenanzeige
- Breitestes Anwendungsspektrum und selbsterklärende Bedienung
- Misst Zeitintervalle, Frequenzen, Perioden, RPM usw.
- Timerfunktion, Ereigniszählung, Zählrohranschluss, akustische Rückmeldung, 50 Messwertspeicher, bidirektionale serielle Schnittstelle, Hilfsspeisungen für Zusatzgeräte
- Auflösung von bis zu 10 Ziffern durch Ziffernschiebung
- Automatische und manuelle Bereichsumschaltung, vollautomatische Signalanpassung dank Triggerautomatik
- Hervorragendes Preis-/Leistungsverhältnis

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Der neue Demonstrations-Digitalzähler DDZ" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

**Steinegger & Co.**  
Rosenbergstrasse 23  
CH-8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90  
Fax : 052-625 58 60  
Internet: [www.steinegger.de](http://www.steinegger.de)

**Internet-Adressen — *Adresses Internet***

[www.vsmp.ch](http://www.vsmp.ch) — [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) — [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch)

**Titelseite — *Page de Titre***

Sehnensiebeneck aus Papier (Bild: Hans Walser; Artikel Seite 29 in dieser Ausgabe)

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*

<b>VSMP</b>	<b>4</b>
<i>Einladung Generalversammlung 2016</i> <i>Invitation à l'assemblée générale 2016</i>	4
Zusammenarbeit SPG – VSMP	5
Coopération SSP – SSPMP	6
Collaborazione SSF – SSIMF	7
<i>Irène Steinegger-Meier</i> Erfolgreiche Schweizer Schülerinnen und Schüler an Internationaler Mathematik- und Physik-Olympiade	8



<b>Deutscheschweizerische Physikkommission</b>	<b>11</b>
<i>Kurs: Computing und Sensorik mit Python im Physikunterricht</i>	11
<i>Martin Lieberherr</i> Induktiver Durchflussmesser	12
SYPT Physics Week/SYPT 2017	16



<b>Commission Romande de Physique</b>	<b>18</b>
<i>Émilie Hertig</i> Lagging Pendulum – Trajectoires stables d'un pendule forcé	18
SYPT Physics Week/SYPT 2017	26



<b>Commission Romande de Mathématiques</b>	<b>28</b>
<i>Annonce: Géométrie vectorielle et analytique</i>	28


**Deutschschweizerische Mathematikkommission 29**

*Hans Walser*  
Sehnenvieleck 29

*Franz Meier*  
DATCH 2016 32

*Fritz Staudacher*  
Bedeutendster Mathematiker der Frühen Neuzeit 34

*Peter Thurnheer*  
Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (3. Teil) 40

*Kurs: Potenzreihen, der Schlüssel zur Analysis* 45

*H.R. Schneebeli*  
*Rezension: The Princeton Companion to Applied Maths* 46

*Peter Gallin*  
Analyse eines Weihnachtssterns 48

*Rainer Hauser*  
Gedanken zur psychologischen Seite der Zahlen am Beispiel eines Verlustaversionstests 54

*Urs Kirchgraber*  
Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2B 59

*J.S. Marron*  
Eine visuelle Analyse der Sterblichkeit männlicher Spanier 71

**Einladung zur GENERALVERSAMMLUNG des VSMP**  
**Invitation à l'ASSEMBLEE GENERALE de la SSPMP**  
**Invito all'Assemblea generale della SSIMF**

Freitag 25. November 2016 - *vendredi 25 novembre 2016* – venerdì 25 novembre 2016  
**Kantonsschule Wettingen**

**I. Rahmenprogramm – *programme cadre* – programma quadro**

- Treffpunkt ca. 16.00 Uhr, gemäss Angaben auf der Website [www.vsmf.ch](http://www.vsmf.ch) (ab Ende Oktober). Im Anschluss an die GV werden wir in einem Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekannt gegeben.
- *Rendez-vous à 16.00 env., selon les indications données sur le site [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) (à partir de la fin d'octobre). Après l'assemblée générale on va prendre le diner ensemble. Le restaurant sera communiqué à la fin de l'AG.*
- Ritrovo ore 16.00 ca., secondo le indicazioni fornite sul sito [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch) (a partire dalla fine di ottobre). Al termine è prevista una cena comune; il ristorante sarà comunicato all'AG.

**II. Generalversammlung 2016 – *Assemblée générale 2016* – Assemblea generale 2016**

17:00 – 18:00 Uhr

**Traktandenliste – *Ordre du jour* – Ordine del giorno**

Begrüssung – *Salutations* - *Saluto*

1. Traktandenliste 2016, Protokoll 2015 - *Ordre du jour 2016, procès-verbal 2015* - Ordine del giorno 2016, verbale 2015

2. Jahresberichte des Vereins und der Kommissionen – *Rapports annuels de la société et des commissions* – Rapporti annuali della società e delle commissioni

3. Jahresrechnungen des Vereins und der Kommissionen 2015/16 – *Comptes annuels de la société et des commissions 2015/16* – Conti annuali della società e delle commissioni 2015/16

4. Budget 2016/17 & Mitgliederbeitrag – *Budget 2016/17 et Cotisations* – Preventivo 2016/17 e quota sociale

5. Mutationen – *Mutations* – Mutazioni

6. Ersatzwahlen - *élections complémentaires* – elezioni suppletive

7. Anträge von Mitgliedern – *Propositions des membres* – Mozioni di membri

8. Varia – *Divers* – Eventuali

- Das Protokoll der letzten GV und die Einladung zur diesjährigen GV (inklusive Traktandenliste) sind ab Ende Oktober 2016 auf unserer Website [www.vsmf.ch](http://www.vsmf.ch) zu finden.
- *Le procès-verbal de la dernière AG et l'invitation de cette année (ordre du jour inclus) se trouveront sur notre site internet [www.sspmp.ch](http://www.sspmp.ch) à partir de fin d'octobre 2016.*
- A partire dalla fine di ottobre 2016 saranno disponibili sul sito [www.ssimf.ch](http://www.ssimf.ch) il verbale dell'ultima AG e l'invito all'AG di quest'anno (inclusivo dell'ordine del giorno).

Locarno, settembre 2016, Arno Gropengiesser, Präsident / *Président* / Presidente

## **SPG und VSMP verstärken ihre Zusammenarbeit - Attraktive Doppelmitgliedschaft**

Die Schweizerische Physikalische Gesellschaft (SPG) und der Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP) werden in Zukunft enger zusammenarbeiten. Die beiden Vorstände haben eine Vereinbarung unterzeichnet, welche zum beiderseitigen Nutzen unter anderem die gemeinsame Organisation von Anlässen (z.B. Vortragsabende, Workshops etc.), in Zusammenarbeit mit der Deutschschweizerischen Physikkommission (DPK) und der Commission Romande de Physique (CRP)<sup>1</sup>, beinhaltet.

Kernstück der Vereinbarung ist die neue Doppelmitgliedschaft, welche den Mitgliedern beider Gesellschaften ab 2016 angeboten wird. Die Mitgliedsbeiträge für Doppelmitglieder sind gegenüber den jeweiligen Einzelbeiträgen wie folgt vergünstigt:

*Ordentliche Mitglieder zahlen in der SPG nur CHF 60.- statt CHF 80.-. Im VSMP beträgt der Mitgliedsbeitrag nur CHF 30.- statt CHF 40.-.*

Wichtig: Dieses Angebot gilt nur für ordentliche Mitglieder, die bisher den vollen Mitgliedsbeitrag zahlen. Beitragsrabatte können nicht kumuliert werden, d.h. profitiert ein Mitglied bereits von einer Beitragsreduzierung aufgrund einer Doppelmitgliedschaftsvereinbarung mit einer anderen Partnergesellschaft oder von sonstigen Vergünstigungen, kann kein weiterer Rabatt aufgrund dieser Vereinbarung gewährt werden.

Bestehende Mitglieder einer oder beider Gesellschaften, welche in den Genuß dieser Vergünstigung kommen wollen, gehen wie folgt vor:

**Sie sind bereits Mitglied bei SPG und VSMP:** Melden Sie sich bitte formlos beim SPG Sekretariat ([sps@unibas.ch](mailto:sps@unibas.ch)). Nach dem Abgleich erhalten Sie von der SPG eine korrigierte Beitragsrechnung, beim VSMP wird die Reduktion ab der nächsten Beitragsperiode berücksichtigt.

**Sie sind SPG Mitglied, aber noch nicht Mitglied im VSMP:** Melden Sie sich unter [www.vsmf.ch/mitglied.php](http://www.vsmf.ch/mitglied.php) an und geben Sie im Feld "Bemerkungen" Ihre SPG Mitgliedsnummer an (zu finden auf Ihrer aktuellen Beitragsrechnung). Der VSMP meldet der SPG Ihren Eintritt und Sie erhalten anschließend eine korrigierte Beitragsrechnung.

**Sie sind VSMP Mitglied, aber noch nicht Mitglied der SPG:** Verwenden Sie das Anmeldeformular, welches unter [http://www.sps.ch/fileadmin/doc/Formulare/anmeldeformular\\_d-f-e.pdf](http://www.sps.ch/fileadmin/doc/Formulare/anmeldeformular_d-f-e.pdf) heruntergeladen werden kann, und senden es an das SPG-Sekretariat. Die SPG meldet dem VSMP Ihren Eintritt und die Reduktion wird ab der nächsten Beitragsperiode berücksichtigt.

Die Vorstände von SPG und VSMP sind überzeugt, mit dieser Zusammenarbeit und der attraktiven Doppelmitgliedschaft die Physikgemeinde in der Schweiz noch besser zu vernetzen, Synergien zu nutzen und noch besser auf die aktuellen Fragen und Probleme der Physik eingehen zu können. Insbesondere hoffen die beiden Vorstände, daß diese Zusammenarbeit dazu beiträgt, die Attraktivität der Physik sowohl für Mittel- als auch Gymnasialschüler zu steigern.

---

<sup>1</sup> Die zwei ständigen Kommissionen des VSMP, zuständig für die Physik und den Physikunterricht.

## La SSP et la SSPMP renforcent leur coopération – offre attractive pour une affiliation simultanée aux deux sociétés

La Société Suisse de Physique (SSP) et la Société Suisse des Professeurs de Mathématiques et de Physique (SSPMP, VSMP) collaboreront plus étroitement à l'avenir. Les deux comités ont signé un accord pour le bénéfice mutuel des deux parties qui comprend l'organisation d'événements conjoints (par exemple des conférences en soirée, des ateliers, etc.), en coopération avec la Deutschschweizerische Physikkommission (DPK) et la Commission Romande de Physique (CRP) <sup>1</sup>.

Le nouvel accord permet la double affiliation aux membres des deux sociétés, dès 2017. Les frais d'adhésion sont réduits par rapport aux contributions individuelles respectives comme suit:

*Les membres ordinaires ne paient que CHF 60.- à la SSP au lieu des CHF 80.-. Dans le cas de la SSPMP, la cotisation ne s'élève plus qu'à CHF 30.- au lieu des CHF 40.-.*

Important: Cette offre n'est réservée qu'aux membres réguliers qui paient jusqu'à maintenant l'entier des frais d'adhésion. Les réductions de contributions ne peuvent être combinées, c'est-à-dire que si un membre bénéficie déjà d'une réduction de prime due à une convention de double appartenance avec une autre société partenaire ou d'autres avantages, aucune réduction supplémentaire ne peut être accordée d'après cet accord.

Les membres de l'une ou de l'autre des deux sociétés qui veulent bénéficier de cet avantage procéderont comme suit:

**Vous êtes déjà membre de la SSP et de la SSPMP:** Veuillez vous adresser au Secrétariat de la SSP ([sps@unibas.ch](mailto:sps@unibas.ch)). Après vérification vous recevrez une facture corrigée de la contribution à la SSP, pour ce qui concerne la SSPMP, la réduction de la cotisation sera prise en compte sur la période suivante.

**Vous êtes membres de la SSP, mais pas encore de la SSPMP:** Veuillez vous inscrire au site [www.sspmp.ch/membre.php](http://www.sspmp.ch/membre.php) et entrer dans le champ "Remarques" votre numéro de membre SSP (qui se trouve sur votre actuelle facture de cotisation). La SSPMP avisera la SSP de votre inscription et vous recevrez par la suite une facture de contribution corrigée.

**Vous êtes membre de la SSPMP, mais pas encore membre de la SSP:** Utilisez le formulaire d'inscription, qui peut être téléchargé depuis [http://www.sps.ch/fileadmin/doc/Formulare/anmeldeformular\\_d-f-e.pdf](http://www.sps.ch/fileadmin/doc/Formulare/anmeldeformular_d-f-e.pdf), et envoyez le au Secrétariat de la SSP. La SSP annonce votre inscription à la SSPMP et la réduction entre en vigueur à la prochaine période de cotisation.

Les comités de la SSP et de la SSPMP sont convaincus que cet accord permettant la double affiliation permettra de mieux développer les relations entre les physiciens de Suisse, de mieux exploiter les synergies et de mieux répondre aux questions et aux problèmes actuels de la physique. En particulier, les deux comités espèrent que cette coopération contribuera à renforcer l'attractivité de la physique à la fois pour les élèves des écoles secondaires et pour ceux du niveau gymnasial.

---

<sup>1</sup> Les deux commissions permanentes de la SSPMP, responsables de la physique et de l'enseignement de la physique.

## SSF e SSIMF rafforzano la loro collaborazione – Attrattiva offerta di doppia affiliazione

La Società svizzera di fisica (SSF) e la Società svizzera degli insegnanti di matematica e di fisica (SSIMF) intendono collaborare maggiormente in futuro. I comitati delle due società hanno firmato una convenzione che, nell'interesse comune, prevede la possibilità di organizzare insieme eventi (per esempio conferenze, workshop ecc.), in collaborazione con la Commissione svizzero-tedesca di fisica (DPK) e la Commissione romanda di fisica (CRP) <sup>1</sup>.

Punto centrale della convenzione è la nuova doppia affiliazione che è proposta ai membri di entrambe le società a partire dal 2016. Le quote d'adesione per la doppia affiliazione sono ridotte, rispetto a quelle per le singole società, nel modo seguente:

*Membri ordinari della SSF pagano CHF 60.- invece di CHF 80.-; membri ordinari della SSIMF pagano CHF 30.- invece di CHF 40.-.*

**Importante:** Questa offerta vale solo per i membri ordinari che finora hanno pagato la piena quota d'adesione. Riduzioni della quota annuale non possono essere cumulate: a un membro che già usufruisce di una riduzione in seguito ad una convenzione di doppia affiliazione con un'altra società oppure di altri tipi di riduzione non può essere concessa un'ulteriore riduzione in base alla presente convenzione.

I membri di una delle società che volessero usufruire di questa riduzione procederanno come segue:

**Chi è già membro della SSF e della SSIMF:** Si annunci in modo informale alla segreteria della SSF ([sps@unibas.ch](mailto:sps@unibas.ch)). Dopo verificaione riceverà dalla SSF una fatturazione corretta/nuova del contributo sociale, presso la SSIMF la riduzione sarà conteggiata/considerata a partire dal prossimo anno sociale.

**Chi è membro della SSF ma non ancora membro della SSIMF** si annunci all'indirizzo [www.ssimf.ch/membro.php](http://www.ssimf.ch/membro.php) e indichi nel campo "Osservazioni" il suo numero di socio della SSF (lo può reperire sull'attuale fattura della quota sociale SSF). La SSIMF trasmetterà alla SSF la sua adesione e lei riceverà successivamente una fatturazione corretta della quota d'adesione.

**Chi è membro della SSIMF ma non ancora della SSF** utilizzi il modulo di richiesta d'adesione, che può essere scaricato dal sito [http://www.sps.ch/fileadmin/doc/Formulare/anmeldeformular\\_d-f-e.pdf](http://www.sps.ch/fileadmin/doc/Formulare/anmeldeformular_d-f-e.pdf) e lo invii alla segreteria della SSF. La SSF trasmetterà alla SSIMF la sua adesione e la rispettiva riduzione verrà applicata a partire dal prossimo anno sociale.

I comitati della SSF e della SSIMF sono persuasi che, grazie a questa collaborazione e l'attrattiva offerta data dalla convenzione di doppia affiliazione, la comunità dei fisici possa essere ancora meglio messa in rete, che si possano sfruttare sinergie e che si possa rispondere meglio alle sfide attuali della fisica. In particolare, i due comitati si augurano che questa più intensa collaborazione contribuisca a rendere la fisica ancora più attrattiva agli occhi degli allievi delle scuole secondarie e di maturità liceale.

---

<sup>1</sup> Le due commissioni permanenti della SSIMF, responsabili della fisica e del suo insegnamento.

## Erfolgreiche Schweizer Schülerinnen und Schüler an Internationaler Mathematik- und Physik-Olympiade

Irène Steinegger-Meier, Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden,  
[irene.steinegger@olympiads.unibe.ch](mailto:irene.steinegger@olympiads.unibe.ch)

Unvergessliche Wochen gingen Mitte Juli 2016 zu Ende für die sechs Schweizer Mittelschülerinnen und -schüler, die an der Internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) teilnahmen und für jene fünf, die an der Internationalen Physik-Olympiade (IPhO) dabei waren. Junge Talente aus 109 Ländern trafen sich in Hongkong und wetteiferten um Medaillen an der 57. IMO. In Zürich kamen Jugendliche aus 84 Ländern für die 47. IPhO zusammen. Beide Olympiaden forderten Höchstleistungen. Die Schülerinnen und Schüler qualifizierten sich zuvor in einem mehrmonatigen und mehrstufigen nationalen Verfahren für die internationalen Wettbewerbe. Bei beiden Delegationen waren nebst den männlichen Mitgliedern je eine junge Frau mit dabei.

### Silber, Bronze und «Honourable Mentions»

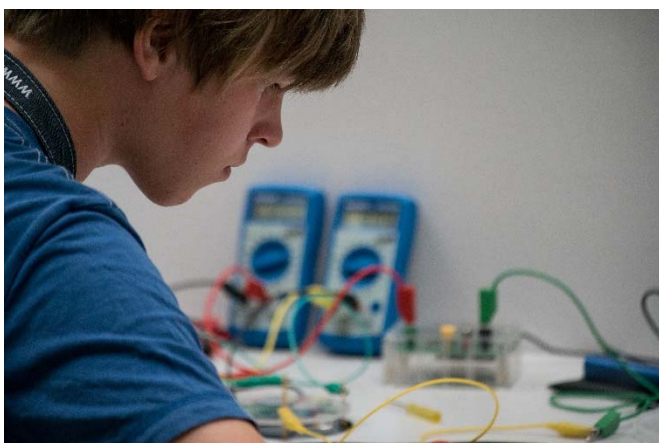


Bildunterschrift: Das Schweizer Team in Hongkong (Foto imosuisse)

Die Konkurrenz ist gross unter den talentierten Jungmathematikern und -physikern aus aller Welt. Alle gaben ihr Bestes und haben ihr Können unter Beweis gestellt. In Mathematik erzielte das Team mit einer Silber- und vier Bronzemedailles gar das zweitbeste Resultat seit je. Das dürfte auch damit zu tun haben, dass fünf der sechs Teammitglieder schon letztes Jahr an der IMO waren und so Erfahrungen sammeln konnten. Auch in Physik gibt man sich zufrieden mit einer Bronzemedaille und vier «Honourable Mentions».

Doch Medaillen sind nicht alles, wie es Sijing Huang (CEC André-Chavanne, GE) aus Le Grand-Saconnex, Teilnehmer an der IMO, stellvertretend für alle zusammenfasst: «Am Wichtigsten ist es, dabei zu sein. Trotz meinem Resultat komme ich mit funkelnden Augen nach Hause».

## Anspruchsvolle Prüfungen



Bildunterschrift: Konzentriert: Experiment an IPhO 2016 (Foto Roman Ernst, IPhO 2016)

Die Mitglieder der Vereine Schweizer Mathematik- und Schweizer Physik-Olympiaden haben die Jugendlichen auf die Olympiaden vorbereitet. Sie sind selbst ehemalige Teilnehmende und studieren oder doktorieren heute an Universitäten. Die Prüfungen sind international anspruchsvoll und bewegen sich auf Universitätsniveau. In Mathematik absolvierten die Jugendlichen zwei Prüfungen à je 4.5 Stunden zu verschiedenen Fachgebieten. So zum Beispiel zur Kombinatorik: Hüpfende Frösche mussten so auf Linien platziert werden, dass nie zwei Frösche gleichzeitig am selben Ort sind. In Physik wurden die Teilnehmenden mit einer fünfstündigen Theorie- und einer Experimentalprüfung getestet. Es galt, ein Experiment zur zweidimensionalen Leitfähigkeit und ein Versuch zum Phasenübergang zu lösen.

Alle Aufgaben und die Lösungen der IMO sind auf der offiziellen Webseite einzusehen (<http://www.imo-official.org/problems.aspx>). Die Aufgaben der IPhO sind hier zu finden: [http://www.ipho.org/problems-and-solutions\\_5.html](http://www.ipho.org/problems-and-solutions_5.html).

## Leidenschaft und Spass bei den Wissenschafts-Olympiaden

Immer wieder interessieren sich talentierte Nachwuchswissenschaftler für mehr als eine Disziplin. So zum Beispiel Henning Zhang, der sich für die IMO und die IPhO 2016 in Zürich qualifiziert hatte. Da die Olympiaden gleichzeitig stattfanden, musste er sich für eine entscheiden. Er wählte die IMO im exotischen Hongkong. Die jungen Talente profitieren viel von den Olympiaden. Sie lernen Neues in den Lagern und Workshops und werden von den Ehrenamtlichen gecoacht und motiviert. Das gewährt ihnen einen vertieften Einblick in ihr Lieblingsfach. Genauso wichtig ist, dass die Wissenschafts-Olympiaden den Austausch von Gleichgesinnten ermöglichen. Sei dies national oder international. Die Jugendlichen teilen so ein unvergessliches und begeisterndes Erlebnis.

## Die Schweiz als Organisatorin von Wissenschafts-Olympiaden

Die Schweiz nimmt nicht nur teil, sondern sie organisiert auch Internationale Wissenschafts-Olympiaden. Zum ersten Mal fand 2012 die regionale Olympiade Middle European Mathematical Olympiad (MEMO) in Solothurn statt. 2013 ging es dann mit einer «Grossen» weiter, der Internationalen Biologie-Olympiade IBO in Bern. Dieses Jahr wurde die Internationale Physik-Olympiade 2016, zusammen mit dem Fürstentum Liechtenstein, erfolgreich in Zürich organisiert. Und schon wird die nächste Veranstaltung vorbereitet. Der Verein Schweizer Mathematik-Olympiade (imosuisse) organisiert mit der Unterstützung vom Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden (VSWO) die European Girls' Mathematical Olympiad EGMO 2017. Sie findet vom 6. bis 12. April in Zürich statt. Gerade in Mathematik sind Frauen stark untervertreten, so dass deren Potential nicht ausgeschöpft wird. Um dem entgegenzuwirken, wurde 2012 die EGMO ins Leben

gerufen. Eine besondere Olympiade, die junge weibliche Mathematik-Talente zu begeistern vermag. Das Selektionsverfahren für die Teilnahme findet im Rahmen der Schweizer Mathematik-Olympiade statt. Anmeldeschluss ist der 12. November 2016.

## Schweizer Resultate an der IMO und IPhO 2016

IMO 2016 Hongkong, 6.-16. Juli 2016

Daniel Rutschmann (Kantonsschule im Lee, ZH) aus Andelfingen: Silbermedaille  
Fabian Jin (Kantonsschule Heerbrugg, SG) aus Heerbrugg: Bronzemedaille  
David Rusch (Kantonsschule Wettingen, AG) aus Spreitenbach: Bronzemedaille  
Henning Zhang (Kantonsschule Wettingen, AG) aus Villigen: Bronzemedaille  
Stefanie Zbinden (Kantonsschule Glarus, GL) aus Glarus: Bronzemedaille  
Sijing Huang (CEC André Chavanne, GE) aus Le Grand Saconnex

IPhO 2016, Zürich, 11.-17. Juli 2016

Markus Köhler (Kantonsschule Heerbrugg, SG) aus Balgach: Bronzemedaille  
Caroline Rossier (Collège Sainte-Croix, FR) aus Cottens: Honourable Mention  
Bastian Lengen (Lycée-Collège de la Planta, VS) aus Uvrier: Honourable Mention  
Nicolà Gantenbein (ehem. Kantonsschule Wattwil, SG) aus Eschenbach: Honourable Mention  
Quirin Reding (Kantonsschule Alpenquai, LU) aus Honau: Honourable Mention

Weiterführende Links

[www.olympiads.ch](http://www.olympiads.ch)  
[www.imosuisse.ch](http://www.imosuisse.ch)  
[www.swisspho.ch](http://www.swisspho.ch)  
[www.egmo2017.ch](http://www.egmo2017.ch)

## Weiterbildungskurs: Computing und Sensorik mit Python im Physikunterricht Freitag, 27. Januar und Samstag, 4. März 2017

- **Anbieter**  
Gruppe für Physik und Ausbildung, ETHZ  
Deutschschweizerische Physikkommission (DPK) des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte (VSMP)
- **Zielpublikum**  
Physiklehrpersonen an höheren Mittelschulen und Berufsschulen  
Andere Interessierte am Unterricht mit Python/Raspberry Pi
- **Dauer/Termin**  
2 Tage. Freitag, 27. Januar 2017 (1. Teil) , Samstag, 4. März 2017 (2. Teil)
- **Kursort**  
Gymnasium Bern-Neufeld, Bremgartenstrasse 133, 3012 Bern  
Raum gemäss Wegweiser/Detailprogramm
- **Kurskosten**  
Fr. 200.- inklusive Kursmaterial (Kursunterlagen, Raspberry Pi, Sensorkit)
- **Referenten**  
Christoph Keller, ETHZ, Aegidius Plüss und Assistenz
- **Anmeldung/Kurssite**  
bis **31. Dezember 2016**, Online auf [www.python-exemplarisch.ch/dpkkurs](http://www.python-exemplarisch.ch/dpkkurs)
- **Kontakt**  
Email: [a@pluess.name](mailto:a@pluess.name)
- **Zielsetzungen**
  - 1. Teil:  
Die Teilnehmenden wissen, dass die Computersimulation neben Theorie und Experiment wichtiges Forschungsverfahren in den Naturwissenschaften und der Technik ist. Sie lernen im Kurs die Simulationen an ausgewählten Beispielen im traditionellen Physikunterricht einzusetzen. Dabei wird Python verwendet, eine universelle höhere Programmiersprache, die sich in ihrer Einfachheit mit Basic und Pascal vergleichen lässt und bei Physikern weltweit sehr beliebt ist.
  - 2. Teil:  
Die Teilnehmenden wissen, dass heutzutage praktisch alle physikalischen Experimente computergestützt durchgeführt werden. Sie lernen typische Messtechniken mit Sensoren und einem Microprozessorsystem (Raspberry Pi) kennen und schreiben die Mess- und Steuerprogramme in Python. Am Kurs wird ein vollständiges Experimentierset bestehend aus einem Raspberry Pi 3 und einem Sensorkit abgegeben, mit dem die Grundprinzipien der Elektronik, Sensorik und Robotik erarbeitet werden.

Es sind keine Vorkenntnisse im Programmieren notwendig. Der Kurs bietet aber auch bei guten Programmierkenntnissen genügend Biss. Im Kurs werden die Entwicklungsumgebungen TigerJython und Geany (Python 2.7) eingesetzt. Das Schwergewicht liegt aber nicht bei der Vermittlung einer Programmiersprache, sondern bei konkreten Anwendungen im Physikunterricht und für Projektarbeiten.

# Induktiver Durchflussmesser

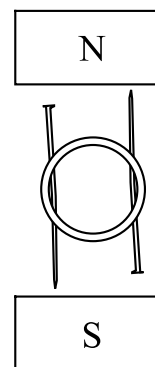
Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

## 1 Einleitung

Die Zeitschrift “aktuelle Technik” findet immer wieder den Weg auf unseren Kaffeetisch und beglückt uns mit Publireportagen elektrotechnischen Inhalts. Ich blättere gern darin, denn die Zeitschrift nennt konkrete Zahlen für z.B. Drehfrequenzen, Leistungen und Drehmomente von real existierenden Motoren, die ich in Aufgaben verwende. In der letzten Ausgabe wurde für einen induktiven Durchflussmesser geworben. Das Inserat hat in mir das drängende Bedürfnis ausgelöst, einen solchen nachzubauen. Nach etwa einer halben Stunde hatte ich das halbe Schulzimmer unter Wasser gesetzt und den gewünschten Effekt gemessen. Im Abschnitt 2 wird das Experiment dargestellt, im Abschnitt 3 der Zweck dieses Artikels beschrieben und im Abschnitt 4 gebe ich die Unterrichtssequenz wieder, mit der ich das Induktionsgesetz motiviere.

## 2 Experiment

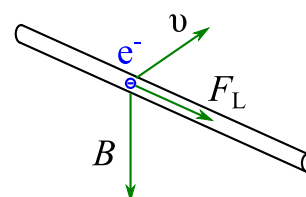
Abbildung 1: Ein Schlauch – im Querschnitt gezeichnet – wird mit zwei Nadeln durchstochen. Der Schlauch hat etwa 12 mm Innendurchmesser und die Nadeln haben im Innern ungefähr 8 mm Abstand. Die Stelle mit den Nadeln wird zwischen Nord- und Südpol eines starken Permanentmagneten geführt. Eine Messung hat dort die Flussdichte 0.11 T ergeben. Die Nadeln sind mit einem digitalen Voltmeter verbunden. Dreht man den Wasserhahn, der mit dem Schlauch verbunden ist, voll auf, so wird das Becken darunter (Länge 45 cm, Breite 30 cm, Tiefe 22 cm) innert 35 Sekunden gefüllt. Aus diesen Angaben folgt ein Volumenstrom von 0.85 Liter pro Sekunde respektive eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit von 7.5 m/s im Schlauch. Das Voltmeter zeigt dann eine Spannung von 6 bis 7 mV an. Die Spannung steigt mit wachsendem Durchfluss. Aus dem Induktionsgesetz erhält man  $U = vBs = 7.5 \text{ m/s} \cdot 0.11 \text{ T} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 7 \text{ mV}$ .



## 3 Induktion nach Mittelschulbüchern

Die sechs deutschsprachigen Physikbücher auf meinem Büchergestell enthalten alle Varianten folgender Argumentation (Abbildung 2):

Abbildung 2: Ein Draht wird mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  durch ein homogenes Magnetfeld  $B$  bewegt. Die Lorentzkraft  $F_L$  verschiebt die freien Elektronen. Geschwindigkeit, Feldstärke und Draht stehen rechtwinklig aufeinander.



“Die Lorentzkräfte pumpen also Elektronen auf eine Seite des Drahtes, sodass das Drahtende negativ (Elektronenüberschuss) und das andere positiv (Elektronenmangel) geladen wird. Dadurch entsteht im Leiter ein Feld und zwischen den Enden des Leiters eine elektrische Spannung, die man *Induktionsspannung* nennt.

Die Grösse der Induktionsspannung ergibt sich aus der Überlegung, dass im Gleichgewicht Lorentzkraft und elektrische Kraft auf die Elektronen einander gerade aufheben müssen:  $-evB = eE$ .

Multiplizieren wir die elektrische Feldstärke  $E$  mit der Länge  $s$  des Drahtes, so erhalten wir die induzierte Spannung  $U_{ind} = s \cdot E = s \cdot vB$  (Quelle dem Autor bekannt)

Diese Argumentation führt zwar betragsmässig zum korrekten Resultat, das sich auch aus der faradayschen Flussregel  $U_{ind} = -d\Phi_m/dt$  herleiten lässt, ich misstrauere ihr aber aus folgenden Gründen:

Die Lorentzkraft verursacht eine Ladungstrennung. Die getrennten Ladungen erzeugen ein elektrisches Gegenfeld, welches die Wirkung der Lorentzkraft kompensiert:  $eE = evB$  (Beträge). Man darf diesen Vorgang als Aufladung eines Kondensators betrachten. Die Aufladung eines Kondensators erfolgt exponentiell mit Zeitkonstante  $\tau = RC$ , d.h. die Gegenspannung ist zu Beginn noch gar nicht da. Die dritte Maxwellgleichung (das Induktionsgesetz  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ ) enthält aber keine Retardierung!

Es ist schwierig, mit dieser Argumentation das Vorzeichen zu begründen, weil es nicht der Ursache (Lorentzkraft treibt Elektronen an) sondern der Wirkung (es entsteht ein Gegenfeld) zugeordnet wird. In einem gewöhnlichen Stromkreis wird zwischen Quellenspannung (Urspannung, “elektromotorische Kraft”) und “Spannungsabfall” am Widerstand, Kondensator oder Spule unterschieden. Was ist jetzt dieses  $U_{ind}$ ? Manchmal wird das Vorzeichen indirekt gefordert, weil sonst der Energiesatz verletzt wäre (Lenzsche Regel).

Albert Einstein hat in seiner berühmten Arbeit “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” (1905) die spezielle Relativitätstheorie (SRT) aus der Elektrodynamik hergeleitet. Die SRT gilt jedoch allgemeiner. Ein erster Schritt zu dieser Erkenntnis waren die Arbeiten von Wladimir Ignatowski, der versucht hat, die Lorentztransformationen ohne das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit herzuleiten (1910). Zum Stichwort “Relativity without Light” findet sich eine reichhaltige Literatur im Internet. Als Konsequenz hat Leigh Page im Jahr 1912 die letzten beiden Maxwellgleichungen (Induktionsgesetz und Amperesches Gesetz) aus dem ersten Gesetz, das im wesentlichen das Coulombsche Gesetz darstellt, hergeleitet. Es ist also möglich, Induktion relativistisch zu begründen. Bei niedrigen Geschwindigkeiten, wie sie in Kraftwerks-Generatoren auftreten, ist das sogar möglich, ohne den ganzen Formelapparat der SRT aufzufahren: klassische Relativitätstheorie (Galilei) genügt.

## 4 Relativistische Einführung des Induktionsgesetzes

### a) Laborsystem

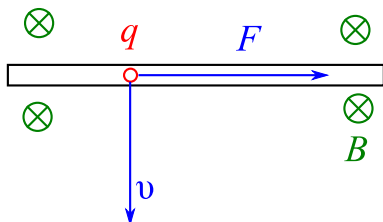


Abbildung 3: Ein gerader Leiter enthält freie Ladungsträger mit Ladung  $q > 0$ . Der Leiter wird mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  durch ein homogenes Magnetfeld  $B$  bewegt. Die Ladungsträger bewegen sich zu Beginn ebenfalls mit  $v$ . Auf die Ladungsträger wirkt die magnetische Kraft  $F = qvB$ .

### b) Ruhesystem

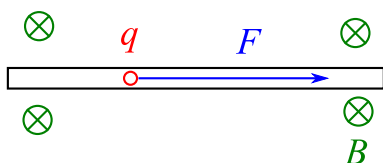


Abbildung 4: Wir bewegen uns in Gedanken mit dem Leiter. Die Ladungstrennung stellt sich immer noch ein, d.h. die Kraft wirkt immer noch, aber es kann keine magnetische Kraft mehr sein, da in diesem Bezugssystem die Ladung anfangs ruht. Die einzige Alternative ist, dass eine elektrische Kraft  $F = qE$  wirkt.

**c) Vergleich der Beobachtungen**

Trotz Wechsel des Bezugssystems bleibt die Kraft gleich, denn es stellt sich dieselbe Wirkung ein.

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB \quad (\text{Beträge})$$

Durch Wechsel des Bezugssystems ist aus einem magnetischen ein elektrisches Feld geworden! Die Beziehung  $E = vB$  ist ein Spezialfall: Die vollständigen Transformationsgleichungen finden sich in der genannten Arbeit Albert Einsteins. Über die Länge  $s$  des Leiters wird also folgende Spannung induziert:

$$U_{\text{ind}} = Es = vBs$$

**d) Vorzeichen**

Um das Vorzeichen festzulegen, wählen wir in Abbildung 5 ein rechtshändiges Koordinatensystem: x-Achse nach rechts, y-Achse nach oben, z-Achse aus der Zeichenebene heraus. Aus  $E = vB$  (Beträge) wird  $E_y = \pm v_x B_z$ .

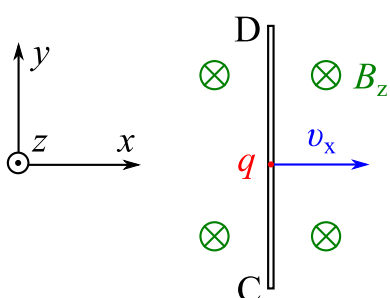


Abbildung 5: Der Leiter werde in einem Magnetfeld nach rechts (positive x-Richtung) geführt. Die Kraft auf die positive Probeladung  $q$  zeigt nach oben (positive y-Richtung). Die Länge des Leiters wird in die technische Stromrichtung gemessen, hier von C nach D:  $s_y = s_{CD} > 0$ . Im gleichen Sinn wird die Spannung gemessen.

Die magnetische Kraft auf die positive Probeladung in Abb. 5 zeigt nach oben, ebenso die elektrische Kraft und die elektrische Feldstärke, d.h.  $E_y > 0$  und  $U_{\text{ind}} = E_y s_y > 0$ . Nun ist aber  $v_x > 0$  und  $B_z < 0$ , d.h. nur mit  $E_y = -v_x B_z$  kann das Vorzeichen übereinstimmen.

Das Vorzeichen in  $U_{\text{ind}} = -d\Phi/dt \stackrel{\text{hier}}{=} E_y s_y = -v_x B_z s_y$  ergibt sich aus der Transformation des elektromagnetischen Feldes. Die Induktionsspannung ist die Quellenspannung und nicht die Gegenspannung des mit Verzögerung aufgebauten, elektrischen Gegenfelds.

**e) Epilog**

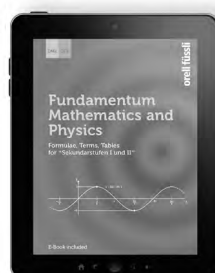
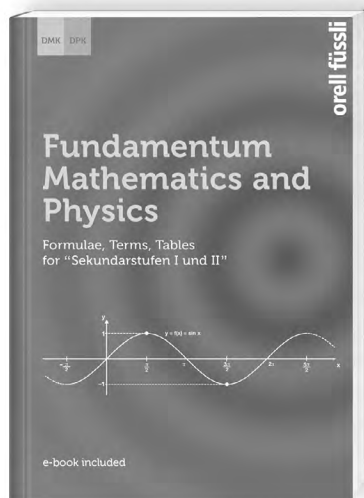
Meine Schülerinnen und Schüler spitzen immer die Ohren, wenn ich etwas zur Relativitätstheorie ankündige, auch jene im musisch-neusprachlichen Profil. Die Sequenz führt eine alltägliche und wichtige Anwendung der speziellen Relativitätstheorie vor. Das Vorzeichen lasse ich meist weg, dafür zeige ich die Gleichwertigkeit mit der faradayschen Flussregel. Die Flussregel führt in einem einfachen Fall auf  $U_{\text{ind}} = d\Phi/dt = d(A \cdot B)/dt = dA/dt \cdot B + A \cdot dB/dt$ . Die erste Hälfte des letzten Terms lässt sich leicht mit  $v_x s_y B$  identifizieren. Der zweite Summand benötigt eine erweiterte, relativistische Betrachtung: Ein variierendes Magnetfeld am Ort des Leiters kann durch eine z.B. zeitliche Zunahme der Feldstärke oder durch eine Bewegung an einen Ort mit stärkerem, statischem Feld erklärt werden.

“The rotating armatures of every generator and every motor in this age of electricity are steadily proclaiming the truth of relativity theory to all who have ears to hear.” (Leigh Page)

22. Juni 2016, Lie.

# Die Eins-zu-eins-Übersetzung für den Immersionsunterricht

NEU IN  
ENGLISCH



DMK, DPK (Hrsg.)  
**Fundamentum  
Mathematics and  
Physics**

**Formulae, Terms, Tables  
for "Sekundarstufen I und II"  
e-book included**

2016, 120 Seiten, broschiert  
978-3-280-04080-5, **Fr. 24.–**

**Ab sofort erhältlich**



**BLICK INS BUCH:  
[www.ofv.ch/lernmedien](http://www.ofv.ch/lernmedien)**

Identisch in Inhalt und Seitengestaltung kann mit beiden Sprachversionen im Unterricht oder im Selbststudium parallel gearbeitet werden. Die zentralen Wissensinhalte für Mathematik und Physik sind in der praktischen Formelsammlung mit Worten knapp umschrieben. Die farbige Hinterlegung der Fakten ermöglicht eine rasche Orientierung.

## Weiterhin erhältlich:



**Fundamentum  
Mathematik und Physik  
inklusive E-Book**

8. aktual. Auflage 2015, 120 Seiten  
978-3-280-04098-0, **Fr. 22.–**



**Formeln, Tabellen, Begriffe  
inklusive E-Book**

5. erw. Auflage 2015, 264 Seiten  
978-3-280-04116-1, **Fr. 25.–**



**Formulae, Tables and Concepts**

2014, 264 Seiten  
978-3-280-04084-3, **Fr. 25.–**

**Hinweis:**  
Die englische  
Ausgabe ist  
sowohl mit  
wie auch  
ohne E-Book  
erhältlich.

Bestellen Sie online über  
[www.ofv.ch/lernmedien](http://www.ofv.ch/lernmedien)

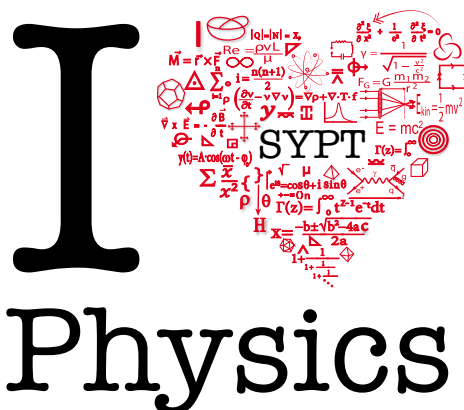
**orell füssli** Verlag

## SYPT Physics Week und SYPT 2017

Samuel Byland, Pro IYPT-CH, samuel.byland@sypt.ch

### Das SYPT feiert einen runden Geburtstag

Im nächsten Jahr findet mit dem *Swiss Young Physicists' Tournament* (SYPT, [1]) 2017 zum zehnten Mal ein nationaler Wettbewerb nach dem Vorbild des *International Young Physicists' Tournament* (IYPT, [2]) statt! Bei den bisherigen Austragungen nahmen bereits über 300 Schülerinnen und Schüler an diesem aussergewöhnlichen und packenden Physikwettbewerb teil. Die gute Arbeit mit dem naturwissenschaftlichen Nachwuchs macht sich auch international bemerkbar. In den letzten Jahren gab es immer eine Medaille fürs Schweizer IYPT-Team (zweimal Gold, einmal Silber, zweimal Bronze)!



**Swiss Young Physicists' Tournament**

On 18.-19. March, 2017 at the EPF Lausanne

### SYPT Physics Week

Obwohl das SYPT mittlerweile vielen Physiklehrpersonen bekannt ist, scheuen viele vor dem doch recht grossen Aufwand für die Betreuung interessierter Schülerinnen und Schüler zurück. Existiert an einer Schule kein Unterrichtsfach, in dessen Rahmen an den Problemstellungen gearbeitet werden kann, geschieht die Vorbereitung hauptsächlich in der Freizeit.

Um möglichst vielen Interessierten die Möglichkeit zu geben, erfolgreich am SYPT teilzunehmen, wird vom **13. bis 17. Februar 2017** erstmals eine Vorbereitungswoche, die *SYPT Physics Week* durchgeführt. Die Teilnehmerinnen und Teilnehmer werden von SYPT-erfahrenen Lehrpersonen und von ehemaligen Teilnehmerinnen und Teilnehmern bei der Arbeit an den Problemstellungen unterstützt.

Die Teilnahme an der SYPT Physics Week steht allen Schülerinnen und Schülern offen, welche sich fürs SYPT angemeldet haben. Die Kosten (inkl. Unterkunft und Verpflegung) werden von Pro IYPT-CH übernommen.

## Aufruf: Swiss Young Physicists' Tournament 2017

Für eine Teilnahme als Team beim SYPT bearbeiten die drei Schülerinnen/Schüler eines Teams je eines der aktuellen Probleme (siehe [3]). Mindestens ein wichtiger Aspekt der Fragestellung sollte sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht und für andere Teilnehmende verständlich erklärt werden. Bei der Präsentation und Diskussion (auf Englisch) der Resultate während des SYPT kommen neben physikalischen Aspekten auch kommunikative Fähigkeiten zum Tragen. Die Arbeit an einem IYPT-Problem lässt sich später auch sehr gut im Rahmen einer Maturitätsarbeit oder für ein Projekt bei Schweizer Jugend forscht ([4]) weiterführen.

Im Jubiläumsjahr wagen wir erstmals den Sprung über den "Röstigraben": Das SYPT 2017 findet am **18./19. März 2017** an der **EPFL in Lausanne** statt. Nicht zuletzt dank der *SYPT Physics Week* sind wir zuversichtlich, dass wir dort auch Teams von Schulen begrüßen dürfen, welche zum ersten Mal teilnehmen.

Wichtige Informationen zum SYPT findet man auf unserer Webseite ([www.sypt.ch](http://www.sypt.ch)), insbesondere in der Turnierbroschüre. Es würde uns freuen, wenn Sie die Klassen an Ihrer Schule kurz über den Anlass informieren würden. Vielleicht können Sie einige der Probleme sogar für Projektarbeiten in Ihrem Unterricht oder in anderen dafür geeigneten Gefässen einsetzen. Gerne stellen auch ehemalige Teilnehmerinnen und Teilnehmer das SYPT direkt an Ihrer Schule vor.

Falls Sie (bzw. Ihre Schüler/-innen) sich fürs SYPT interessieren, wenden Sie sich am besten direkt an mich ([samuel.byland@sypt.ch](mailto:samuel.byland@sypt.ch)). Falls eine Teilnahme beim SYPT 2017 (und gegebenenfalls bei der *SYPT Physics Week*) geplant ist, bitten wir um eine provisorische **Voranmeldung bis Ende November 2016**. Der **definitive Anmeldeschluss ist der 31. Dezember 2016**.

### Das Wichtigste in Kürze

**Datum:** 18./19. März 2017

**Ort:** EPFL Lausanne

**Anmeldung (provisorisch)** bis Ende November 2016 an [samuel.byland@sypt.ch](mailto:samuel.byland@sypt.ch)

### Links

- [1] *Swiss Young Physicists' Tournament* ([www.sypt.ch](http://www.sypt.ch))
- [2] *International Young Physicists' Tournament* ([iypt.org](http://iypt.org))
- [3] Problemstellungen für SYPT/IYPT 2016 ([iypt.org/images/f/f1/problems2017.pdf](http://iypt.org/images/f/f1/problems2017.pdf))
- [4] Schweizer Jugend forscht ([sjf.ch](http://sjf.ch))

# Lagging Pendulum – Trajectoires stables d'un pendule forcé

Emilie Hertig, Gymnase Auguste Piccard, [emilie.hertig@bluewin.ch](mailto:emilie.hertig@bluewin.ch)



## 1. Introduction

Tout au long de l'évolution de la physique, la grande diversité de trajectoires pouvant être observées et modélisées dans différentes situations a fait du pendule un objet d'étude d'un intérêt primordial pour les scientifiques. Un cas particulièrement fascinant du comportement du pendule se distingue lorsque le point d'attache (ou pivot) de ce dernier n'est pas fixe, mais décrit un mouvement oscillatoire. Une telle problématique a déjà été traitée à plusieurs reprises dans la littérature, par exemple par R. Van Dooren [1], Gabriela González [2] ou encore Tom Duncan [3]. Ces recherches font notamment intervenir des pendules subissant une oscillation harmonique forcée horizontale ou verticale, et visent à démontrer l'existence de comportements chaotiques de la masse dans certaines conditions. Le cas d'un pivot décrivant un cercle horizontal, cependant, n'apparaît pas dans ces références ; l'étude d'une telle situation figurait ainsi parmi les problèmes à résoudre pour le IYPT (*International Young Physicists' Tournament*) 2016 à Iekaterinbourg. L'énoncé de la question est le suivant :

« Un pendule est constitué d'un fil solide et d'une masse. Quand le pivot du pendule commence à se mouvoir le long d'une circonférence horizontale, la masse se met à décrire un cercle qui peut avoir un rayon plus petit, dans certaines conditions. Étudiez le mouvement et les trajectoires stables de la masse. »<sup>1</sup>

Cet article vise à proposer une solution à ce problème en présentant une description généralisée du mouvement de la masse, obtenue à partir du lagrangien du système. Les orbites circulaires ainsi que leur stabilité y sont étudiées en présence d'une force de frottement dissipative, et les résultats théoriques obtenus, confirmés par l'expérience, sont interprétés qualitativement grâce au théorème de Noether.

## 2. Equations du mouvement

Les équations du mouvement de la masse sont ici calculées relativement à un référentiel d'inertie dont l'origine  $O$  se situe au centre de la trajectoire du pivot. Le système de coordonnées utilisé est représenté en fig. 1. Le pivot décrit un cercle de rayon  $R$  ; sa rotation par rapport à l'axe  $x$  est décrite par l'angle  $\alpha$ , dont l'évolution au cours du temps est connue (vitesse angulaire constante  $\omega_0$ ). La masse se trouve au bout du fil de longueur  $l$  ; la direction de ce dernier détermine un angle  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) avec la verticale, qui constitue la première coordonnée généralisée. La seconde coordonnée généralisée,  $\phi$ ,

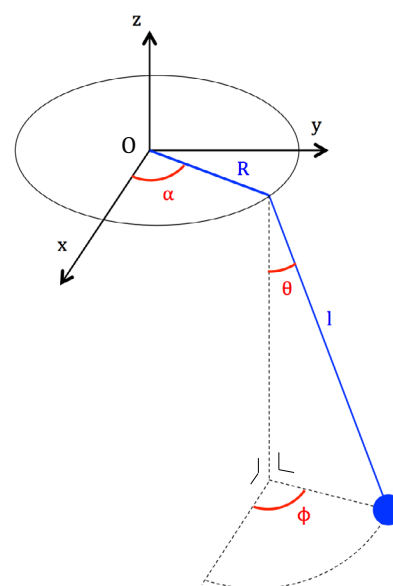


Fig. 1 : système de coordonnées

<sup>1</sup> Traduit de l'anglais à partir du texte original [4].

est contenue dans le plan horizontal et correspond à l'angle azimutal de la masse autour de la verticale passant par le pivot. La position de la masse s'exprime donc à l'aide de deux coordonnées dépendantes du temps, ce qui signifie que le système a deux degrés de liberté. Il est alors possible de déterminer le vecteur position (et par conséquent également le vecteur vitesse, qui en est la dérivée) en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos(\alpha) + l\sin(\theta)\cos(\phi) \\ R\sin(\alpha) + l\sin(\theta)\sin(\phi) \\ -l\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Cette conversion permet d'exprimer le lagrangien  $L$  du système en fonction des deux coordonnées généralisées. La description complète du mouvement de la masse est alors déterminée grâce à l'équation d'Euler-Lagrange appliquée à chacune des coordonnées généralisées  $q_i$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2)$$

Cette opération aboutit à un système de deux équations différentielles qui permet la détermination de  $\theta$  et  $\phi$  en fonction du temps pour des conditions initiales données :

$$\begin{cases} l\ddot{\theta} - l\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 - \omega_0^2 R \cos(\theta)\cos(\omega_0 t - \phi) + g\sin(\theta) = 0 \\ l\sin(\theta)\ddot{\phi} + 2l\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} - \omega_0^2 R \sin(\omega_0 t - \phi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

En présence d'une force de frottement dissipative, le principe est le même, mais le membre de droite de (2) devient non nul et correspond alors à la force généralisée. J'ai utilisé ici l'expression d'une force de frottement visqueux entre la masse et l'air, opposée au mouvement et proportionnelle à la vitesse, et qui se définit par la formule  $\vec{F} = -\mu\vec{v}$ .  $\mu$  représente ici un coefficient dépendant du milieu considéré. La force généralisée pour chaque coordonnée se définit ainsi, où  $\vec{r}$  correspond au vecteur position du point d'application (ici la masse):

$$Q_j = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \quad (4)$$

L'équation d'Euler-Lagrange devient alors  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_j$  (5), et le système (3) est modifié en conséquence. Il est encore important de mentionner que, lorsque la vitesse d'un objet est élevée, la force de frottement avec le milieu environnant peut s'exprimer différemment (proportionnelle au carré de la vitesse); cependant, en raison de la linéarisation réalisée dans le cadre de l'analyse de stabilité (voir section 3.2), il paraissait plus adéquat d'utiliser la formule  $\vec{F} = -\mu\vec{v}$ , qui permet également d'étudier l'influence de la dissipation d'énergie sur la stabilité des solutions circulaires.

### 3. Trajectoires circulaires

#### 3.1 Description mathématique

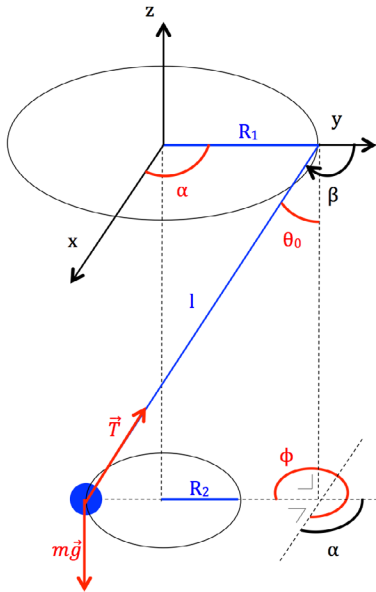


Fig. 2 : schéma de la situation

Il s'agit ici de déterminer quelles sont les solutions des équations du mouvement donnant lieu à des trajectoires circulaires. Une telle solution est premièrement caractérisée par un angle  $\theta$  constant, ce qui s'exprime par les conditions  $\theta(t) = \theta_0$  et  $\theta'(t) = 0$ . De plus, les vitesses angulaires de la masse et du point d'attache sont égales, ce qui sera vérifié expérimentalement par la suite. En l'absence de force de frottement, le rayon de la trajectoire du pivot et le fil se situent dans le même plan vertical, comme l'indique la fig. 2. Il est important de réaliser qu'une trajectoire circulaire peut être obtenue à partir de deux dispositions différentes : dans le premier cas, le fil est à l'extérieur de la trajectoire du pivot (comme en fig. 1) et la condition d'égalité des périodes implique  $\phi(t) = \alpha = \omega_0 t$ . Les autres trajectoires circulaires résultent d'une disposition « croisée » telle que représentée en fig. 2 ; dans ce cas, on obtient  $\phi(t) = \pi + \alpha$ . Une fois ces conditions prises en compte, une des deux équations du mouvement

est trivialement satisfaite ; dans le cas du cercle externe, la deuxième aboutit à :

$$g \tan(\theta_0) - \omega_0^2 (R_1 + l \sin(\theta_0)) = 0 \tag{6}$$

A partir de cette égalité, il est possible de substituer  $l$  par  $\frac{R_2 - R_1}{\sin(\theta_0)}$  afin de faire apparaître le rayon du cercle décrit par la masse ( $R_2$ ) dans les équations. On obtient le système :

$$\begin{cases} g \tan(\theta_0) = \omega_0^2 R_2 \\ R_2 - R_1 = l \sin(\theta_0) \end{cases} \tag{7}$$

Ce système a une solution physiquement correcte. Pour la disposition croisée, un signe dans l'équation (6) et l'expression de  $l$  sont modifiés. Le nouveau système obtenu, qui a deux solutions positives à partir d'une certaine valeur de  $\omega_0$ , est :

$$\begin{cases} g \tan(\theta_0) = \omega_0^2 R_2 \\ R_1 + R_2 = l \sin(\theta_0) \end{cases} \tag{8}$$

Ces équations constituent une prédiction théorique pour le rayon  $R_2$  du cercle, qui sera vérifiée par l'expérience ; le même résultat peut être obtenu par l'analyse des forces agissant sur la masse et l'utilisation de la deuxième loi de Newton. Les trois solutions circulaires obtenues à partir de (7) et (8) sont représentées sur la fig. 3, où apparaît l'angle  $\beta$  orienté entre le fil et l'horizontale pour chacune de ces trajectoires.

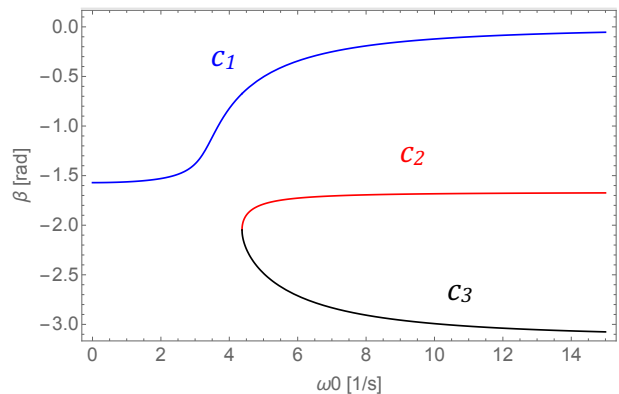


Fig. 3 : angle  $\beta$  en fonction de la vitesse angulaire du pivot pour les trois solutions circulaires

La courbe  $c_1$  correspond à la trajectoire au cours de laquelle le fil est à l'extérieur du cercle décrit par le pivot, et pour laquelle  $\beta = -\frac{\pi}{2} + \theta_0$ ; cette solution existe quelle que soit la fréquence d'excitation du système. Lorsque cette fréquence s'approche de la fréquence angulaire naturelle du pendule,  $\sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $\beta$  subit une brusque augmentation caractéristique du pic de résonance. Les deux autres trajectoires circulaires, caractérisées par la disposition « croisée » pour laquelle  $\beta = -\frac{\pi}{2} - \theta_0$ , n'apparaissent qu'au-dessus de ce seuil critique. En effet, l'équation  $\tan(\theta_0) = \frac{\omega_0^2 l}{g} \sin(\theta_0) - \frac{\omega_0^2 R_1}{g}$ , obtenue par substitution à partir de (8), ne peut avoir de solutions comprises entre 0 et 90°, pour lesquelles la tangente est supérieure au sinus, que dans le cas où  $\frac{\omega_0^2 l}{g} > 1$ . Pour un rayon  $R_1$  donné, il est possible de déterminer plus précisément la vitesse angulaire minimale à partir de laquelle ces trajectoires sont observables en résolvant l'équation ci-dessus pour  $\omega_0$  et en calculant le minimum local pour  $\theta_0$  positif de la fonction obtenue. L'expression mathématique de cette vitesse angulaire limite est donnée par la formule suivante :

$$\omega_{min} = g(l^{2/3} - R_1^{2/3})^{-\frac{3}{2}} \quad (9)$$

Ce résultat sera également l'objet d'une investigation expérimentale. Il est encore important de noter que seul le cercle  $c_2$  peut avoir un rayon inférieur à  $R_1$ .

Lorsque l'influence de la force de frottement est significative, le fil et le rayon du cercle décrit par le pivot ne se situent plus dans le même plan vertical : en effet, la projection horizontale de la force de tension dans le fil doit alors avoir une composante non nulle dans la direction du mouvement afin de compenser la force dissipative et de permettre l'existence d'un MCU. La fig. 4 illustre cette situation, où la présence de l'angle  $\gamma$  non nul assure l'équilibre des forces tangentielllement au cercle, mais modifie légèrement les prédictions pour le rayon  $R_2$  de la trajectoire de la masse ainsi que pour  $\theta_0$  et  $\phi$ . Sachant que  $T \cos(\theta_0) = mg$  (par projection sur l'axe  $z$ ), la deuxième loi de Newton ainsi que le théorème du cosinus appliqués à la situation représentée en fig. 4 aboutissent au système suivant :

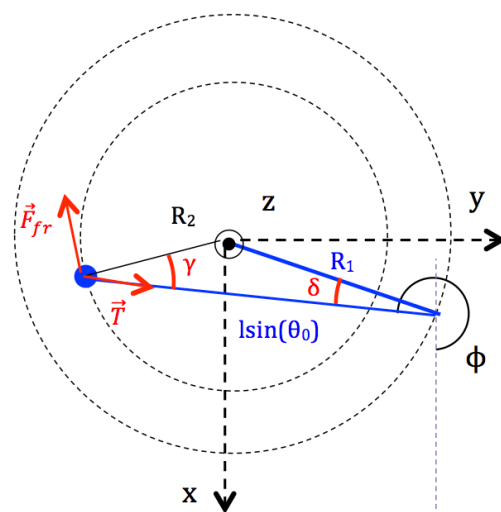


Fig. 4 : situation avec frottements, vue de dessus

$$\begin{cases} mg \tan(\theta_0) \sin(\gamma) = \mu v = \mu \omega_0 R_2 \\ g \tan(\theta_0) \cos(\gamma) = \omega_0^2 R_2 \\ R_1^2 = R_2^2 + (l \sin(\theta_0))^2 - 2R_2 l \sin(\theta_0) \cos(\gamma) \end{cases} \quad (10)$$

L'angle  $\delta$  se calcule à partir du théorème du sinus:  $\frac{R_1}{\sin(\gamma)} = \frac{R_2}{\sin(\delta)}$ . Le système (10) possède trois solutions physiquement correctes, analogues aux trois cercles obtenus en l'absence de frottement, qui permettent de réaliser les prédictions théoriques pour le rayon et les angles  $\phi$  et  $\theta$ . Lorsque la force dissipative n'a qu'une influence restreinte, ce qui est le cas lors des

expériences réalisées avec une masse métallique de 58.3 [g], les résultats de (8) et (10) pour le rayon de  $c_2$  sont pratiquement identiques ; le second modèle est par contre indispensable lors de l'analyse de la stabilité des solutions circulaires, pour laquelle une précision importante est requise afin de démontrer l'existence d'un phénomène de convergence.

### 3.2 Stabilité

La stabilité des trois solutions circulaires citées plus haut peut être étudiée mathématiquement grâce aux équations du mouvement linéarisées. L'étude de la stabilité repose sur l'ajout d'une perturbation, représentée par une fonction  $s_i(t)$ , supposée relativement petite, à la solution particulière caractérisant le cercle. La solution circulaire considérée est exprimée par une fonction définie pour chacune des coordonnées grâce à (6), (7) ou (9) selon la situation étudiée, puis la perturbation  $y$  est ajoutée : on obtient  $\theta(t) = \theta_0 + s_1(t)$  et  $\phi(t) = \omega_0 t - \delta + s_2(t)$  pour le cercle externe, ou  $\phi(t) = \pi + \omega_0 t + \delta + s_2(t)$  pour les deux autres cercles. Il est alors possible d'insérer ces expressions dans les équations du mouvement définies en (3) ; le système obtenu peut ensuite être linéarisé en effectuant un développement de Taylor d'ordre 1 autour de  $s_i = 0$  pour les fonctions trigonométriques et en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1. Cette opération rend possible l'écriture des équations sous forme matricielle, où les  $\Lambda_n$  correspondent aux coefficients de  $s_i(t)$  dans le système linéarisé :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \dot{s}_1(t) \\ s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 & 0 & \Lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \Lambda_3 & \Lambda_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ \dot{s}_1(t) \\ s_2(t) \\ \dot{s}_2(t) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Lorsqu'une ou plusieurs valeurs propres de cette matrice ont une partie réelle positive, la perturbation croît exponentiellement, ce qui caractérise une situation instable. Un phénomène de divergence est alors observable : les trajectoires de la masse tendent à s'éloigner de l'orbite étudiée, et le système est hautement sensible aux conditions initiales. Une telle description correspond au cercle  $c_3$ , pour lequel l'application numérique de la méthode ci-dessus indique que l'une des valeurs propres est positive, et qui n'est donc pas observable expérimentalement en raison de son instabilité.

Si toutes les valeurs propres sont purement imaginaires, le système ne présente ni divergence ni convergence ; les fonctions  $s_i(t)$  correspondent à des exponentielles complexes, dont le comportement oscillatoire signifie que l'orbite étudiée est neutralement stable. Une telle situation correspond aux résultats obtenus grâce à l'application numérique de la méthode ci-dessus pour  $c_1$  et  $c_2$  en l'absence de force dissipative. Toutes les valeurs propres ont alors une partie réelle nulle, démontrant par conséquent la stabilité de ces solutions et confirmant les résultats de la simulation ainsi que l'observation expérimentale avec une masse suffisamment importante pour que le frottement de l'air soit très faible. Un changement se produit lorsque l'influence de la force de frottement entre en jeu. En effet, les parties réelles des valeurs propres calculées pour les cercles  $c_1$  et  $c_2$  deviennent négatives, caractérisant une situation asymptotiquement stable. Un phénomène de convergence se produit alors : les trajectoires avoisinantes tendent vers le cercle, ce qui lui confère les caractéristiques d'un attracteur du système. Ce comportement peut être mis en évidence par la simulation obtenue à partir des équations du mouvement ainsi que par l'expérience avec une masse plus légère. Il apparaît alors que seule la première partie de la trajectoire, avant la stabilisation, est dépendante des

conditions initiales. Selon la position initiale de la masse, cette dernière finit toujours par tendre vers l'une des deux trajectoires limites,  $c_1$  ou  $c_2$ ; à noter encore que  $c_2$ , au niveau d'énergie le plus bas, est plus facilement atteignable et permet la plus grande stabilité. Lorsque le coefficient de frottement, et par conséquent la dissipation, augmentent, il devient de plus en plus difficile d'atteindre  $c_1$ ; à partir d'une certaine valeur critique, le système (10) n'a plus qu'une solution, correspondant à  $c_2$ , et les deux autres cercles disparaissent.

#### 4. Application du théorème de Noether

Les deux solutions circulaires stables des équations du pendule constituent un domaine idéal d'application du théorème de Noether, énonçant que toute symétrie dans un système est liée à la présence d'une quantité conservée. En particulier, un lagrangien constant au cours du temps indique que l'énergie est conservée, ce qui est le cas lorsque le pendule décrit un cercle. En effet, le cercle en question se situant dans le plan horizontal, l'énergie potentielle est constante; de plus, la norme de la vitesse et par conséquent l'énergie cinétique reste inchangée, ce qui implique que le lagrangien est constant au cours du temps. La conservation de l'énergie sur le cercle signifie que le comportement de ce pendule est un exemple typique d'oscillateur forcé et amorti: à une première partie de la trajectoire convergeant vers le cercle et sensible aux conditions initiales, correspondant au régime transitoire, succède un état stable indépendant des conditions initiales et lors duquel il n'y a aucune perte d'énergie. La dissipation présente dans le régime transitoire est la cause du phénomène de convergence, au cours duquel la solution des équations du mouvement pour chaque coordonnée affiche des oscillations dont l'amplitude décroît exponentiellement, comme le prévoient les valeurs propres, avant de se stabiliser vers la valeur d'équilibre. Une fois l'état stable (cercle) atteint, l'énergie est conservée car toutes les pertes dues au frottement sont compensées par le travail fourni par le pivot. Le théorème de Noether appliqué à  $c_1$  et  $c_2$  permet ainsi d'interpréter physiquement la stabilité asymptotique de ces deux solutions particulières.

#### 5. Résultats expérimentaux

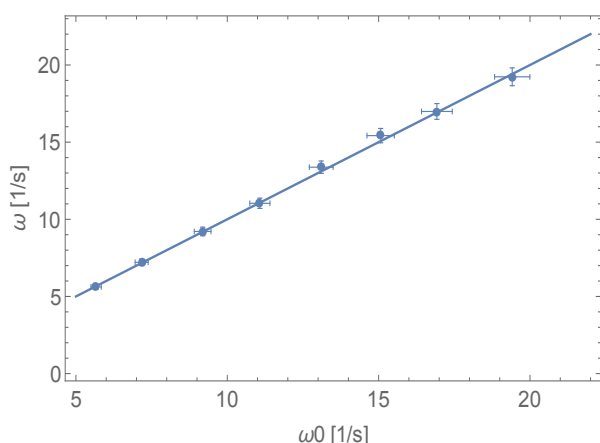


Fig. 5 : vitesse angulaire de la masse en fonction de  $\omega_0$ . Les mesures (points) vérifient l'égalité des périodes prédite en 3.1. La ligne continue représente la droite théorique de pente 1.

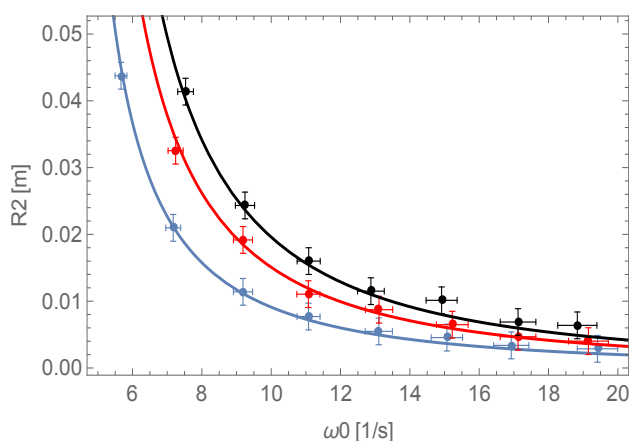


Fig. 6 : rayon du cercle  $c_2$  en fonction de la vitesse angulaire du pivot, pour trois valeurs de  $R_1$ . Courbe bleue :  $R_1=0.053$  [m]. Courbe rouge :  $R_1=0.087$  [m]. Courbe noire :  $R_1=0.112$  [m]. Les résultats expérimentaux (points) vérifient les prédictions théoriques (courbes) obtenues en 3.1 [système (8)].

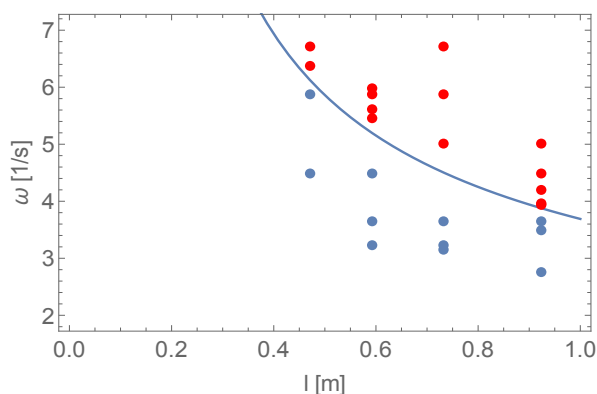


Fig. 7 : vérification de l'équation (9). Le cercle  $c_2$  (points rouges) n'est observable qu'au-dessus d'une limite représentée par la courbe bleue. Les points bleus désignent le cercle  $c_1$ . Le rayon  $R_1$  est fixé à 0.087 [m].

Ces résultats ont été obtenus au moyen d'un pendule attaché à un moteur ; la vitesse angulaire de ce dernier, le rayon  $R_1$  ainsi que la longueur du pendule étaient variables. Les trajectoires ont été filmées de dessous, puis analysées grâce au logiciel *Tracker*.

## 6. Discussion

Les résultats expérimentaux présentés ci-dessus sont en accord avec les prédictions théoriques réalisées pour le cercle  $c_2$  évoqué dans l'énoncé. Le premier graphique illustre l'égalité des périodes de la masse et du pivot au cours du MCU, et valide ainsi l'hypothèse de départ du modèle mathématique décrivant les trajectoires circulaires. La prédiction pour  $R_2$  avec très peu de frottement est confirmée par la fig. 6, où les courbes théoriques ont été réalisées à partir du système (8), dont les résultats sont quasiment identiques à ceux donnés par (10) pour une force dissipative relativement faible. Ce graphe présente une asymptote horizontale indiquant que  $R_2$  tend vers 0 lorsque l'on augmente  $\omega_0$ . L'influence de  $R_1$  sur  $R_2$  y apparaît également. La troisième expérience réalisée vise à vérifier la limite inférieure pour  $\omega_0$  au-dessus de laquelle  $c_2$  (et  $c_3$ ) apparaissent. Là aussi, l'expérience s'accorde avec la théorie : pour quatre différentes longueurs, l'observation de  $c_2$  n'est possible qu'au-dessus de  $\omega_{min}$ , dont la valeur est représentée par la courbe bleue. Il convient de mentionner que  $c_1$ , qui est l'unique cercle observable (et attracteur du système en présence de dissipation) en dessous de cette limite, existe toujours lorsque  $\omega_0$  dépasse  $\omega_{min}$  ; cependant, comme je l'ai mentionné en section 3.2, il devient plus difficilement atteignable. A noter encore que bien que l'équation (7) ait été dérivée en l'absence de frottement, les valeurs obtenues pour  $\omega_{min}$  constituent également une bonne approximation en présence d'une force dissipative relativement faible, ce qui est le cas lorsque le pendule se déplace dans l'air.

Bien que les résultats expérimentaux soient tout à fait représentatifs des prédictions théoriques, il convient de citer rapidement les quelques sources d'erreur ayant pu avoir une influence sur les mesures effectuées. Il s'agit principalement d'imprécision expérimentale lors des mesures de  $l$  et de  $R_1$ , ainsi que d'incertitudes lors de l'analyse des vidéos. Les barres d'erreur présentes sur les graphiques proviennent d'estimations effectuées pour le niveau de précision des divers instruments et du logiciel *Tracker*.

## 7. Conclusion

L'objectif de cette recherche était d'étudier les trajectoires circulaires stables d'un pendule dont le pivot décrit un cercle horizontal. Les équations du mouvement de la masse ont pu être dérivées à partir du lagrangien du système ; la description mathématique des trois solutions

circulaires de ces équations, vérifiée par l'expérience, a également permis l'analyse de la stabilité de ces cercles. Il apparaît ainsi que deux trajectoires circulaires sont stables, et constituent des attracteurs du système en présence d'une force dissipative, alors que la troisième est instable ; l'apparition ou la disparition de certaines de ces solutions lors de variations des paramètres du système ont également pu être mises en évidence. Le simple fait de pouvoir observer  $c_1$  et  $c_2$  expérimentalement constitue une illustration de leur stabilité, qui peut être interprétée qualitativement grâce au théorème de Noether démontrant la conservation de l'énergie au cours de ces trajectoires. La présente recherche fournit donc une description généralisée du mouvement du pendule, ainsi qu'une investigation théorique et expérimentale des trajectoires particulières répondant à son objectif initial.

## 8. Références

- [1] R. Van Dooren, *Chaos in a Pendulum with Forced Horizontal Support motion : a tutorial*, 1996 : Chaos, Solitons & Fractals Vol. 7.
- [2] Gabriela González, *A pendulum with a moving support point*, 2006. Support de cours, Louisiana State University. URL : <http://www.phys.lsu.edu/faculty/gonzalez/Teaching/Phys7221/PendulumWithMovingSupport.pdf>
- [3] Tom Duncan, *Chaos theory*, Advanced Physics (John Murray, 2000), Fig. 25.33.
- [4] *Problems for the 29<sup>th</sup> IYPT 2016*, <http://iypt.org/images/e/ef/problems2016.pdf>
- [5] B. Anastasiou, V. del Duca, *Classical mechanics*, 2015 (support de cours de l'EPFZ).

## Remerciements

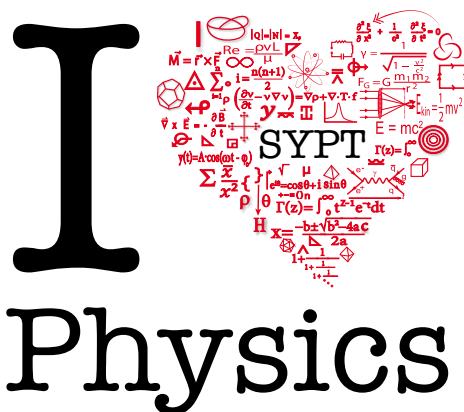
*Je tiens ici à remercier vivement Messieurs Vincent de Coulon, professeur de physique au Gymnase Auguste Piccard à Lausanne, et Eric Schertenleib, l'un des coaches de l'équipe suisse au IYPT, pour leurs suggestions et remarques constructives à la lecture d'une première version de cet article. Je remercie également Monsieur Samuel Byland qui m'a donné la possibilité de rédiger ce texte et de le publier.*

## SYPT Physics Week et SYPT 2017

Samuel Byland, Pro IYPT-CH, samuel.byland@sypt.ch

### Un compte rond pour l'anniversaire du SYPT

C'est l'an prochain, en 2017, que le concours national *Swiss Young Physicists' Tournament* (SYPT, [1]) – conçu d'après le modèle de *l'International Young Physicists' Tournament* (IYPT, [2]) – se tiendra pour la dixième fois. Plus de 300 élèves ont déjà participé à cet exceptionnel concours des plus captivants lors des précédentes éditions. La collaboration fructueuse avec la jeune génération de scientifiques se fait aussi remarquer à l'international. Ces dernières années, l'équipe suisse IYPT a toujours remporté une médaille (deux fois l'or, une fois l'argent et deux fois le bronze !)



**Swiss Young Physicists' Tournament**

On 18.-19. March, 2017 at the EPF Lausanne

### SYPT Physics Week

Bien que le SYPT soit entretemps connu par de nombreux enseignants de physique, beaucoup d'entre eux reculent devant l'important investissement que représente l'encadrement des jeunes élèves intéressés. En effet, si l'école ne propose aucune plage de temps aménagée, dans le cadre de laquelle les données des problèmes peuvent être travaillées, la préparation se fait majoritairement pendant le temps libre.

Pour donner la possibilité à de nombreux intéressés de prendre part au SYPT et pour qu'ils aient tous leurs chances, une **semaine de préparation** va être organisée pour la première fois : la *SYPT Physics Week*. Pour travailler sur les problèmes de physique, les participant(e)s seront soutenu(e)s par des professeurs expérimentés et anciens concurrents, connaissant bien le SYPT.

La participation à la *SYPT Physics Week* est ouverte à tous les élèves qui se sont inscrits au SYPT. Les frais (y compris l'hébergement et la restauration) seront pris en charge par Pro IYPT-CH.

## Appel : Swiss Young Physicists' Tournament 2017

Une équipe participant au SYPT est composée de trois élèves qui vont travailler sur un des problèmes actuels (cf. [3]). Au moins un aspect important du problème doit être examiné de façon expérimentale et théorique, puis expliqué de façon claire aux autres participants. En effet, lors de la présentation et de la discussion des résultats, non seulement les compétences de physique seront évaluées, mais également les compétences de communication (en anglais). Le travail sur un problème dans le cadre de l'IYPT peut ensuite très bien déboucher sur un travail de maturité ou un projet chez *La science appelle les jeunes* (cf. [4]).

En cette année anniversaire, nous osons passer la barrière de Röstli : le SYPT 2017 aura lieu les **18 et 19 mars 2017** à l'EPFL, à **Lausanne**. Pour finir, et nous nous en réjouissons, grâce à la *SYPT Physics Week*, nous avons bon espoir d'accueillir là-bas des équipes d'élèves dont c'est la toute première participation.

Toutes les informations importantes sur le SYPT se trouvent sur notre site Internet ([www.sypt.ch](http://www.sypt.ch)), plus particulièrement dans la brochure décrivant le tournoi. Nous vous serions très reconnaissants d'informer les classes de votre école. Peut-être auriez-vous également la possibilité d'intégrer un problème dans un projet pédagogique ou dans un programme spécial ? D'anciens participants sont en tout cas prêts à venir présenter le tournoi dans votre école.

Si vous, ou vos élèves, vous intéressez au SYPT, merci de me contacter directement ([samuel.byland@sypt.ch](mailto:samuel.byland@sypt.ch)). Si vous planifiez de participer au SYPT 2017 (ou le cas échéant, à la *SYPT Physics Week*), nous vous demanderons une **inscription provisoire avant fin novembre 2016**. L'inscription **définitive** se fera au **31 décembre 2016**.

### Résumé des informations importantes

**Date** : 18 et 19 mars 2017

**Lieu** : EPFL Lausanne

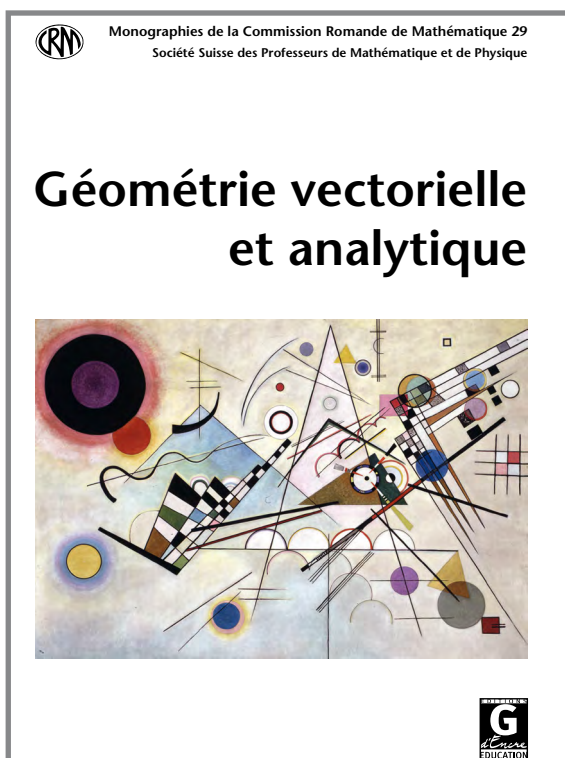
**Inscription (provisoire)** : jusqu'à fin novembre 2016 auprès de [samuel.byland@sypt.ch](mailto:samuel.byland@sypt.ch)

### Liens

- [1] *Swiss Young Physicists' Tournament* ([www.sypt.ch](http://www.sypt.ch))
- [2] *International Young Physicists' Tournament* ([iypt.org](http://iypt.org))
- [3] Problemstellungen für SYPT/IYPT 2016 ([iypt.org/images/f/f1/problems2017.pdf](http://iypt.org/images/f/f1/problems2017.pdf))
- [4] Schweizer Jugend forscht ([sjf.ch](http://sjf.ch))

# Géométrie vectorielle et analytique

Monographie de la CRM No 29



## NOUVEAU

*Disponible dès maintenant  
sur le site*

[www.crm-diffusion.ch](http://www.crm-diffusion.ch)

*et dans la plupart des  
librairies de Suisse  
Romande.*

**Editions G d'Encre**

**236 pages, 14,8 X 21 cm**

**ISBN: 978-2-940501-60-1**

L'ouvrage «*Géométrie vectorielle et analytique*» fait partie de la collection des monographies éditées par la CRM. Il constitue une refonte des deux monographies «*Géométrie vectorielle et analytique plane*» et «*Géométrie vectorielle et analytique de l'espace*».

On y présente d'abord les notions de base de la géométrie vectorielle dans le plan et dans l'espace. On étudie ensuite les équations de la droite et du cercle dans le plan, puis celles de la droite, du plan et de la sphère dans l'espace. Différents problèmes métriques faisant intervenir ces figures sont résolus grâce aux notions de produit scalaire et produit vectoriel.

Chaque chapitre est accompagné de nombreux exercices et des problèmes de type examen de maturité sont également proposés à la fin du livre.

Conformément à la méthodologie adoptée dans les derniers ouvrages publiés par la CRM, les auteurs ont souhaité introduire la plupart des notions par des exemples, tout en essayant d'être aussi précis et rigoureux que possible dans un manuel destiné à des élèves de niveau gymnasial.

## Appel aux rédacteurs

La CRM n'a pas reçu de proposition d'article à publier pour les deux derniers bulletins de la SSPMP. Or, elle souhaiterait pouvoir continuer de proposer des articles en français sur divers sujets mathématiques. Elle fait donc appel aux personnes intéressées à partager leurs connaissances et à rédiger un ou plusieurs articles.

Vous pouvez envoyer vos propositions d'articles, de sujets ou vos questions à l'adresse : [damien.dobler@bluewin.ch](mailto:damien.dobler@bluewin.ch). D'avance, un grand merci !



# Sehnenviereck

Hans Walser, Gerlikonerstr. 29, 8500 Frauenfeld  
 hwals@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

## 1 Worum geht es?

In (Köchli 2016) wird eine elegante Konstruktion des Sehnenviereckes vorgestellt. Das wirft die Frage nach dem Sehnenviereck mit beliebiger Eckenzahl auf. Wir besprechen eine MINT-Einschiebelösung mit DGS sowie eine räumliche Schere-und-Papier-Lösung.

## 2 Konstruktion

Zu gegebenen Seitenlängen  $a_1, \dots, a_n$  soll das Sehnen- $n$ -Eck konstruiert werden.

Wir zeichnen einen Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M(r,0)$  und dem beliebigen (genügend grossen) Radius  $r$ . Den Punkt  $A_0$  setzen wir in den Ursprung und tragen davon ausgehend die gegebenen Seitenlängen sukzessive auf dem Kreis  $k$  ab. So erhalten wir einen Streckenzug  $A_0 \dots A_n$ . Die Abbildung 1 zeigt die Situation für  $n = 7$ .

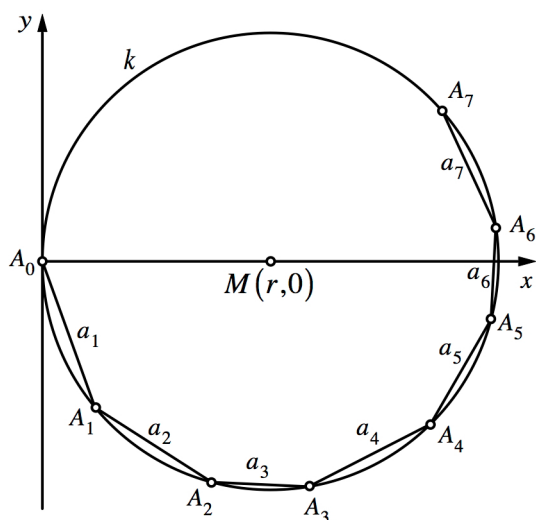


Abb. 1: Abtragen des Streckenzuges

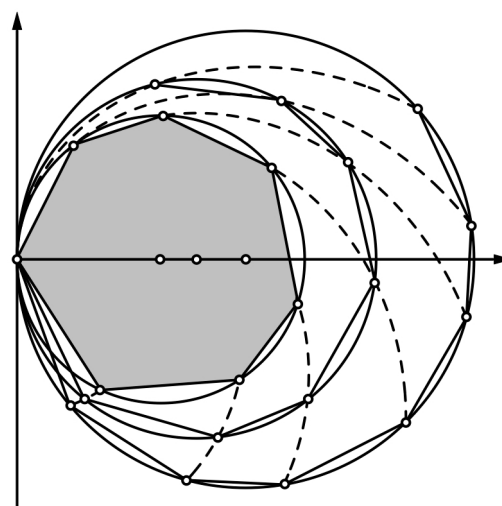


Abb. 2: Das Sehnenpolygoneck

Nun verkleinern wir den Radius  $r$ . Der Punkt  $A_0$  bleibt fest, der Punkt  $M(r,0)$  verschiebt sich nach links. Der Kreis wird kleiner. Da wir die Seitenlängen  $a_1, \dots, a_n$  nicht verändern, wird der Punkt  $A_n$  auf dem kleiner werdenden Kreis in Richtung von  $A_0$  gestossen. Wir verkleinern den Radius  $r$  bis der Punkt  $A_n$  mit  $A_0$  zusammenfällt. In der Abbildung 2 sind die Ausgangslage, eine Zwischenlage und die Endlage angegeben, ebenso gestrichelt die Bahnkurven der einzelnen Punkte.

## 3 Exaktheit

Für Zirkel-und-Lineal-Liebhaber gilt dieses Vorgehen nicht als „exakt“.

Dem ist zu widersprechen. Mit dem Verfahren „bis der Punkt  $A_n$  mit  $A_0$  zusammenfällt“ entsteht in unserer Vorstellungswelt ein exaktes Sehnenviereck. Dass dieses Zusammenfallen in der Praxis nicht exakt machbar ist, ändert nichts an der Stimmigkeit der Überlegung.

Das Zeichnen einer Geraden durch zwei gegebene Punkte mit einem angelegten Lineal (ebenfalls ein Einschlebeverfahren) ist ja auch nur in unserer Vorstellungswelt exakt.

Qualitativ besteht also kein Unterschied zwischen unserem DGS-Verfahren und einem klassischen Zirkel- und-Lineal-Verfahren.

Gleiche Meinung? Andere Meinung?

## 4 Umlaufszahl

Wir können „überdrehen“ und nach dem ersten Zusammenfallen von  $A_n$  mit  $A_0$  den Kreisradius  $r$  weiter verkleinern, bis die beiden Punkte ein zweites Mal zusammenfallen (Abb. 3). Es entsteht ein sternförmiges Sehnenvieleck mit der Umlaufszahl 2. — Und so weiter.

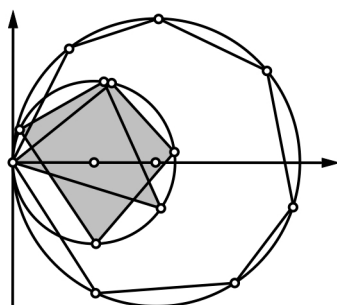


Abb. 3: Umlaufszahlen 1 und 2

## 5 Fragen

Es gibt keine Zirkel- und-Lineal-Konstruktion für das Sehnensiebeneck. Warum?

Gibt es ein Sehnenviereck mit der Umlaufszahl zwei?

Wann ist bezüglich Umlaufszahl die Zitrone ausgepresst?

Macht es Sinn, von der Umlaufszahl  $\frac{1}{2}$  zu reden?

Bei gerader Eckenzahl ist die alternierende Winkelsumme null. Beweis? Ist dies kennzeichnend für ein Sehnenvieleck gerader Eckenzahl?

Isoperimetrisches Problem: Zu gegebenen Seitenlängen hat das Sehnenvieleck den grössten Flächeninhalt. Beweis?

Was kann über die Bahnkurven (Abb. 2) gesagt werden?

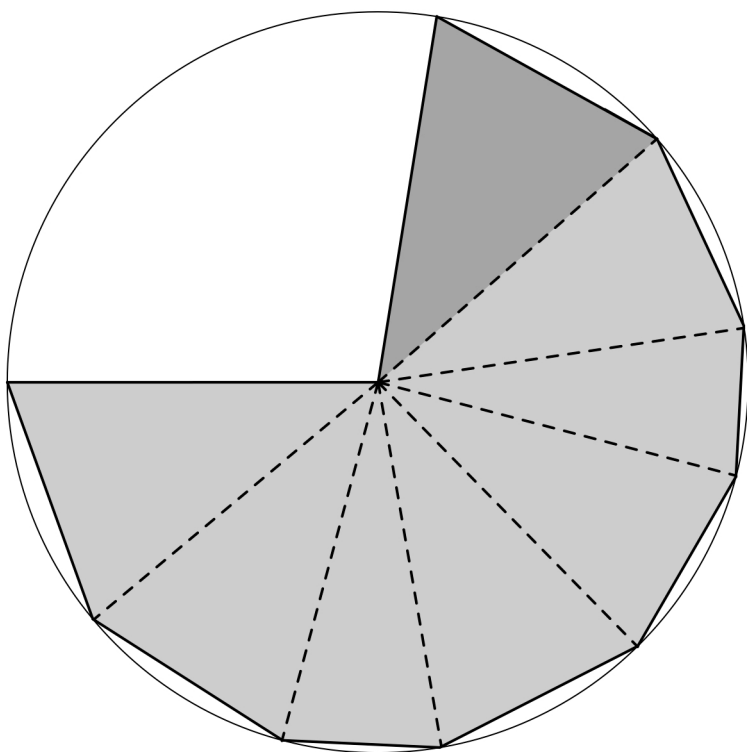
Wie lässt sich der Umkreisradius  $r$  eines Sehnenvieleckes rechnerisch (CAS) aus den Seitenlängen bestimmen?

## 6 Schere und Papier

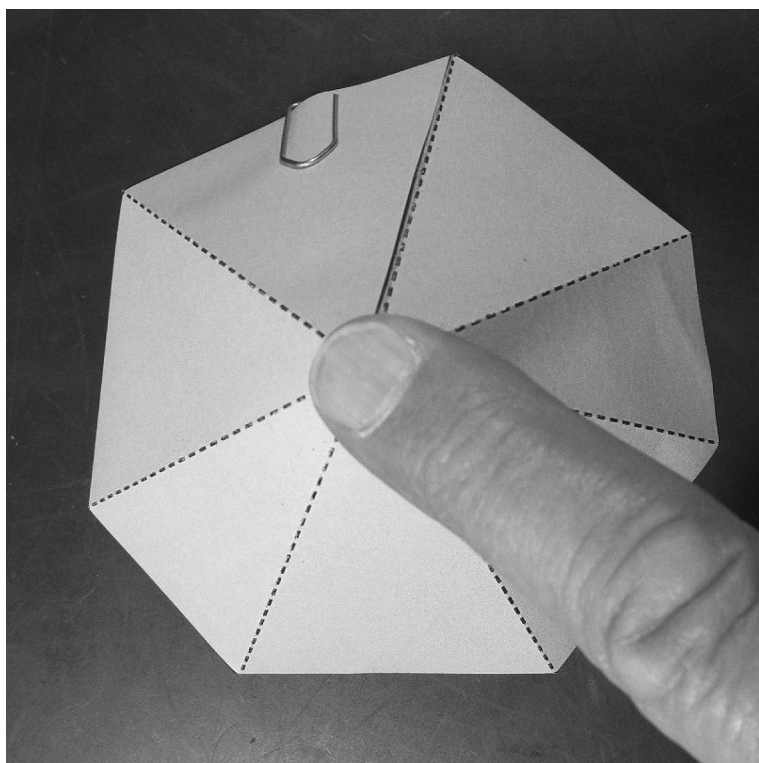
In der Grundfigur der Abbildung 1 markieren wir die sieben gleichschenkligen Dreiecke  $A_{i-1}A_iM$ ,  $i \in \{1, \dots, 7\}$ , und fügen am Schluss eine Kopie des ersten Dreiecks als Verbindungsflasche an (Abb. 4).

Wir schneiden aus, ritzen die gestrichelten Linien leicht mit einer Nadel, falten zur Pyramide und verheften die äussersten Dreiecke (Büroklammer oder Klebestift). Dann legen wir das Modell auf eine ebene Unterlage und drücken mit dem Finger sanft auf die Spitze, bis alle Bodenkanten aufliegen.

Diese bilden nun das Sehnensiebeneck (Abb. 5).



**Abb. 4: Schnittmuster**



**Abb. 5: Pyramide**

### Literatur

Köchli, Willi (2016): Einfache Konstruktion des Sehnenviereckes. VSMP-Bulletin, 131, Mai 2016, S. 22-23.

## DATCH 2016

Franz Meier, franz.e.meier@bluewin.ch

Hinter dem Akronym DATCH versteckt sich ein überaus interessantes und attraktives Angebot für Schülerinnen und Schüler im 7. und 8. Schuljahr, die Freude haben, sich mit Mathematik zu beschäftigen. Seit dem Frühjahr 2011 führen die Organisationsteams der drei deutschsprachigen Länder (D, AT & CH) ein jährliches DATCH – Treffen durch, zu dem pro Land je die besten 3 Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 7 beziehungsweise 8 des jeweils aktuellsten Känguruwettbewerbs eingeladen werden; dieses Jahr fand das Treffen unter der Federführung des CH-Teams vom Do 23. Juni 2016 bis So 26. Juni 2016 bereits zum dritten Mal im Bildungszentrum Neu-Schönstatt in Quarten statt.



Nach zum Teil sehr langer Zugfahrt aus Deutschland und Österreich kommend, wetteiferten je 2 Dreier-teams aus jedem Land bereits am Donnerstagabend im Speedwettbewerb. Dabei ging es darum, 30 ausgewählte Känguruaufgaben aus vergangenen Jahren in möglichst kurzer Zeit zu lösen, jeweils in maximal 2 Versuchen. Ein idealer Auftakt, bei dem sich die Schülerinnen und Schüler sehr schnell kennenlernten. Alle Aufgaben richtig und in kürzester Zeit schaffte ein Team mit Mädchenbeteiligung aus Österreich;

ländermässig lagen aber die beiden Teams aus der Schweiz vorne.

Am Freitagmorgen konnten sich alle Teilnehmenden im Einzelwettbewerb während zweieinhalb Stunden auszeichnen. 7 Aufgaben waren zu lösen. Die Lösungen mussten sauber dargestellt und begründet werden, um möglichst viele Punkte zu holen. Am Ende konnte die Schweiz die Spitzenposition vom Vortag gut verteidigen. Am Nachmittag stand der Besuch des wunderschön gelegenen Schlosses Sargans auf dem Programm. Das alte Grafenschloss beherbergt eines der bedeutendsten Heimatmuseen Europas. Es erhielt 1983 vom Europarat als erstes schweizerisches Museum den Preis „Museum des Jahres“. Schüler und Schülerinnen, Begleiterinnen und Begleiter haben diesen Ausflug sehr geschätzt. Ein Spieleabend bei bester Stimmung beendete den zweiten Tag.





Am Samstagvormittag stand mit dem Gruppenwettbewerb bereits der Abschluss des mathematischen Wettstreits auf dem Programm. 5 von 7 Aufgaben mussten im Team gelöst werden und eine davon musste präsentiert werden. Entscheidend für eine hohe Punktzahl waren nicht nur die richtige Lösung, sondern auch eine mustergültige, sorgfältig ausgearbeitete Lösung der Aufgaben, sowie eine überzeugende Präsentation, bei der das Länderteam auch auf zusätzliche Fragen kompetent Auskunft geben musste. Hier schlug das Team mit der grössten Mädchenbeteiligung, das Team aus Deutschland, entscheidend zu und holte

sich vor dem Team aus der Schweiz den ersten Rang. Mit wenigen Punkten Abstand blieb das Team Österreich auf dem dritten Rang. Am Nachmittag wurden alle Schülerinnen und Schüler vom Besuch der Taminaschlucht beeindruckt – anschauliche Zeitgeschichte, die zeigt wie sich die Tamina in den letzten Tausenden von Jahren in den Fels hinein gefressen hat. Nach der Rangverkündung am Abend und einem Grillabend, der traditionell bei jedem Wetter im Freien stattfindet, ging das diesjährige DATCH-Treffen einmal mehr zur Zufriedenheit Aller gut zu Ende. Auch an dieser Stelle danken wir der „Stiftung Mensa“ (<https://www.mensa.ch/de>), der ETH in Zürich (<https://www.ethz.ch>) und dem Orell Füssli Verlag (<http://www.orellfuessli.ch>) für die freundliche Unterstützung.



## Bedeutendster Mathematiker der Frühen Neuzeit

Fritz Staudacher, Publizist und Bürgi-Biograph, staud1@bluewin.ch

### Neubewertung des Lichtensteiger Renaissancegenies Jost Bürgi

Dem 1552 im toggenburgischen Lichtensteig geborenen und 1632 im 80. Lebensjahr im hessischen Kassel verstorbenen Jost Bürgi verdanken wir nicht alleine die Logarithmenrechnung, sondern auch eine völlig neue Methode zur Bestimmung beliebiger Sinuswerte. Jost Bürgi gebührt zusätzlich das Verdienst der Erfindung der Differenzenrechnung, der fehlerresistenten Tabellengenerierung einschliesslich der Nutzung von iterativen Algorithmen und der Verwendung der Polynom-Interpolation. All diese bei der Erstellung seiner im „*Fundamentum Astronomiae*“ enthaltenen Sinustabelle mit Schrittabständen von einer Bogenminute erstmals eingesetzten Algorithmen machen ihn zum bedeutendsten Mathematiker der Frühen Neuzeit.

### Geniale Entwicklung und Kombination neuer Algorithmen

Erst kürzlich kamen die für diese Höherbewertung ausschlaggebenden und unter dem Begriff „Bürgis Kunstweg“ seit 1588 verschollenen Verfahren wieder ans Tageslicht und wurden von ihrem Entdecker Menso Folkerts sowie von ihrem Analytiker und Editor Dieter Launert wissenschaftlich dokumentiert sowie Ende März am Bürgi-Symposium in Lichtensteig präsentiert. Den weiteren Mathematik-Professoren und Referenten zu Bürgis Innovationen Peter Ullrich (Koblenz), Kathleen Clark (Florida) und Jörg Waldvogel (ETH Zürich) sowie dem zahlreichen Publikum wurde dabei klar, warum Jost Bürgi zu Lebzeiten zu Recht mit den grossen griechischen Klassikern Euklid und Archimedes verglichen und in einem Atemzug genannt wurde. Im Dreissigjährigen Krieg gingen seine Werke der Mathematik vergessen, verschwanden oder wurden versteckt und verschwiegen; dies jedoch nicht in England, wo sie von Mathematikern übernommen und ohne Erwähnung Bürgis genutzt und weiterentwickelt wurden.

Der französische Tafelexperte Denis Roegel erläutert dazu: „Schon in den Jahren 1586/88 entwickelte Bürgi eine geniale Sammlung von Algorithmen und verfügte ganz offensichtlich über ein sehr tiefgreifendes Zahlenverständnis“ sagt der Erbauer und Leiter der weltweit führenden Datenbank (Locomat.loria) mathematischer Tafeln zu Jost Bürgis Kunstweg und präzisiert: „Bürgis Nutzung von Differenzen für die Berechnung neuer Werte, und nicht alleine für die Überprüfung von Tabelleneintragen, ist eine sehr moderne Lösung. Er antizipiert gut zweihundert (!) Jahre die Arbeiten Pronys und sogar Babbages (!); all dies ist sehr verdienstvoll und bewundernswert.“

### Drei Entdecker- und Entdeckungs-Glücksfälle

Ursache für diese nunmehr erfolgte Neubewertung Jost Bürgis ist die vom Münchener Wissenschaftshistoriker Prof. Dr. Menso Folkerts entdeckte, bisher unbekannte Bürgi-Handschrift *Fundamentum Astronomiae* („Grundlage der Astronomie“). In ihr erkannte der für seine Leistungen in der Erforschung der Geschichte der Mathematik mit dem internationalen *Kenneth-O-May-Prize* geehrte Münchener Emeritus bereits 2013 Jost Bürgis Lösung des 428 Jahre verschollenen *Artificium*, nämlich seine Beschreibung des Kunstweges zur elementaren Berechnung eines beliebigen Sinus-Wertes. Den Folgeschritt vertraute Folkerts Dieter Launert an, dem für seine Arbeiten zu Ursus mit dem „Bayerischen Akademiepreis“ ausgezeichneten Mathematik-Historiker: „Dieter Launert hatte das Manuskript nicht nur zu transkribieren, sondern auch zu kommentieren. Insbesondere hat er auch herausgearbeitet, wie Bürgis "Kunstweg" im Detail ausgesehen hat. Bei seinen Arbeiten an der Edition ist Herr Launert auf Hinweis von Hans van de Velde auch auf ein Blatt in Ursus' Exemplar in der Universität Leiden gestossen, das, wie wir jetzt wissen, eine Verbindung zwischen Bürgis Methode und England aufzeigt.“ Dieser dritte Glücksfall führt den Verfasser der Bürgi-Monografie „Jost Bürgi, Kepler und der Kaiser“ und dieses Beitrages auf eine weitere Spur, nämlich diejenige des Mathematikers und Geheimagenten der englischen Königin Elizabeth, Dr. John Dee, der 1589 Jost Bürgi fünf Tage lang in Kassel besucht und ihn sowie seinen Chef Wilhelm IV und den Hofastronomen Christoph Rothmann konspirativ ausspioniert hat.

	<i>sinūs</i> 5		<i>sinūs</i> 4		<i>sinūs</i> 3		<i>sinūs</i> 2		<i>sinūs</i> 1
0	0. 0. 0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0. 0. 0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0. 0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0
10	10. 20. 51. 0	10. 20. 51. 0	0. 18. 51. 52	18. 51. 52	0. 34. 24	34. 24	1. 3	1. 3	2
20	20. 22. 50. 8	10. 1. 59. 8	0. 37. 9. 20	18. 17. 28	1. 7. 45	33. 21	2. 4	1. 1	4
30	29. 47. 39. 56	9. 24. 49. 48	0. 54. 19. 3	17. 9. 43	1. 39. 2	31. 17	3. 1	0. 57	6
40	38. 18. 10. 41	8. 30. 30. 45	1. 9. 49. 44	15. 30. 41	2. 7. 18	28. 16	3. 52	0. 51	7
50	45. 38. 51. 42	7. 20. 41. 1	1. 23. 13. 7	13. 23. 23	2. 31. 42	24. 24	4. 36	0. 44	8
60	51. 35. 19. 35	5. 57. 27. 54	1. 34. 4. 48	10. 51. 41	2. 51. 30	19. 48	5. 12	0. 36	9
70	55. 59. 42. 42	4. 23. 23. 6	1. 42. 4. 59	8. 0. 11	3. 6. 6	14. 36	5. 39	0. 27	10
80	58. 41. 0. 49	2. 41. 18. 7	1. 46. 59. 4	4. 54. 5	3. 15. 3	8. 57	5. 56	0. 17	11
90	59. 35. 19. 52	0. 54. 19. 3	1. 48. 38. 6	1. 39. 2	3. 18. 4	3. 1	6. 2	0. 6	12

Jost Bürgis Kunstweg der Errechnung von Sinus-Werten ermöglicht erstmals eine präzise Bestimmung jedes gewünschten Wertes in jeder gewünschten Genauigkeit. Bürgi hat in dieser ersten Beispieltabelle (Blatt 36r) zur Ermittlung der Zehnerwerte (10°, 20°, 30°...90°) vier Differenzstufen verwendet, alles gerechnet in Sexagesimalzahlen. (C) Universitätsbibliothek Wroclaw.

	<i>sinūs</i> 5		<i>sinūs</i> 4		<i>sinūs</i> 3		<i>sinūs</i> 2		<i>sinūs</i> 1
0	0. 0. 0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0. 0. 0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0. 0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0. 0. 0	0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	0
10	10. 20. 51. 0	10. 20. 51. 0	0. 18. 51. 52	18. 51. 52	0. 34. 24	34. 24	1. 3	1. 3	2
20	20. 22. 50. 8	10. 1. 59. 8	0. 37. 9. 20	18. 17. 28	1. 7. 45	33. 21	2. 4	1. 1	4
30	29. 47. 39. 56	9. 24. 49. 48	0. 54. 19. 3	17. 9. 43	1. 39. 2	31. 17	3. 1	0. 57	6
40	38. 18. 10. 41	8. 30. 30. 45	1. 9. 49. 44	15. 30. 41	2. 7. 18	28. 16	3. 52	0. 51	7
50	45. 38. 51. 42	7. 20. 41. 1	1. 23. 13. 7	13. 23. 23	2. 31. 42	24. 24	4. 36	0. 44	8
60	51. 35. 19. 35	5. 57. 27. 54	1. 34. 4. 48	10. 51. 41	2. 51. 30	19. 48	5. 12	0. 36	9
70	55. 59. 42. 42	4. 23. 23. 6	1. 42. 4. 59	8. 0. 11	3. 6. 6	14. 36	5. 39	0. 27	10
80	58. 41. 0. 49	2. 41. 18. 7	1. 46. 59. 4	4. 54. 5	3. 15. 3	8. 57	5. 56	0. 17	11
90	59. 35. 19. 52	0. 54. 19. 3	1. 48. 38. 6	1. 39. 2	3. 18. 4	3. 1	6. 2	0. 6	12

Bürgis Artificium-«Kunstweg» erschliesst die Sinusse von den kleinsten Differenzen her und rechnet von rechts nach links sowie abwechselnd von unten nach oben sowie umgekehrt entlang des hier eingetragenen Mäanders. Untere Zeile (90°): Halbierung des Wertes der rechten Spalte und Einbringung in untere Zelle der links stehenden Spalte (4x). Obere Zeile: Übertragung der Zwischensumme von rechter Spalte in linke Spalte (4x). Dunkelgraue Linie: Addition der Zelleninhalte der beiden nebeneinander liegenden Spalten von oben nach unten (32x). Hellgraue Linie: Additionsrichtung von unten nach oben (32x). Die fortlaufend entstehenden Sinuswerte bekommt man aus der ersten Kolonne als Verhältnisse zum letzten Wert.  $59/60+35/60^2+19/60^3+52/60^4$ .

Dieser Artificium-Algorithmus ergänzt sich praktisch selbst beim Ausfüllen einer nach Bürgi-Anweisungen vorstrukturierten Sinustabelle. Wir zählen im oben abgebildeten Bürgi-Beispiel 72 einfache Rechenoperationen, bestehend aus 64 Additionen sowie jeweils vier Werthalbierungen und Zwischensummen-Übertragungen. Das Programm startet am rechten Tabellenrand mit der Eintragung beliebiger Startzahlen (0–12) und generiert auf seinem mäanderförmig ansteigenden und vier Täler durchquerenden Serpentinweg im Zuge fortlaufender Rechnung die gesuchten Daten. Hier im Beispiel sind es die Sinuswerte  $\sin 10^\circ$  mit  $10^\circ 20' 51'' 00''$ , in der zweiten Zeile der vorderen Sinusspalte direkt ablesbar. Nun müssen wegen der unterschiedlichen Steigung des Sinus diese Sinustabellen-Rohzahlen noch für den Radius ihrer Lage korrigiert werden. Diese Rechnung liefert dann den definitiven Sinuswert von  $10^{\text{I}} 25^{\text{II}} 8^{\text{III}} 1^{\text{IV}}$  (+ Rest). Dieser Wert der Sinus-Genauigkeitsstufe 5 Bürgis ist also bis zur dritten Sexagesimalstelle genau (entspricht fünf Dezimalstellen). Damit sind die neun gewünschten Sinuswerte auf fünf Stellen genau bekannt. In einer von Bürgi auf sieben Genauigkeitsstufen gerechneten Sinus-Beispieltabelle sind die Werte zwischen fünf und sieben Sexagesimalstellen genau, das entspricht bis zu zehn Dezimalstellen.

## Grundlegender Beitrag in internationaler „*Historia Mathematica*“

Wie bedeutsam diese Entdeckung des Kunstweges für die Geschichte der Mathematik ist, dokumentiert ein im April 2016 in der „*Historia Mathematica*“ erschienener grundlegender Beitrag „*Jost Bürgi's Method of Calculating Sines*“ zu diesem Fund und seiner Mathematik aus der Feder von Menso Folkerts und Dieter Launert sowie dem Dresdener Professor Andreas Thom. Darin weist Thom mit den Methoden der modernen Mathematik nach, dass Bürgis Verfahren auch nach heutigen Kriterien korrekt ist. Bürgi selbst hat sich nicht darüber geäußert, wie er zu seiner Methode gekommen ist und warum sie funktioniert. Der Beitrag von Folkerts, Launert und Thom war vor seiner Veröffentlichung in der „*Historia Mathematica*“ auf der Datenbank arXiv aufgeschaltet und hatte zu intensiven internationalen Diskussionen geführt.

Zahlreiche Mathematiker beschäftigt seit dieser Entdeckung die Frage, wie denn der des Lateins nicht mächtige und nach nur sechs Schuljahren eine Uhrenmacherlehre absolvierende Toggenburger Handwerker selbst auf seinen Kunstweg gelangt ist. Näher mit der Gedankenwelt Jost Bürgis und den damals ihm zur Verfügung stehenden Methoden setzt sich der Koblenzer Mathematikprofessor Peter Ullrich auseinander. Er hat in Lichtensteig unter dem Titel „*Jost Bürgis Weg zum Kunstweg – Annäherung an sein mathematisches Denken*“ ein iteratives Verfahren vorgestellt, das der Weg Bürgis zu seinem Kunstweg sein könnte. Nach der Auffindung und der Analyse der bis vor kurzem unbekanntes Mathematikbuch-Handschrift „*Fundamentum Astronomiae*“, sei der Vorsprung Jost Bürgis eindeutig dokumentiert. Selbst ein Johannes Kepler, mit dem Jost Bürgi in Prag acht Jahre zusammenarbeitete und der selbst von Bürgis Instrumenten, Tabellenwerken und Rechenmethoden profitierte, übertrug dieses damals von Rudolf II zum Kaiserlichen Hofuhrmacher ernannte mathematisch-technische Universalgenie Jost Bürgi aufgrund seiner zahlreichen neuartigen Rechenmethoden nicht. „Das reiht den Erfinder der Logarithmen, den Verfasser einer Coss-Algebra sowie den Innovator einer völlig neuen Methode zur Bestimmung beliebiger Sinuswerte in gewünschter Genauigkeit, den Ersteller der ersten Methoden der Differenzenrechnung und Eckwerte- und Pivotstabilisierung sowie den Initiator der binomischen Tabellengenerierung Jost Bürgi in die Gruppe der ersten Mathematiker der Neuzeit ein“, sagt Peter Ullrich, Vorsitzender der Sektion „Geschichte der Mathematik“ des Deutschen Mathematiker-Verbandes.

Einen Schritt weiter geht noch der Zürcher emeritierte ETH-Mathematikprofessor Dr. Jörg Waldvogel. Er spiegelt und überprüft sowohl Bürgis Kunstweg-Lösungen als auch Bürgis Logarithmen auf ihre Einfachheit und Stabilität mittels der heute favorisierten Linearen Algebra inklusive Fourieranalyse, derer sich mittlerweile in einer weiteren Studie der Walliser Mathematiklehrer Grégoire Nicollier annimmt. Jörg Waldvogels Beitrag „*Jost Bürgi's Artificium of 1586 in modern view, an ingenious algorithm for calculating tables of the sine function*“ erscheint in einer kommenden Ausgabe der „Elemente der Mathematik.“

## Bisher bekannt als Erfinder der Sekunde und einzigartiger Himmelsgloben

Jost Bürgis Ziel ist nicht die Herstellung schöner Schmuckstücke, sondern möglichst exakter Modelle der Wirklichkeit, deren Schönheit in ihrer Funktion liegt und den Besitzer zu einzigartigen Informationen verhilft. Himmelsgloben, die mit hoher Sicherheit den genauen Verlauf der Himmelskörper nachvollziehen und vorhersagen lassen; Uhren, die nicht den durchschnittlichen, sondern den minutengenauen Sonnen- und Mondaufgang anzeigen. Da die Modelldaten nur so genau sein können wie die erfassten Daten der Wirklichkeit und da ihm die vorliegenden Verzeichnisse viel zu ungenau und lückenhaft sind, baut er genauere Winkel- und Zeitmessgeräte und misst damit für Kepler und sich selbst. Damit er die dabei anfallenden grossen Datenmengen seiner Himmelskörpermessungen auch genau und rationell verarbeiten kann, erfindet er seine Mathematik – die mit dem Dreissigjährigen Krieg unterzugehen scheint. Doch von seinen Uhren und Himmelsgloben wird die mehr als zweihundertjährige Phase der Unbekanntheit von Jost Bürgis Mathematik überbrückt, wobei sich in seinen Globusuhren das ganze Wissen und Können Bürgis und seiner Zeit manifestiert. Zuerst täglich von den höchsten Herren und ihren Astronomen und Astrologen benutzt, dann ausgestellt in den grossen Kunstkammern und wissenschaftlichen Salons des Habsburger Kaiserhauses sowie bedeutender in- und ausländischer Fürsten, bleibt Bürgi aufgrund seiner weltersten Sekundenuhren und seiner von Uhrwerken angetriebenen Himmelsgloben unübertroffener astronomischer Genauigkeit im Bewusstsein der Öffentlichkeit und in der Fachwelt präsent. Dann werden Mitte des 19. Jahrhunderts Bürgis Logarithmentafeln wiederentdeckt, vor 43 Jahren erstmals das von Kepler 1603 redigierte Algebra-Manuskript

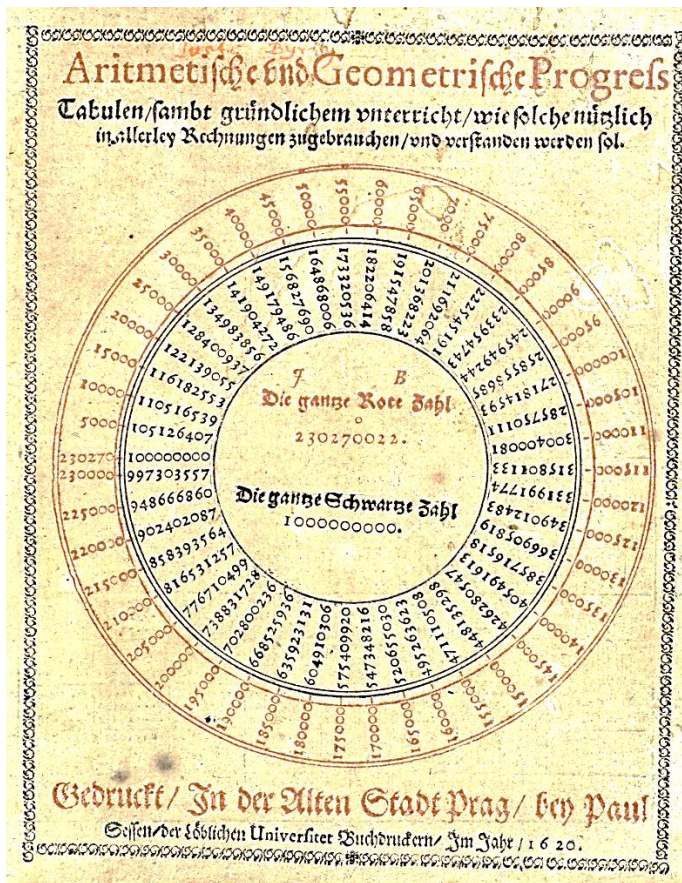


*Links: Jost Bürgi (1552–1632) als 67-Jähriger kurz nach Ausbruch des Dreissigjährigen Krieges in Prag (Fenstersturz). Gezeichnet von Ägidius Sadeler. Rechts: Jost Bürgis uhrwerkgetriebener Himmelsglobus aus dem Jahre 1594 beruht auf eigenen astronomischen Messungen mit selbsterfundener Sextanten und Sekundenuhr sowie auf der Berechnung mit eigenen Rechenmethoden (Logarithmen, Kunstweg, Sinustabelle). Unübertroffen ist auch die Genauigkeit der verschiedenen Ablesemöglichkeiten astronomischer Daten mittels drei verschiedenen Koordinatensystemen in der Vergangenheit und in der Zukunft. Foto: Nationalmuseum Zürich.*

Jost Bürgi publiziert und nun auch noch der mehr als vierhundert Jahre nur von einem ungelösten Rätsel her bekannte Bürgische Kunstweg. Somit hat man die Funktionalität und Zuverlässigkeit seiner wissenschaftlichen Uhren und astronomischen Instrumente nicht nur seinen aussergewöhnlichen handwerklichen Fähigkeiten, seinen astronomischen Beobachtungen und Messungen sowie seiner technischen Innovationskraft zuzuschreiben, sondern auch seiner Mathematik.

### **Bürgis Logarithmen mit „Gründlichem Unterricht“ erstmals auch in Englisch**

Vergessen werden soll hier inmitten des Kunstweges auch Jost Bürgis erste epochale Leistung nicht: die Logarithmen. Die soeben erschienene erste Englisch-Fassung von Jost Bürgis Logarithmentafeln mit Instruktionsbeispielen „*Jost Bürgi's Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen (1620)*“ trägt zur aktuellen Bürgi-Renaissance vor allem im englischsprachigen Kulturraum bei. Bürgi hatte 1620 nur die Zahlentafeln veröffentlicht, nicht aber die Anleitung, wie sie benutzt werden sollen. Von dieser Anleitung gibt es zwei handschriftliche Fassungen: eine in Danzig (Gdańsk) und eine zweite in Graz. Der Danziger Text ist im 19. Jahrhundert in einer Schulschrift veröffentlicht worden, die erst vor einem Jahrzehnt durch Heinz-Theo Lutstorfs ETH-Publikation zu Bürgis Logarithmen etwas bekannter wurde; die Handschrift aus Graz wurde bisher noch nicht ediert. Jetzt, nach 396 Jahren, liegt nun endlich erstmals eine vollständige Ausgabe der Anleitung und der Tafeln vor. Sie stammt von der amerikanischen Mathematik-Professorin Dr. Kathleen Clark und ist soeben im Birkhäuser Springer Verlag erschienen. Der Band enthält ein Faksimile der Tafeln und der in Graz gefundenen Anleitung, eine Parallelausgabe des Textes der Anleitung nach den beiden Exemplaren in Graz und in Danzig, eine englische Übersetzung dieser Anleitung und einen mathematischen Kommentar.



	238000	238500	239000	239500	240000	240500
0	977556601	982456378	987380714	992329732	997303557	1002301887
10	654356	554023	479452	428965	390000	360227
20	77212	652879	578200	528202	490000	460278
30	849597	751144	676918	627461	590000	560278
40	947682	849419	777726	726724	690000	660238
50	978045477	947704	874503	825996	790000	760238
60	143281	983045999	973291	925279	890000	860288
70	241096	144304	988072088	993024575	990000	99801879
80	338920	242618	170895	123874	900000	101679
90	436714	340342	250712	223187	910000	201489
100	534597	439276	368539	32509	9200000	301509
110	632451	537620	467363	421841	930000	401139
120	730314	635974	66223	521183	940000	500979
130	828187	734338	665080	620535	950000	600829
140	926070	832711	763946	719298	960000	700690
150	979023662	931094	862822	819269	970000	800560
160	121865	984019488	961709	918651	980000	900440
170	219777	177800	98906605	994018043	990000	99900330
180	317699	226303	159511	117444	990000	100230
190	415631	324726	258427	216957	990000	200140
200	513572	423158	35733	316278	9900000	300060
210	611524	521601	456288	415770	990000	399990
220	709485	620053	555284	515284	990000	499920
230	807446	718515	654190	614695	990000	599880
240	905407	816987	753151	714060	990000	699840
250	98003437	915468	852130	813136	990000	799810
260	101427	995013960	951115	913017	990000	899790
270	99438	112461	990010100	9901209	99999779	99999779
280	29747	210973	149116	112010	10	89
290	395487	309494	248130	211121	20	99
300	493527	408025	347155	311042	30	89
310	591576	506595	446190	410735	40	99
320	689625	605166	545235	510115	50	89
330	787704	703737	644280	609666	60	99
340	885783	802247	743323	709227	70	99
350	983862	900827	842360	808797	80	99
360	981081970	99417	94112	908378	90	99
370	180078	98609017	991040606	996007969	99	99
380	278196	156627	139711	107570	100	99
390	37624	255247	238825	207181	110	99
400	474462	35376	337948	306801	120	99
410	572609	45216	437082	406432	130	99
420	670766	551165	536226	506073	140	99
430	768934	649824	635380	605723	150	99
440	867110	748493	734543	705384	160	99
450	965297	847172	833717	805044	170	99
460	982063494	985861	932900	904735	180	99
470	161700	987084559	993032993	997004425	190	99
480	259916	183266	131266	104126	200	99
490	358142	281984	230110	203836	210	99
500	456378	380714	329732	303557	220	99

Wolenden sich die  
 zwei Summen das  
 len in 9. Zypbern vñ  
 ist die Rote  
 230270022  
 230270022

Die Schwärze  
 aber ist ganz mit 9.  
 nollen als 1000000000  
 vñ so dieselben ganz  
 gen Zalen/nicht ganz  
 geben mögen / so mag  
 man dieselben 2. 3. 4.  
 5. 6. 7. 8. 9. zusammen  
 addieren.

Logarithmen prägen während 350 Jahren die Rechentechnik entscheidend. Links: Titelseite von Jost Bürgis Logarithmentafeln (Grazer Exemplar). Erstellt 1588–1604 mit sechzig Tabellenseiten, druckbereit vor 1609; gedruckt 1620. Rechts: Letzte Seite der Bürgischen Logarithmen. Bürgis Basis de Roten Zahl entspricht bereits zu 99,99995% dem über ein Jahrhundert später von Leonhard Euler ermittelten natürlichen Logarithmus. Zusammen mit dem „Gründlichen Unterricht“ liegt dieses Werk jetzt auch als deutsches Faksimile mit englischem Kommentar von Kathleen Clark vor. (C) Universitätsbibliothek Graz.

„Verdoppelung der Lebenszeit“

Jost Bürgis Erfindungen der Logarithmen – zusammen mit John Napier – und der neuen, in seinem Kunstweg erläuterten Verfahren prägen während 350 Jahren weltweit die Mathematik und darin vor allem die mit Tabellenwerten arbeitende Rechenpraxis. Was alleine schon die Logarithmen an Vorteilen brachten beschrieb der französische Mathematiker und Astronom Simon Laplace (1749-1827) einmal so: «Die Erfindung der Logarithmen kürzt monatelang währende Rechnungen bis auf wenige Tage ab und verdoppelt dadurch das Leben des Rechners.» Als Henry Briggs (1561-1630) seine teilweise mit Bürgi-Algorithmien erstellten Logarithmentafeln dem englischen König Charles II. präsentierte, sagte er ihm, dass damit ein Astronom in einer Stunde genauso viele Positionsberechnungen durchführen könne, wie sonst an einem ganzen Tag. Ohne diese Erfindungen Jost Bürgis hätten wir die erste Mondlandung noch vor uns, denn um ein halbes Jahrhundert haben Logarithmen und Differenzenrechnung Naturwissenschaften und Technik sicher beschleunigt.

Bekannt Namen verlieren ihren Prioritätsanspruch

Die erst kürzlich nach 427 Jahren erfolgte Lösung des „Kunstweg“-Rätsels erweist sich als eine Kombination verschiedener zu dieser Zeit noch unbekannter Mathematikmethoden, die bisher als Erfindungen von Henry Briggs (1617/24, *Quinquisection*, *Subtabulation*), Isaak Newton (1690, *Forward Difference Methode*), Gaspard Riche de Prony (1800, *Pivot Difference Interpolation*) und Charles Babbage (1870, *Difference*

*Engine*) galten. Sie bilden über Jahrhunderte hinweg die internationale Liga der Tafelmacher und der Logarithmenrechnung. Henry Briggs mit seinen in den beiden drei- bzw. vierhundertseitigen Werken *Arithmetica Logarithmica* (1624) und *Trigonometria Britannica* (1633) publizierten vierzehnstelligen Zehner-Logarithmentafeln; Isaak Newton mit seiner Forward-Difference-Formel; Gaspard Riche de Prony mit seinem weltweit bis heute unübertroffen umfangreichen und genauen trigonometrischen sowie logarithmischen Tabellenwerk des Katasters Frankreichs, das gleichzeitig die Einführung des metrischen Systems in Frankreich und England begründete; und Charles Babbage mit seinem automatisierten Tabelliersystem auf der Basis von Polynomen. Sie alle haben nun einen Vorgänger: Jost Bürgi, der schon von seinem Freund Johannes Kepler als Mathematiker bezeichnet wurde, der viele Professoren dieser Disziplin übertreffe. Damit dürfte der in der Schweiz (Lichtensteig) geborene, in Deutschland (Hessen-Kassel) erfindende und in Tschechien (Prag) Johannes Kepler am Kaiserhof Rudolfs II. unterstützende mathematisch-technische Genius der Renaissance einer der bedeutendsten, wenn nicht sogar der wichtigste Mathematiker der Frühen Neuzeit sein und sich einreihen in Kapazitäten wie Thales, Euklid, Archimedes, Pythagoras, Apollonius, Diophant, Ptolemaios, Habash al-Hasib, Abu Nasr Ibn Iraq, Ibn al-Haytham, al-Kashi, Fibonacci, Regiomontanus, Stifel, Vieta, Kepler, Descartes, die Bernoullis, Leibniz, Newton, Euler, und Gauss bis hin zu Poincaré, Gödel und Einstein.

Doch etwas unterscheidet Jost Bürgi von den soeben genannten Wissenschaftlern. Er hatte nur sechs Jahre lang seine Lichtensteiger Grundschule besucht, nie eine Universität von innen gesehen, kein Mathematikstudium absolviert und war des Lateins unkundig. Dafür ist er der erste Uhrenmacher, dem es gelingt, eine sekundengenaue Observationsuhr zu entwickeln, die genauesten Himmelsgloben zu fertigen sowie das erste Sternverzeichnis der Neuzeit zu schaffen. Und einer der besten Mathematiker zu sein, den die Geschichte kennt! Bürgis damalige Zeitgenossen wie der Kaiserliche Mathematiker Ursus und sein hochgebildeter Chef Wilhelm IV von Hessen-Kassel verglichen Bürgi mit Euklid und einem zweiten Archimedes. Kepler hatte 1606 über Bürgi geschrieben, dass sein Ruhm einmal so gross sein werde, wie der Albrecht Dürers, und dass er ständig wachsen werde, wie ein Baum. Jetzt erst sieht man ihn in voller Grösse: er hat dazu 428 Jahre benötigt!

## Literatur

- Clark, Kathleen (2015): „Jost Bürgis‘ Artimetische und Geometrische Progresstabulen. Edition and Commentary.“ 260 Seiten. Reihe „Science Networks. Historical Studies“. Birkhäuser Springer, Basel.
- Folkerts Menso, Launert Dieter, Thom Andreas: „Jost Bürgi’s method for calculaing sines“. *Historia Mathematica* 43 (2016), S. 133–147.
- Launert, Dieter (2015): „Bürgis Kunstweg im Fundamentum Astronomiae. Entschlüsselung eines Rätsels.“ 120 Seiten. *Nova Kepleriana* 141, Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften/C.H.Beck, München.
- Lutstorf Heinz-Theo (2005): „Die Logarithmentafeln Jost Bürgis.“ Schriftenreihe der ETH-Bibliothek, Wissenschaftsgeschichte Band 3. Zürich.
- Nicollier, Grégoire (2016): “How Bürgi computed the Sines of all Integer Angles Simultaneously in 1586”. Manuskript zum 1. Internationalen Jost-Bürgi-Symposium. Erscheint in *Mathem. Intelligencer*.
- Roegel, Denis (2016): “A preliminary note on Bürgi’s computation of the sine of the first minute.” [www.locomat.loria.fr](http://www.locomat.loria.fr), 27. März 2016.
- Staudacher, Fritz (2015): „Jost Bürgi, Kepler und der Kaiser“, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, 259 Abbildungen, 312 Seiten. NZZ Libro, Zürich.
- Ullrich, Peter: “Jost Bürgis Weg zum Kunstweg: Eine Annäherung an sein mathematisches Denken.“ Vortrag am 1. Internationalen Jost-Bürgi-Symposium Lichtensteig, 19. März 2016.
- Waldvogel, Jörg (2014): “Jost Bürgi and the discovery of the logarithms.” In: *Elemente der Mathematik* 69, S. 89-117.
- Waldvogel, Jörg (2016): “Jost Bürgi’s Artificium of 1586 in modern view, an ingenious algorithm for calculating tables of the sine function.” *Elemente der Mathematik* 71, S. 1–11.

## Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (3. Teil)

Peter Thurnheer, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, tpeter@math.ethz.ch

In diesem 3. Teil geht es für Liebhaber längerer formaler, aber inhaltlich äusserst raffinierter und eleganter Argumentation um den Beweis des dritten, in Teil 1 formulierten Clifford–Morleyschen Satzes. Benützt wird dabei wieder die im 2. Teil vorbereitete Methode.

### Beweis Satz 3

Wir brauchen folgende Begriffe und Aussagen:

Die *elementarsymmetrische Funktion*  $S_k(x_1, \dots, x_m)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , ist die Summe aller Produkte mit  $k$  Faktoren von Argumenten  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Bezeichnet  $S_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , die elementarsymmetrischen Funktionen von  $m$  Variablen, so bezeichnen wir mit  $S_k^*$ ,  $k = 1, 2, \dots, m - 1$ , die elementarsymmetrischen Funktionen von  $m - 1$  Variablen. Brauchen werden wir, dass mit  $S_0^* = 1$  und  $S_m^* = 0$  gilt

$$x_m S_{k-1}^*(x_1, \dots, x_{m-1}) + S_k^*(x_1, \dots, x_{m-1}) = S_k(x_1, \dots, x_m), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (17)$$

Eine Gleichung nennt man *selbstkonjugiert*, wenn sie äquivalent ist zur Gleichung, die man erhält, wenn man in ihr die Koeffizienten durch ihre Konjugiertkomplexen und die Variable durch ihren Kehrwert ersetzt.

Ein Gleichungssystem nennen wir *konjugiert*, wenn es in ein äquivalentes über geht, falls man die Koeffizienten durch ihre Konjugiertkomplexen und die Unbekannten durch ihre Reziproken ersetzt.

Offensichtlich gilt für eine Lösung  $x$  einer selbstkonjugierten Gleichung  $\bar{x} = \frac{1}{x}$ .

*Die Lösungen einer selbstkonjugierten Gleichung sind Turns.*

Analog gilt:

*Die Lösungsmenge eines konjugierten Gleichungssystems besteht aus Turns.*

Wir beweisen Satz 3 und beschreiben die Cliffordkreise und -Punkte mit Hilfe der charakteristischen Konstanten (siehe Teil 2)  $a_1, a_2, \dots, a_m$  der zugrunde liegenden  $(m)$ -Konfiguration.

*Der Cliffordpunkt einer  $(2p)$ -Konfiguration,  $p \geq 2$ , ist der Punkt  $c$ , für den gilt*

$$\begin{vmatrix} a_1 - c & a_2 & \cdots & a_p \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & a_{p+1} & \cdots & a_{2p-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

*Der Cliffordkreis einer  $(2p + 1)$ -Konfiguration,  $p \geq 2$ , ist der Kreis*

$$\begin{vmatrix} a_1 - z(t) & a_2 & \cdots & a_p \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & a_{p+1} & \cdots & a_{2p-1} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{p+1} \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p+1} & a_{p+2} & \cdots & a_{2p} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Wir werden benützen, dass sich (18) respektive (19) ergibt aus folgender Aussage (20) respektive (21).

Der Cliffordpunkt einer  $(2p)$ -Konfiguration wird definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 c &= a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \cdots \pm a_p s_{p-1}, & (0) \\
 0 &= a_2 - a_3s_1 + a_4s_2 - + \cdots \pm a_{p+1}s_{p-1}, & (1) \\
 \vdots & & \vdots \\
 0 &= a_p - a_{p+1}s_1 + a_{p+2}s_2 - + \cdots \pm a_{2p-1}s_{p-1}, & (p-1)
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$s_k = S_k^*(t_1, t_2, \dots, t_{p-1}), \quad k = 1, 2, \dots, p-1.$$

Der Cliffordkreis einer  $(2p+1)$ -Konfiguration wird definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 z(t) &= a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \cdots \pm a_{p+1}s_p, & (0) \\
 0 &= a_2 - a_3s_1 + a_4s_2 - + \cdots \pm a_{p+2}s_p, & (1) \\
 \vdots & & \vdots \\
 0 &= a_p - a_{p+1}s_1 + a_{p+2}s_2 - + \cdots \pm a_{2p}s_p, & (p-1)
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$s_k = S_k^*(t, t_1, t_2, \dots, t_{p-1}), \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad t \in \mathbb{E}.$$

Zu verstehen ist dies in folgendem Sinn:

- (20): Es gibt Turns  $t_1, \dots, t_{p-1}$  welche  $(20)_{(1)}$  bis  $(20)_{(p-1)}$  erfüllen. Das System ist nämlich gemäss (7) für  $k = 2p$  konjugiert. Setzt man diese Turns in  $(20)_{(0)}$  ein, so erhält man den Cliffordpunkt  $c$ .
- (21): Zu jedem Turn  $t \in \mathbb{E}$  existieren Turns  $t_1, \dots, t_{p-1}$  welche  $(21)_{(1)}$  bis  $(21)_{(p-1)}$  erfüllen. Dieses System ist nämlich bei gegebenem  $t \in \mathbb{E}$  gemäss (7) für  $k = 2p+1$  konjugiert. Setzt man diese Werte in  $(21)_{(0)}$  ein, so erhält man einen Punkt  $z(t)$  des Cliffordkreises.

Immer wenn wir im Folgenden die Formulierungen unter (20) oder (21) benützen, sind sie in diesem Sinn zu verstehen.

Dass die Aussage (18) aus (20) folgt, sieht man, indem man in  $(20)_{(0)}$  beidseits  $c$  subtrahiert. Dann erhält das Gleichungssystem die Form

$$\underline{b}_0 - \underline{b}_1s_1 + \underline{b}_2s_2 - + \cdots \pm \underline{b}_{p-1}s_{p-1} = \underline{0}.$$

Die Vektoren  $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{p-1}$  sind linear abhängig, die Determinante der Matrix mit diesen Spaltenvektoren, d.h. die linke Seite der Gleichung (18), verschwindet.

Analog zeigt man, dass (21) die Aussage (19) impliziert. Wie oben folgt aus (21)

$$\begin{vmatrix}
 a_1 - z(t) \pm a_{p+1}s_p & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \\
 a_2 \pm a_{p+2}s_p & a_3 & a_4 & \cdots & a_{p+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_p \pm a_{2p}s_p & a_{p+1} & a_{p+2} & \cdots & a_{2p-1}
 \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus ergibt sich (19), aufgrund der Linearität in den Spaltenvektoren der Determinante, wenn man beachtet, dass  $\pm s_p = \pm t t_1 \cdots t_{p-1}$  ein Turn ist, den wir wieder mit  $t$  bezeichnen.

Beweis von (18) und (19) respektive (20) und (21) mit *vollständiger Induktion* über die Anzahl Geraden in der Konfiguration.

*Verankerung:* Die Umkreise der vier (3)–Konfigurationen einer (4)–Konfiguration sind nach (12) die Zentrumskreise der (3)–Konfigurationen. Sie schneiden sich nach Satz 2 im Punkt  $w = a_1 - \frac{a_2 a_3}{a_2}$ . Das heisst, der Cliffordpunkt  $c$  einer (4)–Konfiguration fällt mit dem Zentrumspunkt  $w$  zusammen. Nach (7) und (8) für  $k = 4$  gilt  $w = c = a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}$  und ist  $s_1 = S_1^*(t_1) = t_1 = \frac{a_2}{a_3}$  ein Turn.

Also gilt

$$\begin{cases} c = a_1 - a_2 s_1 \\ 0 = a_2 - a_3 s_1 \end{cases}, \quad s_1 = S_1^*(t_1).$$

Der Cliffordpunkt der (4)–Konfiguration wird definiert durch das Gleichungssystem (20) für  $p = 2$ , was die Induktion verankert.

Der Induktionsschritt ist in zwei Teilschritten durchzuführen.

*Induktionsvoraussetzung I:* Der Cliffordpunkt einer (2p)–Konfiguration wird definiert durch das Gleichungssystem (20).

Entfernt man aus einer (2p + 1)–Konfiguration eine Gerade  $x_j$ , so entsteht eine (2p)–Konfiguration mit Cliffordpunkt  $c_j$  und, nach (9), mit charakteristischen Konstanten  $a_k - a_{k+1}\tau_j$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2p$ . Das Gleichungssystem (20), welches nach Induktionsvoraussetzung den Cliffordpunkt  $c_j$  definiert, wird damit, wenn man (17) beachtet,

$$\begin{aligned} c_j &= a_1 - a_2 s_1 + a_3 s_2 - + \dots \mp a_{p+1} s_p, \\ 0 &= a_2 - a_3 s_1 + a_4 s_2 - + \dots \mp a_{p+2} s_p, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ 0 &= a_p - a_{p+1} s_1 + a_{p+2} s_2 - + \dots \mp a_{2p} s_p, \\ s_k &= S_k(\tau_j, t_1, \dots, t_{p-1}), \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Wählt man somit in (21)  $t = \tau_j$ , so wird  $z(t) = z(\tau_j) = c_j$ . Der Punkt  $c_j$  liegt für alle  $j$  auf dem Kreis definiert durch (21) respektive (19). Das Gleichungssystem (21) definiert den Cliffordkreis, was zu zeigen war.

Den zweiten Teilschritt rechnen wir zuerst im einfachsten Fall explizit durch, da dabei die wesentlichen Ideen des Beweises besonders deutlich zu erkennen sind.

*Induktionsvoraussetzung II\*:* Der Cliffordkreis einer (5)–Konfiguration wird definiert durch die Gleichungen (21) für  $p = 2$ :

$$\begin{aligned} z(t) &= a_1 - a_2(t + t_1) + a_3 t t_1, \\ 0 &= a_2 - a_3(t + t_1) + a_4 t t_1, \end{aligned} \quad t \in \mathbb{E}. \tag{22}$$

Entfernt man aus einer (6)–Konfiguration eine Gerade  $x_j$ , so erhält man eine (5)–Konfiguration mit charakteristischen Konstanten  $a_k - a_{k+1}\tau_j$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ . Die Gleichungen (22), welche nach Induktionsvoraussetzung den Cliffordkreis der reduzierten Konfiguration definieren, werden damit

$$z(t) = a_1 - a_2(t + t_1 + \tau_j) + a_3(t t_1 + t \tau_j + t_1 \tau_j) - a_4 t t_1 \tau_j, \tag{23}$$

$$0 = a_2 - a_3(t + t_1 + \tau_j) + a_4(t t_1 + t \tau_j + t_1 \tau_j) - a_5 t t_1 \tau_j, \tag{24}$$

Es gibt Turns  $\widehat{t}, \widehat{t}_1$  mit

$$0 = a_2 - a_3(\widehat{t} + \widehat{t}_1) + a_4 \widehat{t} \widehat{t}_1, \tag{25}$$

$$0 = a_3 - a_4(\widehat{t} + \widehat{t}_1) + a_5 \widehat{t} \widehat{t}_1, \tag{26}$$

denn diese Gleichungen bilden nach (7) für  $k = 6$  ein konjugiertes System. Subtrahiert man das  $\tau_j$ -fache der Gleichung (26) von (25), so erhält man (24). Wählt man also in

(24)  $t = \widehat{t}$ , so wird  $t_1 = \widehat{t}_1$ , und wenn man diese Werte in (23) einsetzt, erhält man einen Punkt des Cliffordkreises

$$z_j(\widehat{t}) = a_1 - a_2(\widehat{t} + \widehat{t}_1 + \tau_j) + a_3(\widehat{t}\widehat{t}_1 + \widehat{t}\tau_j + \widehat{t}_1\tau_j) - a_4\widehat{t}\widehat{t}_1\tau_j.$$

Subtrahiert man davon das  $\tau_j$ -fache von (25), so wird

$$z_j(\widehat{t}) = c = a_1 - a_2(\widehat{t} + \widehat{t}_1) + a_3\widehat{t}\widehat{t}_1 \tag{27}$$

unabhängig von  $j$ . Der Punkt  $c$  liegt auf allen sechs Cliffordkreisen, es ist der Cliffordpunkt der (6)-Konfiguration, und er wird definiert durch die Gleichungen (27) und (25), (26), also durch das Gleichungssystem (20) für  $p = 3$ . Das war zu zeigen.

*Induktionsvoraussetzung II:* Der Cliffordkreis einer  $(2p + 1)$ -Konfiguration wird definiert durch das Gleichungssystem (21).

Entfernt man eine Gerade  $x_j$  aus einer  $(2p + 2)$ -Konfiguration, erhält man eine  $(2p + 1)$ -Konfiguration mit den charakteristischen Konstanten  $a_k - a_{k+1}\tau_j$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2p + 1$ .

Aufgrund der Induktionsvoraussetzung wird ihr Cliffordkreis, wenn man noch (17) beachtet, damit definiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} z_j(t) &= a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \dots \mp a_{p+2}s_{p+1}, & (0) \\ 0 &= a_2 - a_3s_1 + a_4s_2 - + \dots \mp a_{p+3}s_{p+1}, & (1) \\ &\vdots & \vdots \\ 0 &= a_p - a_{p+1}s_1 + a_{p+2}s_2 - + \dots \mp a_{2p+1}s_{p+1}, & (p-1) \end{aligned} \tag{28}$$

$$s_k = S_k(t, t_1, t_2, \dots, t_{p-1}, \tau_j), \quad k = 1, 2, \dots, p + 1, \quad t \in \mathbb{E}.$$

Es gibt Turns  $\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}$  so, dass gilt

$$\begin{aligned} 0 &= a_2 - a_3s_1 + a_4s_2 - + \dots \pm a_{p+2}s_p, & (1) \\ 0 &= a_3 - a_4s_1 + a_5s_2 - + \dots \pm a_{p+3}s_p, & (2) \\ &\vdots & \vdots \\ 0 &= a_{p+1} - a_{p+2}s_1 + a_{p+3}s_2 - + \dots \pm a_{2p+1}s_p, & (p) \end{aligned} \tag{29}$$

$$s_k = S_k^*(\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}), \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

denn das System (29) ist gemäss (7) für  $k = 2p + 2$  konjugiert.

Subtrahiert man das  $\tau_j$ -fache der Gleichung (29)<sub>(k)</sub> von (29)<sub>(k-1)</sub>, und beachtet (17), so erhält man die Gleichung (28)<sub>(k-1)</sub>,  $k = p, p - 1, \dots, 2$ . Wählt man also in (28)  $t = \widehat{t}$ , so wird  $t_m = \widehat{t}_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, p - 1$ , und wenn man diese Werte in (28)<sub>(0)</sub> einsetzt, erhält man einen Punkt des Cliffordkreises

$$\begin{aligned} z_j(\widehat{t}) &= a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \dots \mp a_{p+2}s_{p+1}, \\ s_k &= S_k(\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}, \tau_j), \quad k = 1, 2, \dots, p + 1. \end{aligned}$$

Subtrahiert man davon das  $\tau_j$ -fache der Gleichung (29)<sub>(1)</sub>, so wird mit (17)

$$\begin{aligned} z_j(\widehat{t}) &= c = a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \dots \pm a_{p+1}s_p, \\ s_k &= S_k^*(\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}), \quad \text{unabhängig von } j, \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \tag{30}$$

Der Punkt  $c$  liegt auf allen Cliffordkreisen; es ist der Cliffordpunkt der  $(2p + 2)$ -Konfiguration und er wird definiert durch die Gleichungen (30) und (29), das heisst durch das Gleichungssystem (20) mit  $p + 1$  anstelle von  $p$ . Das war zu zeigen.

**Bemerkung.** Natürlich gibt es Ausnahmesituationen, in denen die obigen Argumente versagen und die Cliffordkette abbricht oder ausartet. Wir gehen hier nicht auf diese ein. Man findet Bemerkungen dazu in [9, 10].

## Beweis Zusatz

Der Zentrumskreis einer (4)–Konfiguration ist gemäss Satz 1 der Kreis

$$z(t) = a_1 - a_2t, \quad t \in \mathbb{E};$$

der Cliffordpunkt gemäss (18) der Punkt  $c = a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}$ . Dieser liegt aber offensichtlich auf dem Kreis, denn die Zahl  $t = \frac{a_2}{a_3}$  ist gemäss (8) für  $k = 4$  ein Turn, und, wenn man diesen in die Kreisgleichung einsetzt, erhält man  $c$ .

Der Zentrumskreis einer (5)–Konfiguration ist nach Satz 2, wenn man (7) für  $k = 5$  beachtet, der Punkt  $w = a_1 - \frac{a_2 a_3}{a_2} = a_1 - \frac{a_2 a_3}{a_4}$ .

Die Gleichung des Cliffordkreises ist nach (19) für  $p = 2$

$$z(t) = \frac{1}{a_3} (a_1 a_3 - a_2^2 - (a_2 a_4 - a_3^2)t), \quad t \in \mathbb{E}.$$

Aber nach (8) für  $k = 5$  ist  $t_0 = -\frac{a_2}{a_4}$  ein Turn. Für diesen Wert wird der Cliffordkreis–Punkt  $z(t_0) = w$ , was zu zeigen war.

## Schlussbemerkung

Schon für (6)–Konfigurationen lassen sich die in den Sätzen beschriebenen Situationen und Zusammenhänge kaum mehr in Figuren darstellen, während die rein formalen Argumente — die insbesondere für Satz 3 doch sehr raffiniert sind — die Aussagen sofort für eine beliebige Anzahl Geraden beweisen. Die Ueberlegungen Morleys geben ein besonders schönes Beispiel für das, was man „die Macht der Formel“ nennen könnte.

## Literatur

- [9] W.B. Carver. The Failure of the Clifford Chain. *Amer. J. Math.*, 42(3):137–167, 1920.
- [10] S. Kantor. Die Tangengeometrie an der Steinerschen Hypercycloide. *Sitzungsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Wien*, 78:204–232, 1878.



## Weiterbildungskurs

Aufgrund der grossen Nachfrage führen wir den bereits im März einmal durchgeführten Kurs ein zweites Mal durch.

# "Potenzreihen, der Schlüssel zur Analysis"

Ausgehend von der geometrischen Reihe wird das Rechnen mit Potenzreihen geübt und Schritt für Schritt alle wichtigen Potenzreihen eingeführt. Mit diesen Potenzreihen lassen sich dann beliebige Potenzen, Wurzeln, Sinus- und Cosinuswerte, sowie Logarithmen berechnen. Da das Ableiten von Potenzreihen eigentlich nur Kürzen ist, erhält man die Differentialrechnung quasi geschenkt. Zum Schluss werden Fourier-Reihen untersucht und überraschende Anwendungen gezeigt.



Die Potenzreihen haben in unserem Mathematikunterricht meist einen kleinen Stellenwert. Diese Weiterbildung zeigt auf, wie vielfältig die Potenzreihen sein können und wie man sie gewinnbringend im Unterricht einsetzen könnte.

Die Theorie der Potenzreihen eignet sich sowohl zur Repetition der Analysis vor der Matura, aber auch im täglichen Unterricht - und zwar nicht nur im Schwerpunktfach, sondern auch im Grundlagenfach. Zur Theorie wird ein Manuskript ausgeteilt und es werden diverse, im Unterricht erprobte Übungsblätter zur Verfügung gestellt.

Zielpublikum:	Für Lehrkräfte der Sekundarstufe II Mathematik
Referent:	PD Dr. Lorenz Halbeisen, Dozent für Logik und Mengenlehre an der ETH Zürich
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Dr. Meike Akveld (ETH), Daniela Grawehr (DMK)
Datum und Zeit:	Donnerstag, der 17. November 2016, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr
Kursort:	ETH Zürich, Hauptgebäude Raum G19.1
Kurskosten:	CHF 100
Anmeldung:	<a href="http://www.math.ch/DMK2016b/">www.math.ch/DMK2016b/</a>
Anmeldeschluss:	01. 11. 2016

**The Princeton Companion to Applied Mathematics, Nicholas Higham (Editor), Mark, R. Dennis, Paul Glendinning, Paul, A. Martin, Fadil Santosa, Jared Tanner (associate Editors),** 994 Seiten, 86.- CHF, Princeton University Press, Princeton NJ, 2015, ISBN 978-0-691-15039-0

Dies ist ein gewichtiger und nicht minder wichtiger Text für alle, die an Maturitätsschulen Mathematik motiviert unterrichten möchten. Diese Behauptung lässt sich hinreichend belegen, wenn man auch nur die Beiträge im abschliessenden Kapitel liest oder sich an den Namen der hochkarätigen Autoren orientiert. Diese Leute haben mit gutem Grund etwas zu sagen.

- Mathematical Writing, by Timothy Gowers
- How to Read and understand a Paper, by N.J. Higham
- How to Write a General Interest Mathematics Book, by I. Stewart
- Workflow By N.J. Higham
- Reproducible Research in the Mathematical Sciences, by D.L. Donoho and V. Stodden
- Experimental Applied Mathematics, by D.H. Bailey and J.M. Borwein
- Teaching Applied Mathematics
  - D. Acheson, What is the Big Picture?
  - P.R. Turner, Computation, Modeling, and Projects
  - G. Strang, What to Teach, and How?
- R. Levy, Industrial Mathematics Inspires Mathematical Modeling Tasks

Ferner wird das Mathematikbild in den Medien und das Verhältnis zur Politik angesprochen.

Didaktisches Geschick wird nie auf Motivation verzichten können, schon gar nicht, wenn sie der tiefere Grund für eine wesentliche Entdeckung oder Entwicklung war. Fermat oder Newton und Leibniz haben nicht den Differentialkalkül entwickelt, weil dieser an Universitäten im ersten Semester vorausgesetzt wird oder weil er sich leicht prüfen lässt.

Nachdem Kepler mit einer pionierhaften Analyse der Beobachtungsdaten von Tycho Brahe die Gesetze im Zweikörpersystem entdeckt hatte, wollte Newton diese Gesetze auch deduktiv herleiten und zwar aus dem von ihm hypothetisch formulierten Gravitationsgesetz. Aber das war bloss ein erster Schritt. Probleme aus der Himmelsmechanik beschäftigten danach auch Euler, Lagrange, Laplace, Gauss und viele andere, und sie war ein Treiber für die Entwicklung wesentlicher Begriffe und Methoden von grösster Tragweite in der Mathematik: Dynamische Systeme und Chaos, kombinatorische oder algebraische Topologie, die manche gerne als reinste Mathematik betreiben, und – wen wundert's? – auch Numerik und Statistik. Dabei wurden von blossen Auge unsichtbare Planeten oder Planetoiden rein rechnerisch durch Datenanalyse und Störungsrechnung entdeckt, später auch mit dem Teleskop gesichtet. Minimale Unzulänglichkeiten der klassischen Himmelsmechanik im Sonnensystem ebneten den Weg für eine radikal neue Gravitationstheorie Einsteins. Computergestützte Bahnberechnung, Simulationen und numerische Experimente sind unabdingbar für den Betrieb von satellitengestützter Dienste wie GPS, Wettersatelliten, Telekommunikationssatelliten oder die Erkundung des Sonnensystems mit Raumsonden.

Und was, bitte, hat diese höchst spannende Sache mit Mathematik im Gymnasium zu tun? Leider sehr oft gar nichts, wenn die historisch belegte Motivation nicht in den heutigen Unterricht durchsickern kann.

Das vorliegende Buch hat ein grosses Potenzial, diesen verbreiteten Mangel im Unterricht zu beheben. Nein, es geht nicht darum, einen Konflikt zwischen reiner und angewandter Mathematik zu schüren. Im Gegenteil, beide sind *Teil einer einzigen Mathematik*. Den Lernenden wird aber einiges Wichtiges

vorenthalten, wenn Mathematikunterricht echte und wichtige Anwendungen ausschliesst und wenn er sich aus ideologischen Gründen nur dem verpflichtet fühlt, was die Werkzeuge Formelsammlung, Papier und Bleistift in der Schule zulassen. Neben Anwendungen war die je vorhandene Technologie immer schon für die Weiterentwicklung der ganzen Mathematik unverzichtbar. Somit ist die Ansicht, dass wahre Mathematik alleine durch Denken zugänglich sei und es bleiben müsse, nicht unbestritten. Wer Computer ausschliesst, wird auf wichtige didaktische Anwendungen der Technologie wie Gerüstdidaktik oder das Blackbox/Whitebox-Prinzip von vornherein verzichten.

*Enhanced Problem Solving* (EPS), die technologiegestützte Problemlösung ist ein wesentlicher Erfolgsfaktor in zahlreichen Anwendungen. Im Kern steckt dahinter immer Mathematik im Verbund mit entsprechender Hardware, eben *Denkzeug und Werkzeug*. Die wichtige Botschaft für die Schulen lautet, dass die Ausbildung im Gebrauch von modernen Werkzeugen schon vor der Spezialisierung an der Hochschule ein Thema sein muss. Das könnte die Verwendung von einigen der folgenden Mittel sein: numerische oder algebraische Löser, numerische Simulationsprogramme bei der Modellbildung, Geometrieprogramme, Statistikprogramme, ein wissenschaftliches Textsystem (zB $\text{\LaTeX}$ ), Programme für symbolische Algebra (CAS), Numerikpakete, automatische Beweiser, Expertensysteme, . . . , also Beispiele zu Werkzeugen, die heutige Schüler bald einmal in der Praxis in Forschung oder Industrie antreffen werden. Studierende, die nach dem Blackbox/Whitebox-Prinzip mit EPS kompetent arbeiten können, und damit strukturierte Problemlösung und modulares Denken kennen, sind im Studium klar im Vorteil.

Es ist sehr verdankenswert, dass The Princeton Companion to Mathematics von 2008 durch einen entsprechenden Band über angewandte Mathematik ergänzt wird.

Die vorliegende Sammlung von Beiträgen hat den Vorteil, dass man versuchen kann, den Faden irgendwo nach eigenen Interessen oder gar Bedürfnissen aufzunehmen. Oft gelingt es dann, in aktuelle Anwendungen der Mathematik erste Einsichten oder Informationen zu bekommen, die im Studium noch nicht vermittelt wurden. Sie zu kennen, erlaubt auch, informiert über Mathematik zu sprechen, die zwar nicht zum Kanon der Schulmathematik gehört, aber für Arbeitsfelder in der Spitzentechnologie wesentlich sind: Kryptologie, Rankings, CT-Scanner, Bildbearbeitung, CAD, Finanzmathematik, . . .

Ausser dem Herausgeber werden wenige alles gelesen haben. Hier folgt die Gliederung in acht Teile als grobe Übersicht:

I Introduction to Applied Mathematics

II Concepts

III Equations, Laws, and Functions of Applied Mathematics

IV Areas of Applied Mathematics

V Modeling

VI Example Problems (die einfachsten nichttrivialen Fälle können Ideen für Projektarbeiten liefern.)

VII Applied Areas (Orientierung über aktuelle Mathematikanwendungen z.B. in Ingenieurberufen, Life-sciences, Politik- und Sozialwissenschaften, Geowissenschaften, Finanzindustrie und Wirtschaftswissenschaften)

VIII Final Perspectives

Hier ist noch eine kleine Auswahl aus Unterthemen in Reichweite des gymnasialen Unterrichts:

I.3 Methods of Solution / I.4 Algorithms / II.13 Floating Point Arithmetic / II.16 Graph Theory / II.25 Markov Chains / II.28 Nonlinear Equations and Newton's Method / III.1 Benford's Law / III.15 Hooke's Law / III.19 The Logistic Equation

Das Buch kann zur vitalen Erneuerung des Mathematikbildes im Unterricht beitragen und zeigen, dass Mathematik weiterhin ihre Kraft einer innigen Verbindung von Kultur mit Technologie verdankt.

H.R. Schneebeli, Wettingen

## Analyse eines Weihnachtssterns

Peter Gallin

Auf der Homepage der Didaktikerin Beate Leßmann habe ich eine interessante Anleitung zum Basteln eines Weihnachtssterns gefunden (Abb. 1), bei der ich mir die Frage gestellt habe, wie denn die je drei Einbuchtungen in den beiden gleichseitigen Dreiecken wohl zu konstruieren sind, damit beim Zusammenstecken der beiden Sternhälften ein möglichst bündiger Sitz gewährleistet ist.

Zur Analyse der Geometrie einer Sternhälfte schneiden wir zuerst nur ein gleichseitiges Dreieck aus und verzichten auf die drei Einbuchtungen. Das Dreieck wird längs der drei Höhen gefaltet, deren Länge wir auf 3 festsetzen. Dann wird der kurze Teil (Länge 1) jedes Falzes konkav, der lange Teil (Länge 2) dagegen konvex ausgebuchtet, so dass sich die Spitzen einer Sternhälfte herausbilden lassen. Unsere Sternhälfte hat damit im Zentrum eine dreiseitige Pyramide mit der Spitze  $H$  und den drei von  $H$  ausgehenden Kanten der Länge 1. Die Basispunkte der Pyramide nennen  $W$ ,  $X$ , und  $Y$ . Ausserdem bezeichnen wir den im Bereich von  $0^\circ$  bis  $60^\circ$  frei wählbaren halben Winkel zwischen je zwei dieser Kanten mit  $\alpha$ . Das Grunddreieck  $WXY$  der Pyramide ist dann ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge  $2 \sin(\alpha)$ .

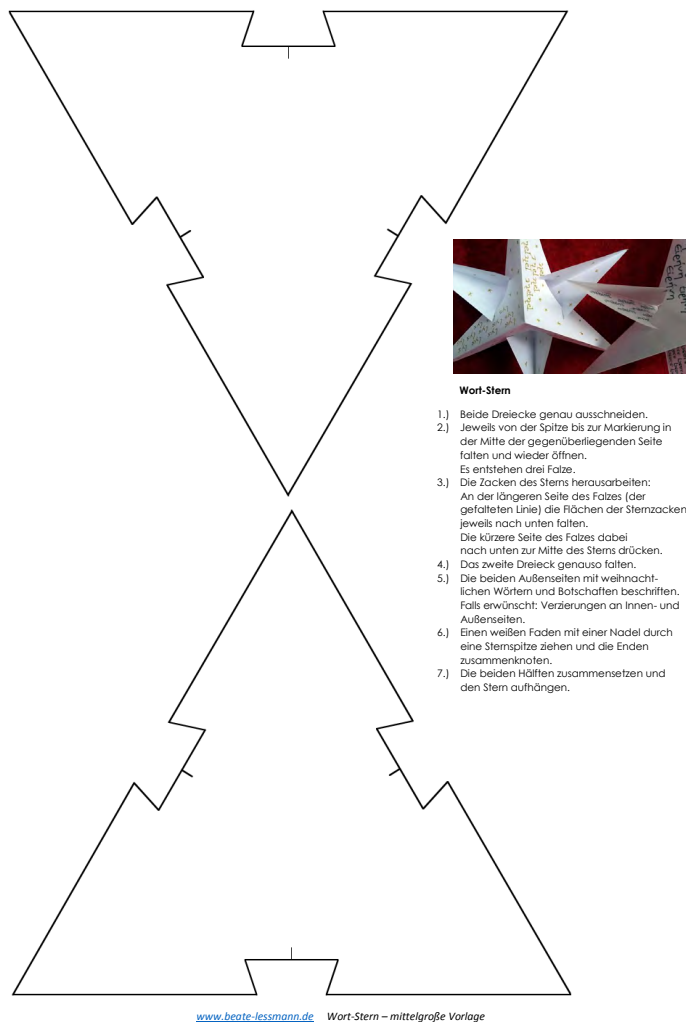


Abb. 1: Bastelanleitung

Stellt man die Pyramide auf den Tisch, so beobachtet man, dass die drei Spitzen sich vom Tisch auf eine bestimmte, noch unbekannte Höhe  $h$  über dem Tisch anheben. Bereits jetzt kann man sich an der Abb. 4 orientieren, in der die Pyramide auf der Grundrissebene steht und eine Sternspitze  $Z$  eingezeichnet ist. Wir verwenden dabei die traditionelle 2-Tafel-Projektion der Darstellenden Geometrie. Die Höhe  $h$  von  $Z$  über dem Tisch wollen wir nun konstruieren und in Abhängigkeit von  $\alpha$  berechnen. Dazu verwenden wir zuerst eine andere Lage der Pyramide im Raum. Wir legen die Ebene  $HXY$  in die Grundrissebene und zwar so, dass  $XY$  zweitprojizierend, d. h. senkrecht zur Aufrissebene liegt (Abb. 2). Gemäss unserer Festlegung können wir die Längen 1 und die Winkel  $\alpha$  im Grundriss eintragen. Die Kante  $HW$  ist aus Symmetriegründen eine zweite Hauptgerade. Zudem ist das Dreieck  $HWX$  kongruent zum Dreieck  $HYX$ . Damit kann das Dreieck  $HYX$  um  $HX$  so weit gedreht werden, bis der Punkt  $Y$  in der 1. Projektion die Winkelhalbierende von  $\angle YHX$  trifft. D. h. man zeichnet zu  $H'X'$  ein Lot durch  $Y'$ , auf dem dann  $W'$  liegt. Den



Die Gleichung der Geraden  $W''X''$  kann noch durch  $s$  dividiert werden:  $z \cdot s = (y - c) \cdot \sqrt{4c^2 - 1}$ . Mit der Vereinfachung  $\sqrt{s^2 + 4c^2 - 1} = c\sqrt{3}$  ergibt sich die Hessesche Normalform:

$$-y \cdot \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3c^2}} + z \cdot \frac{s}{c\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} = 0$$

Durch Einsetzen der Koordinaten  $y = 0$  und  $z = 0$  von  $H''$  ihr liest man die Höhe  $|H''O''| = |HO|$  der Pyramide als  $\sqrt{\frac{4c^2-1}{3}} = \sqrt{\frac{3-4s^2}{3}}$  ab. Setzen wir dagegen die Koordinaten von  $Z''$ , also  $y = \frac{1}{c}$  und  $z = \sqrt{4 - \frac{1}{c^2}}$  ein, so ergibt sich auf der rechten Seite der Hesseschen Normalform anstelle von 0 die Höhe  $h$  von  $Z$  über der Tischfläche, also die Länge  $|Z''P''|$ :

$$h = -\frac{1}{c} \cdot \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3c^2}} + \sqrt{4 - \frac{1}{c^2}} \cdot \frac{s}{c\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} = \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} \left( -\frac{1}{c^2} + \frac{s}{c^2} + 1 \right) = \frac{s(1 - s)}{c^2} \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}}$$

Die graphische Darstellung (Abb. 3) dieser Spitzenhöhe  $h$  über dem Tisch als Funktion von  $s$  verleitet uns dazu, jenen Weihnachtsstern auszuzeichnen, bei dem diese Höhe am grössten ist. Wir zeichnen also im Bereich  $0 < \alpha < 60^\circ$  d.h. für  $0 < s < \frac{\sqrt{3}}{2}$  den Graphen der Funktion

$$h(s) = \frac{s(1 - s)}{c^2} \sqrt{\frac{4c^2 - 1}{3}} = \frac{s(1 - s)}{1 - s^2} \sqrt{\frac{3 - 4s^2}{3}} = \frac{s}{1 + s} \sqrt{\frac{3 - 4s^2}{3}} .$$

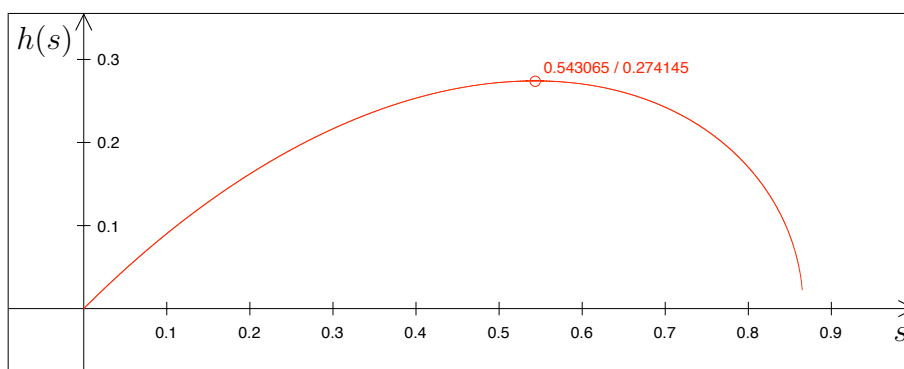


Abb. 3: Höhe der Sternspitze über dem Tisch

Das Nullsetzen der Ableitung  $h'(s)$  liefert eine Gleichung dritten Grades. Wir lösen sie nur numerisch und erhalten den Näherungswert  $s_0 = 0.543065$  also  $\alpha_0 = 32.8925^\circ$ . Die maximale Höhe beträgt  $h_0 = 0.274145$ .

In einem letzten Schritt wollen wir die ursprüngliche Fragestellung behandeln: Wie müssen die Einbuchtungen im gleichseitigen Dreieck ausgeschnitten werden, damit der gute Sitz der beiden Sternhälften gewährleistet ist? Offenbar muss der kurze Schnitt der Einbuchtung einen bestimmten Winkel  $\gamma (< 90^\circ)$  gegenüber der Dreiecksseite einnehmen, so dass er auf der Schnittgeraden der beiden beteiligten Ebenen der Sternhälften liegt.

Wieder verwenden wir die 2-Tafel-Projektion der Darstellenden Geometrie und wählen jetzt die Grundrissebene als Tischfläche, auf der die dreiseitige Pyramide steht (Abb. 4). Das Zentrum  $O$

des Grunddreiecks liege im Ursprung, die Spitze  $H$  hat dann die Koordinaten  $H(0, 0, \sqrt{\frac{3-4s^2}{3}})$ . Das Grunddreieck  $XYW$  soll die Kante  $YW$  in zweiter Hauptlage haben. Die Koordinaten der drei Grundpunkte der Pyramide lauten dann:  $X(\frac{2s}{\sqrt{3}}, 0, 0)$ ,  $Y(-\frac{s}{\sqrt{3}}, s, 0)$  und  $W(-\frac{s}{\sqrt{3}}, -s, 0)$ . Schliesslich können wir dank der Masse in Abb. 2 auch die Spitze  $Z$  einzeichnen:  $Z(\frac{|OP|}{2}, \frac{|OP|}{2}\sqrt{3}, h)$ . Offenbar müssen wir noch  $|OP|$  berechnen. Dies kann im Aufriss von Abb. 2 mit Pythagoras ausgeführt werden:

$$|OP| = \sqrt{4 - (|HO| - h)^2}$$

Setzen wir die oben berechneten Werte ein, erhalten wir  $|OP| =$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{4 - \left( \sqrt{\frac{3-4s^2}{3}} - \frac{s}{1+s} \sqrt{\frac{3-4s^2}{3}} \right)^2} = \\ &= \sqrt{4 - \frac{3-4s^2}{3} \left( 1 - \frac{s}{1+s} \right)^2} = \\ &= \sqrt{4 - \frac{3-4s^2}{3(1+s)^2}} = \frac{\sqrt{9+24s+16s^2}}{\sqrt{3}(1+s)} = \\ &|OP| = \frac{3+4s}{\sqrt{3}(1+s)} \end{aligned}$$

Damit sind alle wesentlichen Punkte der oberen Sternhälfte bekannt. Nun fügen wir die untere Sternhälfte dazu mit dem Ziel die angesprochene Schnittgerade in den Griff zu bekommen. Dazu spiegeln wir die obere Sternhälfte an der Grundrissebene und drehen das Spiegelbild noch mit  $60^\circ$  um die  $z$ -Achse. Es ergeben sich so die Punkte  $\bar{H}(0, 0, -\sqrt{\frac{3-4s^2}{3}})$ ,  $\bar{X}(\frac{s}{\sqrt{3}}, s, 0)$ ,  $\bar{Y}(-\frac{2s}{\sqrt{3}}, 0, 0)$ ,  $\bar{W}(\frac{s}{\sqrt{3}}, -s, 0)$  und  $\bar{Z}(-\frac{|OP|}{2}, \frac{|OP|}{2}\sqrt{3}, -h)$ .

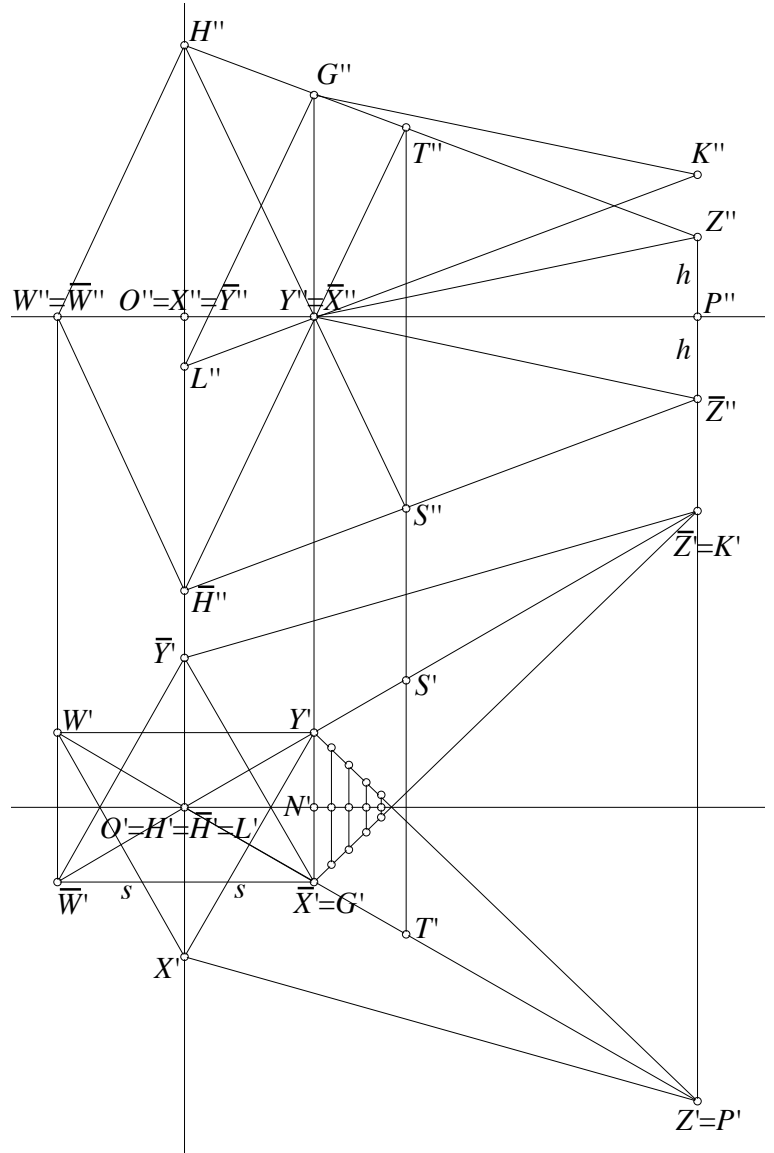


Abb. 4: Konstruktion der Schnittgeraden  $ST$

Nun könnte man mit den Mitteln der Vektorgeometrie und beispielsweise mit Hilfe der Software *Mathematica* aus den gegebenen sechs Punkten die Richtung der Schnittgeraden der Ebenen  $HYZ$  und  $\bar{H}\bar{X}\bar{Z}$  berechnen, um so den Winkel  $\gamma$  zwischen ihr und der Kante  $YZ$  zu erhalten. Das ist der Winkel, mit dem die kurzen Schnitte der Einbuchtungen in Abb. 1 zu führen wären. Wir wollen aber noch etwas länger bei der Geometrie bleiben und die Schnittgerade genauer untersuchen, denn so ergibt sich schliesslich eine Konstruktion für die unklaren Einbuchtungen.

Zuerst stellen wir fest, dass die Schnittgerade der Ebenen  $HYZ$  und  $\bar{H}\bar{X}\bar{Z}$  wegen der Symmetrie

in Grund- und Aufriss in Abb. 4 eine dritte Hauptgerade sein muss, ihre Risse also parallel zur  $z$ -Achse liegen. Die Gerade  $HY$  schneidet nämlich die Gerade  $\overline{H\overline{Z}}$  im Punkt  $S$  und die Gerade  $\overline{H\overline{X}}$  schneidet die Gerade  $HZ$  in  $T$ . Die Punkte  $S$  und  $T$  definieren die Schnittgerade und haben dieselbe  $y$ -Koordinate. Anstatt diese Schnittgerade zu betrachten, verschieben wir nun die untere Sternhälfte in Richtung der  $z$ -Achse nach oben und zwar so weit, bis die verschobene Kante  $\overline{H\overline{Z}}$  durch den Punkt  $Y$  geht. Dann schneidet aber die verschobene Kante  $\overline{X\overline{Z}}$  die Kante  $HZ$  im Punkt  $G$ . Die verschobene Ebene wird durch die drei Punkte  $G$ ,  $K$  und  $L$  in Abb. 4 aufgespannt. Bei diesem Verschiebeprozess verschiebt sich die Schnittgerade parallel und geht als Schnittgerade der Ebenen  $HYZ$  und  $LGK$  durch die Punkte  $G$  (auf  $HZ$ ) und  $Y$  (auf  $LK$ ). Nun geht es also nur noch darum, im Dreieck  $GYZ$  den Winkel  $\gamma$  bei  $Y$  zu bestimmen. Dazu fehlt uns die  $z$ -Koordinate  $z_G$  von  $G$ .

Die Gleichung der Geraden  $H''Z''$  in der  $yz$ -Ebene von Abb. 4 lautet:

$$z = -\frac{|HO| - h}{\frac{|OP|\sqrt{3}}{2}} \cdot y + |HO|$$

Drückt man alles durch  $s$  aus und setzt zudem  $y = s$  (die  $y$ -Koordinate von  $G$ ), so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$z_G = \frac{\sqrt{3 - 4s^2} (3 + 2s)}{\sqrt{3} (3 + 4s)}$$

Somit hat  $G$  folgende Koordinaten  $G(\frac{s}{\sqrt{3}}, s, z_G)$ . Erst jetzt setzen wir *Mathematica* ein und berechnen die Quadrate der drei Seitenlängen des Dreiecks  $GYZ$  in Abhängigkeit von  $s$ :

$$\begin{aligned} |GY|^2 &= \left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right)^2 + (z_G)^2 = \frac{16s^5 + 32s^4 + 20s^3 + 16s^2 + 21s + 9}{3 + 4s} \\ |GZ|^2 &= \left(\frac{|OP|}{2} - \frac{s}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{|OP|\sqrt{3}}{2} - s\right)^2 + (z_G - h)^2 = \frac{4(3 + 2s - 2s^2)^2}{(3 + 4s)^2} \\ |YZ|^2 &= 3 \end{aligned}$$

Der gesuchte Schnittwinkel  $\gamma$  ergibt sich über den Cosinussatz:

$$\gamma(s) = \arccos\left(\frac{|GY|^2 + |YZ|^2 - |GZ|^2}{2|GY||YZ|}\right) = \arccos\left(\frac{2\sqrt{3}s(s+1)}{\sqrt{9 + 12s + 4s^2 + 16s^3 + 16s^4}}\right)$$

Damit kennt man den Zusammenhang von dem halben Winkel  $\alpha$  zwischen zwei Seitenkanten der dreiseitigen Pyramide  $HWXY$  und dem Winkel  $\gamma$ , mit dem man die Einbuchtungen von der Papierkante her einschneiden soll. Insbesondere für unseren Fall mit maximaler Spitzenhöhe  $h_0$  ergibt sich  $\gamma_0 = 50.2982^\circ$ . Die Extremwerte für  $\alpha = 0^\circ$  ( $s = 0$ ) resp. für  $\alpha = 60^\circ$  ( $s = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ) ergeben entartete Sterne, bei denen die beiden Flächen der Sternspitzen total zusammengedrückt werden resp. die beiden Sternhälften total flach bleiben. Für diese Fälle liefert die Formel erwartungsgemäss die Winkel  $\gamma = 90^\circ$  resp.  $\gamma = 30^\circ$ . Dazwischen fällt die Funktion  $\gamma(s)$  monoton.

Unklar bleibt noch, wie breit die Einbuchtung sein soll. Dazu wollen wir zurückkehren zu unserer Schnittgeraden  $GY$ , welche in der Situation zum Zug kommt, wenn die untere Sternhälfte maximal

nach oben geschoben ist. Dann können wir im Dreieck  $LGK$  von  $G$  her längs der Strecke  $GY$  bis zu deren Mittelpunkt  $N$  und im Dreieck  $HYZ$  von  $Y$  her längs der Strecke  $GY$  von  $Y$  bis  $N$  einschneiden. So können die beiden Hälften maximal ineinander geschoben werden. Die Endpunkte der beiden Schnitte liegen also je beim Punkt  $N$ .

Verschiebt man nun die untere Sternhälfte in Richtung  $z$ -Achse langsam nach unten, so verschiebt sich der immer kürzer werdende Schnitt langsam nach rechts, wobei das Ende jedes Schnittes immer auf der Verbindung von  $H$  mit  $N$  liegen muss. Mehrere dieser Schnitte sind in Abb. 4 im Grundriss parallel zu  $G'Y'$  eingetragen. Zum Schluss übertragen wir diese Erkenntnis in den Ausschnittbogen von Abb. 1 und erhalten so die Abb. 5. Wir starten nun nicht mit der Wahl  $\alpha$  resp.  $s$ , sondern wählen den Winkel  $\gamma$  im Bereich von  $90^\circ$  bis  $30^\circ$  frei. Somit kann man zuerst von der Mitte einer Seite des gleichseitigen Papierdreiecks mit einer Richtung innerhalb dieser Grenzen bis zur Mittelparallelen zu  $HZ$  des Dreiecks  $HYZ$ , also bis zum Punkt  $N$ , einschneiden. Diesen Schnitt spiegelt man an  $HY$  nach links und anschließend durch weitere Spiegelungen auch auf die anderen Seiten des Dreiecks. Zwei solche Papiermodelle lassen sich dann nach dem Falten der Spitzen so zusammenstecken, dass man keine Lücke zwischen beiden Sternhälften mehr sieht. Da  $\gamma(s)$  umkehrbar ist, stellen sich  $s$  und damit  $\alpha$  automatisch ein. Will man die Sternhälften nicht so stark zueinander bewegen, kann dieser ursprüngliche Schnitt nach rechts parallel verschoben und gleichzeitig so verkürzt werden, dass sein Ende auf der Verbindung von  $H$  mit  $N$  liegt. Da nun die Schnitte genau ineinander greifen, muss man die Einbuchtungen gar nicht mehr der Länge nach ausschneiden. Sie sind hier bloss eingezeichnet, um den Zusammenhang mit Abb. 1 herzustellen.

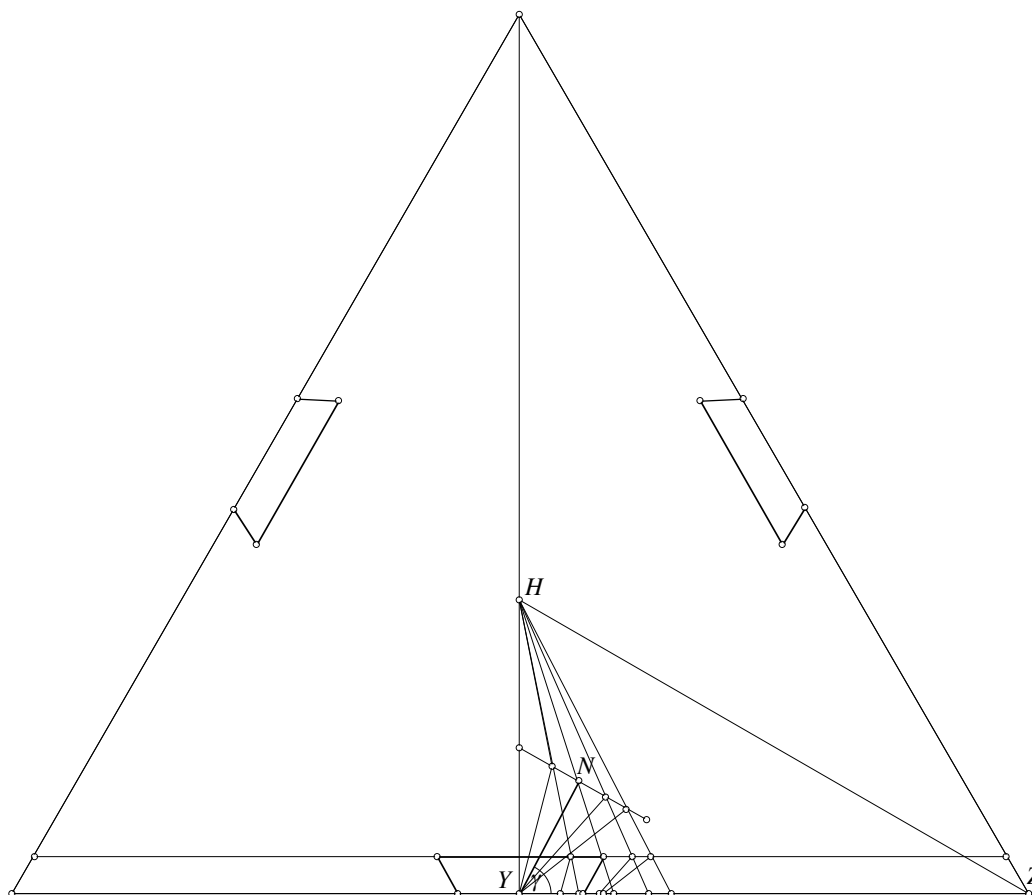


Abb. 5: Exakte Schnitte

# Gedanken zur psychologischen Seite der Zahlen am Beispiel eines Verlustaversionstest

Rainer Hauser, SIS College Zürich, rainer.hauser@swissinternationalschool.ch

## Zusammenfassung

Zahlen haben auch eine emotionale Seite, mit der sich die Psychologie befasst, und die sich dann sehr deutlich zeigt, wenn es um Geldbeträge geht. Dazu gehört auch die so genannte Verlustaversion, die gerne in der Werbung von Banken erwähnt wird, um Laien an der Börse von der Notwendigkeit von professionellen Beratern zu überzeugen. Der Verlustaversionstest aus einer solchen Werbung wird hier etwas genauer unter die Lupe genommen.

## 1 Die psychologische Seite der Zahlen

Die reellen Zahlen im Alltag sind nicht einfach abstrakte Grössen, die sich addieren und multiplizieren lassen, wobei mathematische Gesetze wie das Distributivgesetz gelten. Das ist für viele Leute nur ein nebensächlicher Teil der Wahrnehmung von Zahlen. Es gibt auch eine Seite, die nichts mit dem rationalen Verstand, aber viel mit Emotionen und der Psychologie des Menschen zu tun haben.

So akzeptieren die Stimmberechtigten an einer Gemeindeversammlung ein neues Schulhausprojekt, das mehrere Millionen kosten soll, ohne grosse Diskussion, während sie stundenlang über einen bedeckten Fahrradunterstand debattieren können, der ein paar tausend Franken kostet, um ein bekanntes Beispiel zu zitieren. Geldbeträge in der Grössenordnung von mehreren Millionen sind für die meisten Menschen ausserhalb ihrer Alltagserfahrung und somit ausserhalb ihres Vorstellungsvermögens. Mit Geldbeträgen in der Grössenordnung von ein paar tausend Franken hingegen haben schon alle zu tun gehabt.

## 2 Die Asymmetrie von Gewinn und Verlust

Das obige Beispiel betrifft Geld, was nicht weiter verwunderlich ist, weil finanzielle Belange starke Emotionen wecken können. So empfinden die Menschen einen finanziellen Gewinn als positiv und einen finanziellen Verlust als negativ. In einer Publikation im Jahre 1979 haben Daniel Kahneman und Amos Tversky festgestellt, dass Menschen Verluste jedoch stärker empfinden als Gewinne in der gleichen Höhe, und haben das Phänomen *Verlustaversion* genannt [1].

Ohne tiefer auf die Prospect Theory einzugehen, die sich mit der Verlustaversion beschäftigt, kann man die dabei benutzten Experimente und empirischen Befunde betrachten und sich fragen, wie man sich selber bei diesen Experimenten verhalten hätte. Den Versuchspersonen wurden hypothetische Situationen vorgelegt, in die sie sich möglichst gut versetzen sollten. So wurden sie beispielsweise gefragt, was sie vorziehen würden: (A) Je 50% Chance 1000 Pfund oder nichts zu gewinnen oder (B) 450 Pfund sicher zu bekommen. In diesem Beispiel war die Währung israelische Pfund, wobei das monatliche Einkommen einer Familie in Israel damals etwa 3000 Pfund war.

Die absolute Grösse des zu gewinnenden Geldbetrags, aber auch die relative Grösse im Vergleich zum Einkommen oder Vermögen spielen hier natürlich eine wichtige Rolle. Die Verlustaversion wird mit der Dissonanztheorie erklärt, was man grob so zusammenfassen kann, dass jemand, der einen Gewinn

gemacht hat, diesen nicht begründen muss, während jemand, der einen gleich grossen Verlust gemacht hat, dies aber tun muss. Entsprechend ist der Chef einer Firma im ersten Fall in einer komfortableren Situation als im zweiten Fall. Die Frage ist jetzt, wie zeigt sich die Verlustaversion im Alltag, und wie unterscheidet sie sich von der Tatsache, dass Menschen grundsätzlich lieber gewinnen als verlieren.

### 3 Ein Beispiel

Eine bekannte Schweizer Bank hat in einer Werbung auf dem Internet – neben der Warnung vor anderen Gefahren, die auf Laien an der Börse lauern – folgende zwei Spiele gewählt, um sich selber auf Verlustaversion zu testen:

#### Testen Sie jetzt Ihre Verlustaversion

##### **Spiel 1: Gewinn auf sicher**

Bitte entscheiden Sie sich.

- a) Sie bekommen sicher CHF 900.-
- b) Sie haben die Möglichkeit, in einem Glückspiel mit
  - 90% Wahrscheinlichkeit, CHF 1 000 zu gewinnen
  - 10% Wahrscheinlichkeit, nichts zu gewinnen

##### **Spiel 2: Verlust auf sicher**

Wofür entscheiden Sie sich?

- a) Sie verlieren sicher CHF 900.-
- b) Sie haben die Möglichkeit, in einem Glückspiel mit
  - 90% Wahrscheinlichkeit, CHF 1 000 zu verlieren
  - 10% Wahrscheinlichkeit, nichts zu verlieren

Haben Sie sich beim Spiel 1 für die sichere Variante a und beim Spiel 2 für die risikoreiche Variante b entschieden? Dann teilen Sie Ihre Entscheidung mit rund 80% der Befragten. Sie ist rational nicht erklärbar und zeigt die sogenannte Verlustaversion. Gewinne und Verluste werden von Investoren meist unterschiedlich eingeschätzt. Bei Verlusten ist die Bereitschaft zu spielen viel grösser.

Die beiden Spiele sehen symmetrisch aus, denn im einen Spiel geht es um Gewinn und im anderen um Verlust, und die Geldbeträge wie auch die Wahrscheinlichkeiten sind gleich gewählt. Eine später aufgeschaltete Version derselben Werbung liess die Formulierung “Sie ist rational nicht erklärbar” weg, behielt aber die Behauptung bei, dass die Wahl der sicheren Variante a im ersten Spiel und die Wahl der risikoreichen Variante b im zweiten Spiel Verlustaversion zeige.

### 4 Ein anderes Beispiel von Verlustaversion

Bevor wir den Verlustaversionstest in dieser Bankwerbung genauer anschauen und einer Analyse unterziehen, die auch für den Mittelschulunterricht geeignet ist, wollen wir etwas besser verstehen, was Verlustaversion ist, und wie sie sich in Alltagssituationen zeigt. Eine Suche im Internet nach “Verlustaversion” liefert zahlreiche Ergebnisse. Etliche davon stammen ebenfalls von Banken. Die generelle Meinung auf diesen Webseiten ist, dass Laien an der Börse es vermeiden, Verlustpositionen rechtzeitig

abzustossen, weil der Verlust so nur virtuell ist und erst real wird, wenn man die Papiere verkauft und damit den Verlust *realisiert*. Ob Verlustvermeidung an der Börse grundsätzlich richtig oder falsch ist, bleibe dahingestellt, denn es kann sinnvoll sein, auch bei Kursstürzen Aktien weiter zu halten, da die Kurse meistens irgendwann wieder steigen. Es kann aber auch vernünftiger sein, sie möglichst schnell abzustossen, denn selbst renommierte Firmen wie die Fluggesellschaft Swissair können in Konkurs gehen, womit die Aktien nur noch Sammlerwert haben.

Auch Wikipedia erscheint erwartungsgemäss bei einer Internetsuche mit diesem Stichwort [2]. Darin findet sich ein Beispiel, bei dem es offensichtlicher ist, dass Verlustaversion keine optimale Strategie ist, wenn man den Gewinn maximieren will. Taxifahrer in New York setzen sich ein tägliches Umsatzziel. Haben sie das erreicht, so hören sie auf zu arbeiten. Das ist deshalb ein wenig sinnvolles Verhalten, weil sie so an Tagen mit viel Nachfrage nur kurz arbeiten, während sie an Tagen, an denen nichts läuft, kaum ihr Ziel erreichen. Vernünftiger wäre es, wenn sie es sich an Tagen, an denen Flaute herrscht, zu Hause gemütlich machen, während sie an Tagen mit starker Nachfrage möglichst lange arbeiten. Sie würden so zwar nicht jeden Tag ihr Umsatzziel erreichen, würden aber an umsatzstarken Tagen die Verluste von Tagen mit schwachem Geschäftsgang mehr als nur kompensieren.

Es gibt einen wichtigen Unterschied zwischen der Situation der Laien mit ihren Börsengeschäften und der Situation der Taxifahrer in New York. Solange jemand seine Positionen an der Börse nicht abgestossen hat, sind Gewinn und Verlust nur virtuell. Der Taxifahrer weiss aber zu jeder Zeit, wie hoch seine Einnahmen für diesen Tag bis jetzt sind. Wenn er sich also entscheidet, an einem Tag, an dem es gut läuft, noch weiter zu arbeiten, so sind ihm die bisherigen Tageseinnahmen sicher.

## 5 Die finanzielle Situation einer typischen Familie in der Schweiz

Weil Zahlen, die Geldbeträge bedeuten, eine starke psychologische Komponente enthalten, und weil wie oben festgestellt das Verhalten von der Grösse der gewählten Geldbeträge abhängt, müssen wir die Beträge in den beiden Spielen im oben erwähnten Verlustaversionstest in eine Beziehung zur finanziellen Situation der Personen bringen, die diesen Test allenfalls machen. In beiden Spielen kommen die gleichen drei Beträge von Fr. 100.-, Fr. 900.- und Fr. 1000.- vor, die man in zwei Gruppen einteilen kann. Der Betrag Fr. 100.- ist in der Grössenordnung von hundert Franken, und die beiden anderen Beträge Fr. 900.- und Fr. 1000.- sind in der Grössenordnung von tausend Franken.

Das Durchschnittseinkommen liegen in der Schweiz bei etwa Fr. 6000.- pro Person. Bei einem mittelgrossen Einkauf in einem Lebensmittelgeschäft oder bei einem Nachtessen in einem Restaurant zu zweit gibt man schnell um die hundert Franken aus. Man kann also sagen, dass für Leute in der Schweiz Geldbeträge in dieser Grössenordnung bei Verlust verkraftbar sind, während Geldbeträge in der Grössenordnung von tausend Franken bei Verlust als recht schmerzhaft empfunden werden, bedeuten sie doch einen Sechstel des monatlichen Einkommens.

## 6 Analyse der beiden Spiele

Spielt man das erste Spiel in der obigen Bankwerbung sehr häufig, bekommt man gemäss dem Gesetz der grossen Zahlen Fr. 900.- pro Spiel im Durchschnitt, sodass es nicht darauf ankommt, ob man Variante a oder b wählt. Spielt man das Spiel aber nur einmal, so bekommt man im besten Fall Fr. 100.- mehr, wenn man die risikoreichere Variante wählt, als wenn man die sichere Variante wählt, während man im schlechtesten Fall Fr. 900.- weniger erhält. Auch im zweiten Spiel sind die Wahrscheinlichkeiten so gewählt, dass es nicht darauf ankommt, ob man Variante a oder b wählt, wenn man das Spiel sehr oft spielt. Spielt man es jedoch nur einmal, verliert man im schlimmsten Fall Fr. 100.- mehr, gewinnt aber Fr. 900.- im besten Fall.

Jetzt sieht die Situation bei diesen beiden Spielen plötzlich nicht mehr so symmetrisch aus. Wenn man beim ersten Spiel Variante b statt Variante a wählt, kann man Fr. 100.- mehr gewinnen, aber Fr. 900.- verlieren. Wählt man hingegen beim zweiten Spiel Variante b statt Variante a, so kann man zwar Fr. 100.- mehr verlieren, aber Fr. 900.- gewinnen. Die Wahrscheinlichkeiten sind zwar so gewählt, dass der mögliche zusätzliche Gewinn von Fr. 100.- im ersten Spiel viel wahrscheinlicher ist, als die wegfallenden Fr. 900.- Verlust im zweiten Spiel. Weil aber Fr. 100.- mehr oder weniger verkraftbar ist, während Fr. 900.- mehr oder wenig als einschneidend empfunden wird, ist es nachvollziehbar, weshalb die Mehrheit (möglicherweise aus solchen Worst-Case-Überlegungen) beim ersten Spiel Variante a und beim zweiten Spiel Variante b wählt.

Weil die Aktienkurse an der Börse mal nach oben und mal nach unten gehen, und weil somit die "Durchschnittsperson" an der Börse mal gewinnt und mal verliert, kann man die beiden Spiele zu einem Spiel zusammenfassen. Man spielt immer erst das erste und anschliessend das zweite Spiel. Weil der Erwartungswert beim ersten Spiel ein Gewinn von Fr. 900.- und beim zweiten Spiel ein Verlust von Fr. 900.- ist, hebt sich das gegenseitig auf, und man gewinnt und verliert nichts, wenn man dieses kombinierte Spiel häufig genug spielt. Spielt man es jedoch nur einmal, so gibt das die folgenden Gewinne beziehungsweise Verluste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten:

<p>1a 2a</p> <p><u>100%</u>   <u>100%</u>   0</p>	<p>1a 2b</p> <p><u>100%</u>   <math>\begin{matrix} 90\% &amp; -100 \\ 10\% &amp; +900 \end{matrix}</math></p>
<p>1b 2a</p> <p><math>\begin{matrix} 90\% &amp; \underline{100\%} +100 \\ 10\% &amp; \underline{100\%} -900 \end{matrix}</math></p>	<p>1b 2b</p> <p><math>\begin{matrix} 90\% &amp; 0 \\ 10\% &amp; \begin{matrix} 90\% &amp; +1000 \\ 10\% &amp; -1000 \end{matrix} \\ 10\% &amp; 0 \end{matrix}</math></p>

Betrachtet man das wieder aus dem Blickwinkel, dass Fr. 100.- mehr oder weniger auf dem Konto verkraftbar ist, hingegen Fr. 900.- mehr oder weniger schwerer wiegt, so ist Variante 1a 2b sicher die sinnvollste. Müsste jemand, der sich beim Verlustaversionstest wie die grosse Mehrheit der 80% der Befragten verhalten hat, das zusammengesetzte Spiel einmal mit echten Gewinnen oder Verlusten spielen, so würde er sich vermutlich auch nach dieser rationalen Analyse für die Variante 1a im ersten Spiel und für die Variante 2b im zweiten Spiel entscheiden. Damit nimmt er zwar mit hoher Wahrscheinlichkeit einen Verlust von Fr. 100.- in Kauf, den er aber als verkraftbar betrachtet, hat dafür jedoch eine gewisse Chance einen beachtlichen Betrag zu gewinnen.

## 7 Zusammenfassung

Die ursprüngliche Behauptung in der Werbung, dass das Verhalten der 80% der Befragten nicht rational erklärbar sei, ist also sicher falsch. Deshalb ist es zu begrüßen, dass sie in der später im Internet aufgeschalteten Version der Werbung entfernt worden ist. Dass vorsichtige Menschen lieber einen Verlust von Fr. 100.- als einen Verlust von Fr. 900.- riskieren, ist nachvollziehbar. Den Leuten, die sich für Variante a im ersten und Variante b im zweiten Spiel entschieden haben, kann auf jeden Fall kein irrationales Verhalten wie etwa den Taxifahrern in New York vorgeworfen werden, wenn das Ziel ist, die Gewinne zu maximieren und die Verluste zu minimieren.

Ob das die Verlustaversion zeigt, wie sie in der Prospect Theory definiert ist, und ob die Befragten damit Gewinne und Verluste in gleicher Höhe verschieden stark empfinden, bleibe dahingestellt, geht es hier doch weniger um den wissenschaftlichen Begriff Verlustaversion und mehr um die bankspezifischen Konnotationen “Laien verhalten sich bei Börsengeschäften irrational” und “Laien brauchen deshalb professionelle Beratung”, die eine Notwendigkeit von Bankberatern bei Börsengeschäften nachweisen soll. Damit ist aber nicht gesagt, dass es die Verlustaversion nicht gibt, und dass Laien an der Börse nicht manchmal unbewusst und äusserst unvernünftig um jeden Preis finanzielle Verluste bei Börsengeschäften zu vermeiden suchen und dabei leichtsinnig unnötig grosse Verluste in Kauf nehmen, nur lässt sich das mit dem besprochenen Verlustaversionstest nicht nachweisen.

Welche Rolle Verlustaversion im Alltag spielt, lässt sich also nicht mit einem einzelnen, einfachen Test zeigen. Dass aber unsere Reaktionen auf Zahlen eine psychologische Seite haben, ist sicher, denn sonst würden Geschäfte ihre Ware nicht für Fr. 9.95 oder so anbieten, sondern einfache Preise wie Fr. 10.- bevorzugen, denn auf die fünf Rappen Retourgeld kann wohl jeder gut verzichten.

## Literatur

- [1] Daniel Kahneman und Amos Tversky, *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*, *Econometrica* (Vol. 47, No. 2, pp. 263-292), 1979.
- [2] <https://de.wikipedia.org/wiki/Verlustaversion> (besucht am 27. April 2016).

## Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2B

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

Dies ist die Fortsetzung des Artikels *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2A*, erschienen im VSMP-Bulletin 131, p. 61-69. Abschnitte und Gleichungen aus Teil 2A werden in dieser Fortsetzung mit der entsprechenden Nummer, ergänzt durch den Zusatz “2A”, zitiert.

*Zur Erinnerung:* Ziel dieser Artikel-Reihe ist, etwas über die folgende nach G. Duffing benannte gewöhnliche Differenzialgleichung 2. Ordnung<sup>1</sup> zu erfahren:

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} + \gamma y^3 + 2 \cos(t)] \quad (32), 2A$$

beziehungsweise, wenn man sie als System 1. Ordnung schreibt:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -y_1 + \epsilon [2\nu y_1 - 2\delta y_2 + \gamma y_1^3 + 2 \cos(t)] \end{cases} \quad (33), 2A$$

Die sogenannte *Mittelwert-Methode* (engl. *Method of Averaging*) erlaubt es, das Verhalten der Lösungen des Dgl-Systems (33), 2A – jedenfalls in gewissem Ausmass und für *hinreichend kleine, positive Werte* des Störungsparameters  $\epsilon$  (mehr dazu in Abschnitt 7, 2A) – anhand des sogenannten “*gemittelten Systems*” zu untersuchen. Dieses lautet:

$$\begin{cases} \bar{x}_1' &= -\delta \bar{x}_1 + \nu \bar{x}_2 - \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2' &= -\nu \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2 + \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_1 - 1 \end{cases} \quad (30), 2A$$

Die Herleitung findet sich in den Abschnitten 5, 2A und 6, 2A. Wie schon dort bedeutet  $'$  die Ableitung nach  $\tau$ , wobei  $\tau$  und die Zeit  $t$  durch  $\tau = \epsilon t$  miteinander verknüpft sind, und  $\kappa$  und  $\gamma$  durch  $\kappa = -(3/8)\gamma$ .

Dieser Teil III, 2B ist hauptsächlich der Diskussion des Systems (30), 2A gewidmet. Diese Diskussion ist interessant, auch unabhängig von ihrem Bezug zur Duffing-Gleichung (32), 2A, (33), 2A: Die Diskussion ist charakteristisch für die Untersuchung von sogenannten *ebenen autonomen* Dgl-Systemen. Im Zentrum stehen die Bestimmung der Gleichgewichtslösungen (in Abhängigkeit der Parameter  $\delta, \kappa, \nu$ ) und des Verhaltens der Lösungskurven in deren Nähe, sowie die globalen Eigenschaften des Systems. Dazu werden “analytische” Überlegungen und Numerische Verfahren, insbesondere die Nutzung eines numerischen ODE-Solvers kombiniert.

<sup>1</sup>Mechanisch interpretiert handelt es sich um einen nichtlinearen, gedämpften Schwinger mit einer äusseren periodischen Anregung. Dabei ist  $\gamma$  ein Mass für die Stärke des nichtlinearen Anteils in der Rückstellkraft (pro Masseneinheit):  $(1 - \epsilon 2\nu)y - \epsilon \gamma y^3$ . Für die Bedeutung von  $\nu$  siehe Abschnitt 3 unten.  $\delta > 0$  ist ein Mass für die Stärke der Dämpfungskraft (pro Masseneinheit):  $\epsilon 2\delta \dot{y}$ . Die  $2\pi$ -periodische Anregung ist mit  $\epsilon 2 \cos(t)$  angesetzt. Der sogenannte Störparameter  $\epsilon$  wird als klein und positiv gedacht. Er sorgt dafür, dass Nichtlinearität, Dämpfung und die Amplitude der äusseren Anregung *klein* sind, sodass die Duffing-Gleichung (in dieser Form) als eine “*Störung*” des einfachen *harmonischen Oszillators*  $\ddot{y} + y = 0$  aufgefasst werden kann. Das ermöglicht die Anwendung von *Methoden der Störungsrechnung*.

## 1

Beginnen wir mit der Beantwortung der Frage (B) aus Abschnitt 6, 2A, also der Frage nach dem Vorteil des gemittelten Systems im Vergleich zum Ausgangssystem, also (29), 2A versus (27), 2A (oder auch (38), 2A versus (36), 2A) beziehungsweise für den Fall der Duffing-Gleichung: (30), 2A versus (32), 2A oder (33), 2A. Man kann zunächst ohne Bezug zum Beispiel Duffing-Gleichung folgendes vermerken.

Das Ausgangssystem (27), 2A, bzw. (36), 2A, i.e.  $\dot{x} = \epsilon q(t, x)$  ist ein sogenanntes *nicht-autonomes* Dgl-System, denn die rechte Seite hängt nicht nur von der Variablen  $x$  ab, sondern überdies auch von der Variablen  $t$ . Im Gegensatz dazu ist das gemittelte System (29), 2A (bzw. (38), 2A), i.e.  $\dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{q}(\bar{x})$  *autonom*, weil die rechte Seite von  $\bar{x}$  abhängt, nicht jedoch von  $t$ , wobei bei dieser Unterscheidung  $x$ , bzw.  $\bar{x}$  und  $t$  als voneinander unabhängig angesehen werden.

Dieser Unterschied zwischen den beiden Systemen bedeutet, dass das ursprüngliche, nicht-autonome System *eine Dimension mehr*<sup>2</sup> aufweist. Vielleicht denken Sie: Auf eine Dimension mehr oder weniger kommt es doch wohl nicht an?! Das ist aber (leider!) nicht wahr. Das wird am Beispiel der Duffing-Gleichung überaus deutlich werden.

Blieben wir noch einen Moment im allgemeinen Kontext von Abschnitt 6, 2A oder Abschnitt 7, 2A. Für das gemittelte System (29), 2A, bzw. (38), 2A kann man, anstelle der Zeit  $t$ , als neue unabhängige Variable die “skalierte Zeit”

$$\tau = \epsilon t \quad (1)$$

einführen, wie das schon beim gemittelten System (30), 2A zur Duffing-Gleichung gemacht wurde. Dann geht (29), 2A bzw. (38), 2A über in

$$\bar{x}' = \bar{q}(\bar{x}) \quad (2)$$

Dabei bezeichnet der Akzent ' die Ableitung nach  $\tau$ . Da ein gemitteltes System autonom ist, verschwindet bei Einführung von  $\tau$  anstelle von  $t$  der kleine Parameter  $\epsilon$  aus Akten und Traktanden, wie (2) zeigt. Das hat einen höchst willkommenen Effekt: Wenn man eine Lösung von (2) auf einem  $\tau$ -Intervall  $[0, L]$  kennt, bedeutet das, dass man die entsprechende Lösung<sup>3</sup> von (29), 2A, bzw. (38), 2A für  $t$  auf dem “expandierenden”<sup>4</sup> Zeitintervall  $[0, \frac{L}{\epsilon}]$  kennt. Um (jedenfalls näherungsweise) etwas über die Lösungen von (2) zu erfahren bietet es sich an, (2) mit einem numerischen ODE-Solver zu untersuchen: Das ist, wie man sieht, sehr viel effizienter als numerische Verfahren auf die ursprüngliche Gleichung (27), 2A, bzw. (36), 2A anzuwenden: Die  $2\pi$ -periodische Abhängigkeit der rechten Seite  $q(t, x)$  von  $t$  zwingt zu einer (vergleichsweise) kleinen Schrittwahl bei der Anwendung von ODE-Solvern.

Nun zur *Duffing-Gleichung*. Sowohl die Duffing-Gleichung (33), 2A, als auch die zu ihr gehörige gemittelte Gleichung (30), 2A sind 2-dimensionale<sup>5</sup> Systeme, denn es handelt sich jeweils um zwei (gekoppelte) Dgl 1. Ordnung. Aber (33), 2A ist, im Unterschied und Gegensatz zu (30), 2A, nicht-autonom.

Zwischen ebenen autonomen und ebenen nicht-autonomen Dgl-Systemen liegen Welten! Während man über das Verhalten der Lösungen von ebenen autonomen Dgl-Systemen recht gut Bescheid weiss (weil es

<sup>2</sup>Indem man zu (27), 2A bzw. (36), 2A die (triviale) Differentialgleichung  $t' = 1$  hinzufügt, also (27), 2A bzw. (36), 2A durch das System

$$\begin{cases} t' &= 1 \\ \dot{x} &= \epsilon q(t, x) \end{cases}$$

ersetzt, macht man (27), 2A bzw. (36), 2A formal zu einem autonomen System, um den Preis, dass die Dimension um 1 grösser wird.

<sup>3</sup>Man erhält sie, indem man den Übergang von  $t$  nach  $\tau$  rückgängig macht, also  $\tau$  durch  $\epsilon t$  ersetzt.

<sup>4</sup>Man spricht von *expandierend* weil die Länge des Zeitintervalls  $[0, \frac{L}{\epsilon}]$  mit *abnehmendem*  $\epsilon$  *anwächst*.

<sup>5</sup>Man sagt auch *ebene* Dgl-Systeme.

vergleichsweise einfach ist), ist sehr viel weniger über das Verhalten der Lösungen von nicht-autonomen ebenen Dgl-Systemen bekannt. Aus gutem Grund: Dieses kann sehr komplex sein. Zum Beispiel ist sogenanntes "chaotisches Verhalten" möglich, und zwar selbst wenn die  $t$ -Abhängigkeit so einfach wie möglich, nämlich periodisch mit fester Periode, ist.

Ebenen autonomen Dgl-Systemen sind wir im Rahmen dieser Artikel-Reihe schon im Teil "Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol" begegnet (VSMP-Bulletin 129, p. 10-19). Ich bitte sich dort Teil 5 in Erinnerung zu rufen, insbesondere die Begriffe *Phasenebene*, *Phasenkurve* (auch *Orbit* oder *Lösungskurve* genannt), *Phasenportrait*, usw.

Einer der grossen Vorteile von ebenen autonomen Dgl-Systemen ist, dass die *Gleichgewichtslösungen* und die *periodischen Lösungen* typischerweise ihre gesamte Geometrie und Dynamik bestimmen. Im Phasenportrait erscheint eine periodische Lösung als *geschlossene Kurve*, weil die Phasenkurve einer periodischen Lösung eine geschlossene Kurve ist. Eine Gleichgewichtslösung erscheint im Phasenportrait als *Punkt*, weil die Phasenkurve einer Gleichgewichtslösung ein Punkt ist.

Für das gemittelte System (30), 2A zur Duffing-Gleichung (32), 2A bzw. (33), 2A kann man unter der Voraussetzung

$$\delta > 0 \quad (3)$$

*periodische Lösungen* und damit *geschlossene Kurven* im Phasenportrait mit Hilfe des *Satzes von Gauss* über (ebene) Vektorfelder *ausschliessen*.

Zur Erinnerung: Der Term  $-2\epsilon\delta\dot{y}$  in der Duffing-Gleichung (32), 2A sorgt unter der Bedingung (3) (und weil grundsätzlich  $\epsilon > 0$  vorausgesetzt wird) für das Vorhandensein von *Dämpfung* im Duffing-schen Schwinger und somit, wie die obige Bemerkung zeigt, dafür, dass im gemittelten System (30), 2A keine periodischen Lösungen auftreten.

## 2

Also sind die *Gleichgewichtslösungen* von (30), 2A von ausschlaggebender Bedeutung. Die Gleichgewichtslösungen von (30), 2A sind, siehe Abschnitt 7, 2A, die *Nullstellen* der rechten Seite von (30), 2A, also Zahlenpaare  $X_1, X_2$ , die das (algebraische) Gleichungssystem

$$\begin{cases} -\delta X_1 + \nu X_2 - \kappa (X_1^2 + X_2^2) X_2 & = 0 \\ -\nu X_1 - \delta X_2 + \kappa (X_1^2 + X_2^2) X_1 - 1 & = 0 \end{cases} \quad (4)$$

erfüllen. Etwas Umformung liefert folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \nu &= \kappa A \pm \sqrt{\frac{1}{A} - \delta^2} =: \nu_{\pm}(A) \quad \text{mit } A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \\ X_1 &= -\nu A + \kappa A^2 \\ X_2 &= -\delta A \end{aligned} \quad (5)$$

mit der Abkürzung

$$A = X_1^2 + X_2^2 \quad (6)$$

Ableiten der Funktionen  $\nu_{\pm}(A)$  nach  $A$  liefert:

$$\nu_{\pm}'(A) = \kappa \mp \frac{1}{2A^2 \sqrt{\frac{1}{A} - \delta^2}} \quad \text{mit } A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \quad (7)$$

Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, schlage ich vor vorauszusetzen, dass

$$\kappa > 0 \tag{8}$$

gilt. Was bedeutet das?

Aus der Duffing-Gleichung (32), 2A liest man die einwirkende *Rückstellkraft* (pro Masseneinheit) ab<sup>6</sup>

$$(1 - \epsilon 2\nu)y + \epsilon \frac{8}{3} \kappa y^3 \tag{9}$$

Dabei wurde (31), 2A (also  $\kappa = -(3/8)\gamma$ ) berücksichtigt. Nun kann man die Bedingung (8) interpretieren. Bei positivem  $\kappa$  ist die als Feder interpretierte Rückstellkraft (9) *superlinear*. Das heisst: Im Vergleich zur, durch den linearen Term in (9) gegebenen, linearen (“Hookeschen”) Feder ist die durch (9) definierte nichtlineare Feder etwas *härter*<sup>7</sup>.

Wie sich zeigen wird hat die Nichtlinearität  $\epsilon \frac{8}{3} \kappa y^3$  bedeutenden Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Duffing-Schwingers.

Zurück zu den *Gleichgewichtslösungen*, i.e. zum algebraischen Gleichungssystem (4) und damit zu den Formeln (5) und vorallem zu den Funktionen  $\nu_{\pm}(A)$ . Aus (7) folgt:

$$\nu_{-}(A) \text{ ist auf } (0, \frac{1}{\delta^2}) \text{ monoton wachsend} \tag{10}$$

Zur Analyse des Graphs von  $\nu_{+}(A)$  untersucht man, ob  $\nu_{+}'(A)$  Nullstellen hat. Wegen

$$\nu_{+}'(A) = 0 \iff \kappa^2 = \frac{1}{4A^3 - 4\delta^2 A^4}$$

betrachtet man den Graph der *Hilfsfunktion*

$$\frac{1}{4A^3 - 4\delta^2 A^4} \quad \text{für } A \in (0, \frac{1}{\delta^2})$$

Er hat bei  $A = 0$  und  $A = \frac{1}{\delta^2}$  je einen Pol; überdies ist er

$$\begin{aligned} &\text{in } (0, \frac{3}{4\delta^2}) \text{ monoton fallend} \\ &\text{in } (\frac{3}{4\delta^2}, \frac{1}{\delta^2}) \text{ monoton wachsend} \end{aligned}$$

und sein Tiefpunkt ist durch

$$(\frac{3}{4\delta^2}, \frac{64}{27} \delta^6)$$

gegeben. Das hat folgende Konsequenzen für  $\nu_{+}(A)$ , man beachte (7):

$$\begin{aligned} \kappa^2 < \frac{64}{27} \delta^6 &\implies \nu_{+}(A) \text{ ist auf } (0, \frac{1}{\delta^2}) \text{ monoton fallend} \\ \kappa^2 > \frac{64}{27} \delta^6 &\implies \nu_{+}'(A) \text{ hat in } (0, \frac{1}{\delta^2}) \text{ zwei Nullstellen } A_1, A_2 \end{aligned} \tag{11}$$

Somit gilt unter der Voraussetzung  $\kappa^2 > \frac{64}{27} \delta^6$ , man beachte wieder (7):

$$\nu_{+}(A) \text{ ist } \begin{cases} \text{monoton fallend auf } (0, A_1) \\ \text{monoton wachsend auf } (A_1, A_2) \\ \text{monoton fallend auf } (A_2, \frac{1}{\delta^2}) \end{cases} \tag{12}$$

<sup>6</sup>Siehe auch Fussnote 1.

<sup>7</sup>Die nichtlineare Feder erfordert eine etwas grössere Kraft, um eine gewisse Auslenkung  $y$  zu erreichen als die lineare Feder.

Das *Kriterium* in (11) setzt den Parameter  $\kappa$  für die *Nichtlinearität* in der *Rückstellkraft* zum Parameter  $\delta$  der *Dämpfung* in Beziehung: Massgebend dafür, welcher der beiden Fälle in (11) vorliegt ist, ob  $\kappa$  unterhalb oder oberhalb eines gewissen *Schwellwerts*  $\kappa_{krit}$  liegt, der wegen  $\kappa_{krit} := \frac{8}{3\sqrt{3}} \delta^3$  durch die Stärke  $\delta$  der Dämpfung definiert ist.

Abbildung 1 a), b) illustriert den *ersten Fall* in (11) und zwar im Extremfall  $\kappa = 0$ , also wenn die Nichtlinearität “ausgeschaltet” und die Rückstellkraft linear ist.

Abbildung 1 b) entsteht aus Abbildung 1 a) durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten in Abbildung 1 a). Man spricht beim Bild 1 b) vom

*Bifurkationsdiagramm*

Um die Gleichgewichtslösungen des gemittelten Systems (30), 2A zu bestimmen, muss man gemäss (5) die Grösse  $A$  (im Prinzip) aus den beiden Gleichungen

$$\nu_{\pm}(A) = \nu, \quad A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \tag{13}$$

ermitteln (um dann  $X_1, X_2$  aus den beiden weiteren Gleichungen von (5) zu bestimmen). Dabei ist das Bifurkationsdiagramm nützlich: Es verschafft Überblick, wie sich zeigen wird.

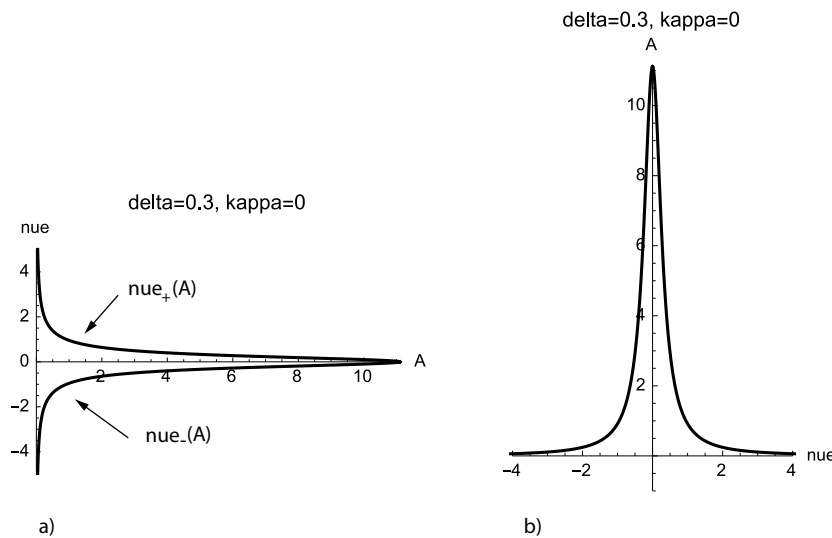


Abbildung 1: a): Die Graphen der Funktionen  $\nu_{\pm}(\cdot)$  b): Das Bifurkationsdiagramm der Duffing-Gleichung im Fall verschwindender Nichtlinearität

### 3

Die Vorstellung ist, dass die Parameter, also  $\delta, \gamma$  (bzw.  $\kappa = -(3/8)\gamma$ ) und  $\nu$  gewählt sind. Allerdings ist es *interessant* die Rolle von  $\delta, \kappa$  und diejenige von  $\nu$  zu unterscheiden:  $\delta, \kappa$  denke man sich *fest* gewählt. Hingegen sollen *unterschiedliche Werte* für  $\nu$  ins Auge gefasst werden.

Warum das? Was ist die Bedeutung?

Die äussere Anregung des Duffing-Schwingers (32), 2A, also der Term  $\epsilon 2 \cos(t)$  ist periodisch mit Periode  $2\pi$ . (32), 2A ist, für  $\epsilon$  positiv und klein, ein gestörter harmonischer Oszillator. Der ungestörte harmonische Oszillator hat die Gleichung

$$\ddot{y} + y = 0 \tag{14}$$

und damit die Lösungen  $y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ . Alle Lösungen von (14) sind periodisch und zwar *ebenfalls* mit Periode  $2\pi$ .

Statt in der Form (32), 2A kann man die Duffing-Gleichung auch wie folgt schreiben

$$\ddot{y} + (1 - \epsilon 2\nu)y = \epsilon [-2\delta \dot{y} + \gamma y^3 + 2 \cos(t)] \quad (15)$$

In der Darstellung (15) sind die beiden linearen Terme in  $y$  also zusammengefasst. In dieser Darstellung sieht man, dass der *eigentlich* zu Grunde liegende harmonische Oszillator nicht durch die Gleichung (14) gegeben ist, sondern durch

$$\ddot{y} + (1 - \epsilon 2\nu)y = 0 \quad (16)$$

Die Lösungen von (16) lauten nun aber

$$y(t) = c_1 \cos(\sqrt{1 - \epsilon 2\nu}t) + c_2 \sin(\sqrt{1 - \epsilon 2\nu}t)$$

und haben die Periode

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon 2\nu}} \quad (17)$$

(17) ist nur für  $\nu = 0$  gleich  $2\pi$ . Die *Pointe*: Der “ $\nu$ -Term” in der Duffing-Gleichung (32), 2A (oder (15)) erlaubt *die Wirkung einer (kleinen) Verstimmung zwischen der Frequenz der äusseren Anregung und der sogenannten Eigenfrequenz des Schwingers* zu untersuchen. Es wird sich zeigen, dass das Verhalten der Lösungen der Duffing-Gleichung in interessanter Weise vom Parameter  $\nu$  abhängt.

## 4

Doch zurück zu den Gleichungen (13)

$$\nu_{\pm}(A) = \nu, \quad A \in (0, \frac{1}{\delta^2}) \quad (18)$$

Im Fall von Abbildung 1 (also wenn  $\delta = 0.3$  und  $\kappa = 0$  gesetzt ist) liest man aus dem Bifurkationsdiagramm in Teil b) ab, dass (13), bzw. (18) für *jede Wahl* von  $\nu$  *genau eine Lösung* hat, die durch

$$A = \frac{1}{\nu^2 + \delta^2} \quad (19)$$

gegeben ist, wie eine leichte Rechnung ergibt. Offenbar ist  $A$  für  $\nu = 0$  maximal und gleich  $\frac{1}{\delta^2}$ .

(Bemerkung: Modulo Modifikationen in den Bezeichnungen und Normierungen entspricht dieses Szenarium demjenigen in “*Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing, Teil 1*”, erschienen im VSMP-Bulletin 130, p. 24-31, siehe dort Abbildung 3. Wenn also der Parameter  $\kappa$  der Nichtlinearität unterhalb des Schwellwerts  $\kappa_{krit}$  liegt, macht sich die Nichtlinearität jedenfalls *qualitativ nicht* bemerkbar.)

Viel interessanter ist der *zweite Fall* in (11), wenn  $\kappa$  oberhalb von  $\kappa_{krit}$  liegt, wenn also

$$\kappa^2 > \frac{64}{27}\delta^6 \quad (20)$$

gilt, mit anderen Worten: wenn die *Nichtlinearität* der Rückstellkraft *mehr Einfluss* hat (gemessen an der Wirkung der Dämpfung).

Abbildung 2 illustriert dieses Szenarium und zwar bei der Wahl  $\delta = 0.3$  und  $\kappa = 1$ . Dann gilt nämlich

$$\kappa^2 = 1 > \frac{64}{27}\delta^6 = 0.001728$$

Abbildung 2 a) zeigt die Graphen von  $\nu_-(A)$  und  $\nu_+(A)$  im Überblick. Abbildung 2 b) ist ein Zoom von dem Bereich, in dem die beiden Graphen zusammen kommen und zeigt, dass dort nicht etwa eine "Spitze" vorliegt, dass dieser Übergang vielmehr vollkommen glatt verläuft.

Die beiden Abbildungen illustrieren die Aussagen in (11) und (12). Insbesondere sieht man, dass der Graph von  $\nu_+(A)$  links vom Punkt  $P_1 = (A_1, \nu_+(A_1))$  monoton fallend, zwischen  $P_1$  und  $P_2 = (A_2, \nu_+(A_2))$  monoton wachsend, und dann nochmals auf einem, allerdings sehr kleinen, Stück monoton fallend ist.

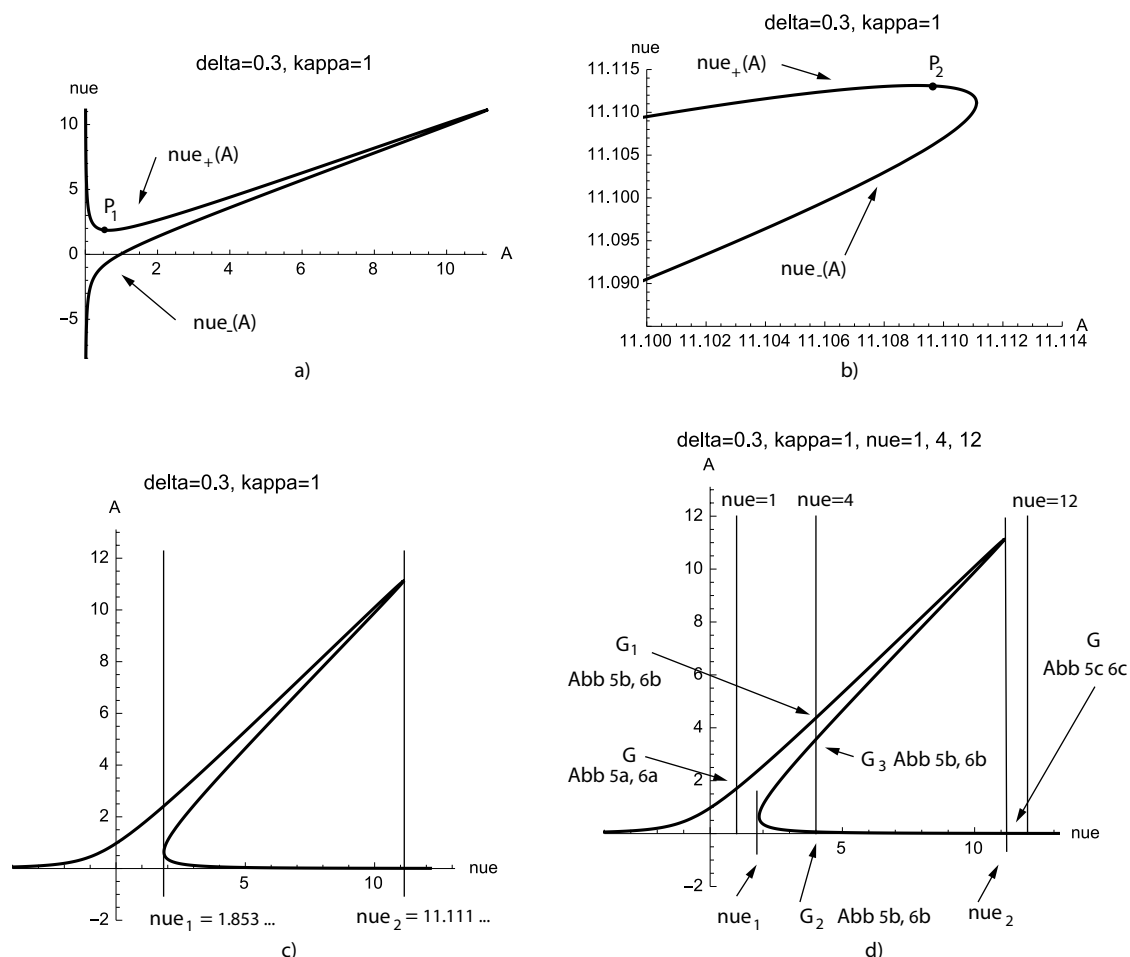


Abbildung 2: a): Die Graphen der Funktionen  $\nu_{\pm}(\cdot)$  b): Zoom des Diagramms aus a) c): Bifurkationsdiagramm der Duffing-Gleichung im Fall  $\kappa^2 > \frac{64}{27}\delta^6$  d): Wie c) mit zusätzlichen Angaben

Das Bifurkationsdiagramm in Abbildung 2 c) und d) ist durch Spiegelung der Graphen in Abbildung 2 a) an der dortigen Winkelhalbierenden durch den ersten und dritten Quadranten entstanden. Ihm entnimmt man folgende interessante Information über die Lösungen der Gleichungen (18), (19), bzw.

$$\nu_{\pm}(A) = \nu, \quad A \in \left(0, \frac{1}{\delta^2}\right) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \nu < \nu_1 &\implies (21) \text{ hat 1 Lösung} &\implies (30), 2A \text{ hat 1 Gleichgewichtslösung} \\ \nu_1 < \nu < \nu_2 &\implies (21) \text{ hat 3 Lösungen} &\implies (30), 2A \text{ hat 3 Gleichgewichtslösungen} \\ \nu_2 < \nu &\implies (21) \text{ hat 1 Lösung} &\implies (30), 2A \text{ hat 1 Gleichgewichtslösung} \end{aligned} \tag{22}$$

Es sei weiterhin  $\delta = 0.3, \kappa = 1$  gesetzt. Für  $\nu$  wähle ich nacheinander, siehe Abbildung 2 d):

$$\nu = 1, \quad \nu = 4, \quad \nu = 12 \tag{23}$$

Die zugehörigen Gleichgewichte lassen sich mit Hilfe der Formeln (5) unschwer berechnen. Man findet:

Für  $\nu = 1$  :

$$A = 1.704 \dots \quad X_1 = 1.201 \dots \quad X_2 = -0.511 \dots \quad (24)$$

Darstellung siehe Abbildung 3 a)

Für  $\nu = 4$  :

$$\begin{aligned} A = 0.0641 \dots \quad X_1 = -0.252 \dots \quad X_2 = -0.0192 \dots \\ A = 3.563 \dots \quad X_1 = -1.555 \dots \quad X_2 = -1.069 \dots \\ A = 4.372 \dots \quad X_1 = 1.628 \dots \quad X_2 = -1.311 \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Darstellung siehe Abbildung 3 b)

Für  $\nu = 12$  :

$$A = 0.0069 \dots \quad X_1 = -0.0833 \dots \quad X_2 = -0.000208 \dots \quad (26)$$

Darstellung siehe Abbildung 3 c)

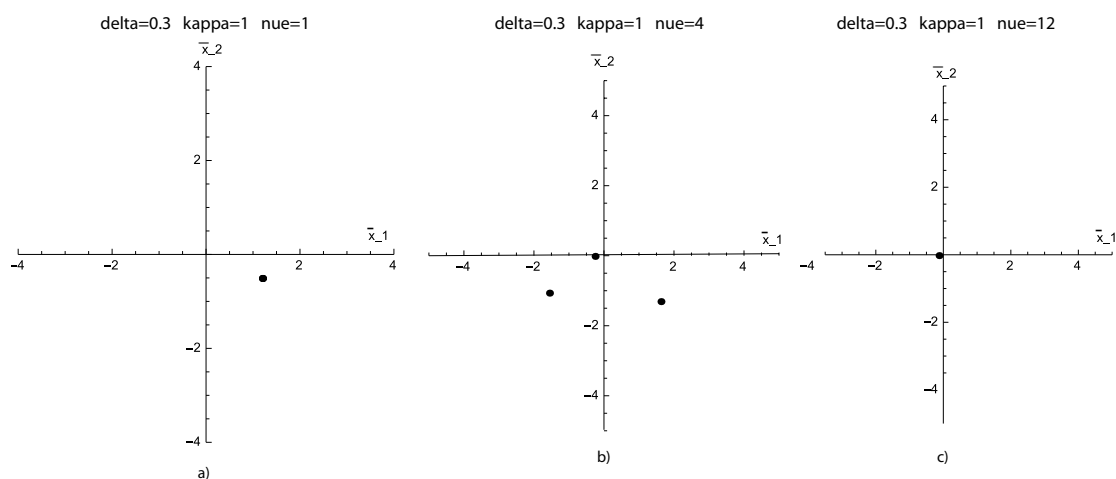


Abbildung 3: Lage der Gleichgewichtspunkte des gemittelten Systems (30), 2A in der  $\bar{x}_1$ - $\bar{x}_2$ -Ebene für drei verschiedene  $\nu$ -Werte, wobei  $\kappa > \kappa_{krit}$  gilt

## 5

Wenn man die Gleichgewichte eines (ebenen) autonomen Dgl-Systems bestimmt hat, möchte man als nächstes etwas über das Verhalten der Lösungskurven in deren Nähe erfahren. Dafür gibt es ein probates und systematisches Vorgehen. Das Stichwort heisst

### *Linearisierung*

Ausgehend von einem ebenen autonomen System, das ich hier wie folgt schreiben will

$$\begin{cases} \bar{x}_1' = f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ \bar{x}_2' = f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{cases} \quad (27)$$

und einer ihrer Gleichgewichtslösungen<sup>8</sup>  $X_1, X_2$ , führt man die Translation

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = X_1 + z_1 \\ \bar{x}_2 = X_2 + z_2 \end{cases} \quad (28)$$

<sup>8</sup>Es gilt also  $f_1(X_1, X_2) = 0, f_2(X_1, X_2) = 0$ .

durch. Die Umrechnung von den (alten) Variablen  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  auf die (neuen) Variablen  $z_1, z_2$  ist einfach: Da  $X_1, X_2$  Zahlen, also für die Ableitung nach der unabhängigen Variablen, hier mit  $\tau$  bezeichnet, Konstanten sind, folgt  $\bar{x}_1' = (X_1 + z_1)' = z_1'$ , etc. und somit

$$\begin{cases} z_1' &= f_1(X_1 + z_1, X_2 + z_2) \\ z_2' &= f_2(X_1 + z_1, X_2 + z_2) \end{cases} \quad (29)$$

Wenn man sich auf eine *kleine Umgebung* des Gleichgewichts  $(X_1, X_2)$  einschränkt, sind  $z_1, z_2$  *kleine* Größen. Deshalb entwickelt man  $f_1(X_1 + z_1, X_2 + z_2)$  und  $f_2(X_1 + z_1, X_2 + z_2)$  gemäss der Taylor-Formel (für zwei Variable) nach  $z_1, z_2$ :

$$f_1(X_1 + z_1, X_2 + z_2) = f_1(X_1, X_2) + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}_1}(X_1, X_2)z_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}_2}(X_1, X_2)z_2 + \dots \quad (30)$$

und mutatis mutandis für  $f_2(X_1 + z_1, X_2 + z_2)$ . Berücksichtigt man, dass nach Voraussetzung  $X_1, X_2$  eine Gleichgewichtslösung von (27) ist, siehe dazu Fussnote 8, und bricht in der Entwicklung (30) nach den linearen Termen ab, erhält man das *um das Gleichgewicht  $(X_1, X_2)$  linearisierte System*:

$$\begin{cases} z_1' &= A_{11}z_1 + A_{12}z_2 \\ z_2' &= A_{21}z_1 + A_{22}z_2 \end{cases} \quad (31)$$

mit

$$A_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial \bar{x}_j}(X_1, X_2) \quad (32)$$

In der *Differenzialgleichungslehre* beweist man, dass die Lösungskurven von (31) in der Nähe des Nullpunkts (der Gleichgewicht für das Dgl-System (31) ist) und die Lösungskurven von (27) in der Nähe des Gleichgewichts  $(X_1, X_2)$  "ganz analog verlaufen", man sagt: *qualitativ gleich* sind, falls folgende Voraussetzung erfüllt ist:

$$\text{Die Matrix } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ ist } \textit{hyperbolisch} \quad (33)$$

Eine Matrix wird *hyperbolisch* genannt, wenn *keiner* ihrer *Eigenwerte* auf der *imaginären Achse* liegt. Anders formuliert: Keiner ihrer Eigenwerte hat Realteil 0.

Es bezeichne  $A$  eine (reelle)  $2 \times 2$ -Matrix und  $\lambda_1, \lambda_2$  ihre Eigenwerte. Dann ist

$$P_2(\lambda) := (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - s\lambda + d \text{ mit } s = \lambda_1 + \lambda_2, d = \lambda_1\lambda_2 \quad (34)$$

das *charakteristische Polynom* von  $A$ . Mit  $s, d$  ausgedrückt sind die Eigenwerte durch

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2 - 4d}) \quad (35)$$

gegeben. Wie die Phasenportraits eines ebenen linearen Dgl-Systems mit konstanten Koeffizienten, also eines Dgl-System des Typs (31) von  $s$  (der Spur der Matrix  $A$ ) und  $d$  (der Determinante von  $A$ ) abhängen, zeigt das Diagramm in Abbildung 4.

In unserem Beispiel, siehe (24)-(26), findet man folgende Eigenwerte und die angegebene Interpretation für das jeweilige (lokale) Phasenportrait:

Für  $\nu = 1$  :

$$\lambda_{1,2} = -0.3 \pm 1.702 \dots \cdot i \implies \text{einlaufende Spirale} \quad (36)$$

Für  $\nu = 4$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -0.3 \pm 3.871 \dots \cdot i && \implies \text{einlaufende Spirale} \\ \lambda_1 &= -2.0090 \dots, \lambda_2 = 1.4090 \dots && \implies \text{Sattelpunkt} \\ \lambda_{1,2} &= -0.3 \pm 1.842 \dots \cdot i && \implies \text{einlaufende Spirale} \end{aligned} \quad (37)$$

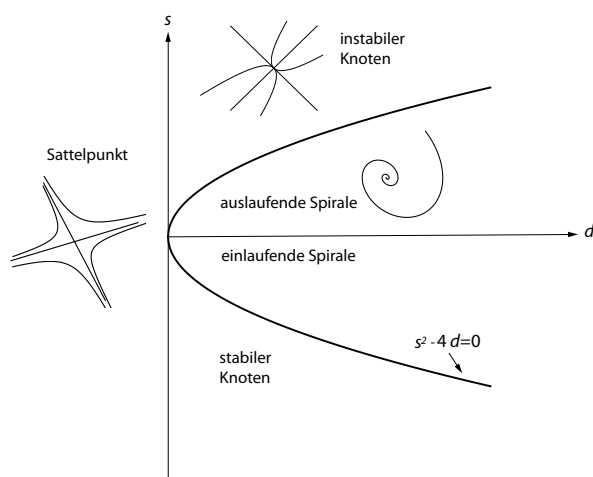


Abbildung 4: Phasenportrait eines ebenen linearen Systems mit konstanten Koeffizienten in Abhängigkeit von Spur  $s$  und Determinante  $d$  des charakteristischen Polynoms der Koeffizientenmatrix, siehe (31)-(35)

Für  $\nu = 12$  :

$$\lambda_{1,2} = -0.3 \pm 11.986 \dots \cdot i \implies \text{einlaufende Spirale} \quad (38)$$

In den Abbildungen 5 a)-c) sind die *lokalen* Phasenportraits zum Dgl-System (30), 2A, angedeutet.

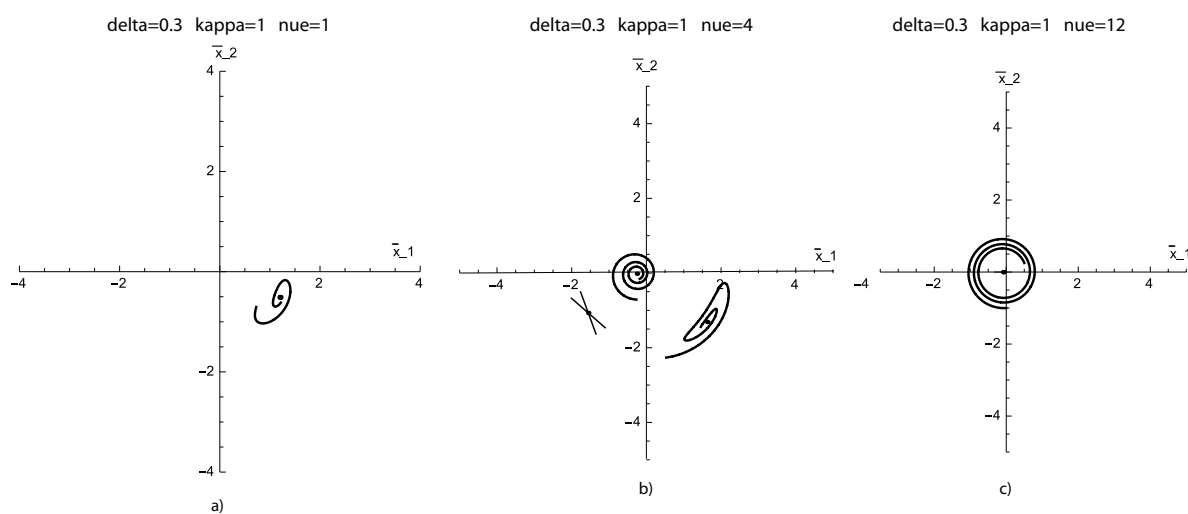


Abbildung 5: Wie Abbildung 3, zusätzlich angedeutet lokales Phasenportrait in der Nähe der jeweiligen Gleichgewichtspunkte

## 6

Einer der grossen Vorteile eines ebenen (also zweidimensionalen) autonomen Dgl-Systems ist, dass man sich mit Hilfe eines *numerischen ODE-Solvers* meist recht leicht *ein (zuverlässiges) Bild des globalen Phasenportrait* machen kann. In der Regel genügt die (approximative) Bestimmung einiger weniger, geeignet ausgewählter Phasenkurven.

Die Resultate für unser Beispiel ( $\delta = 0.3, \kappa = 1, \nu = 1, 4, 12$ ) zeigen die Abbildungen 6 a)-c).

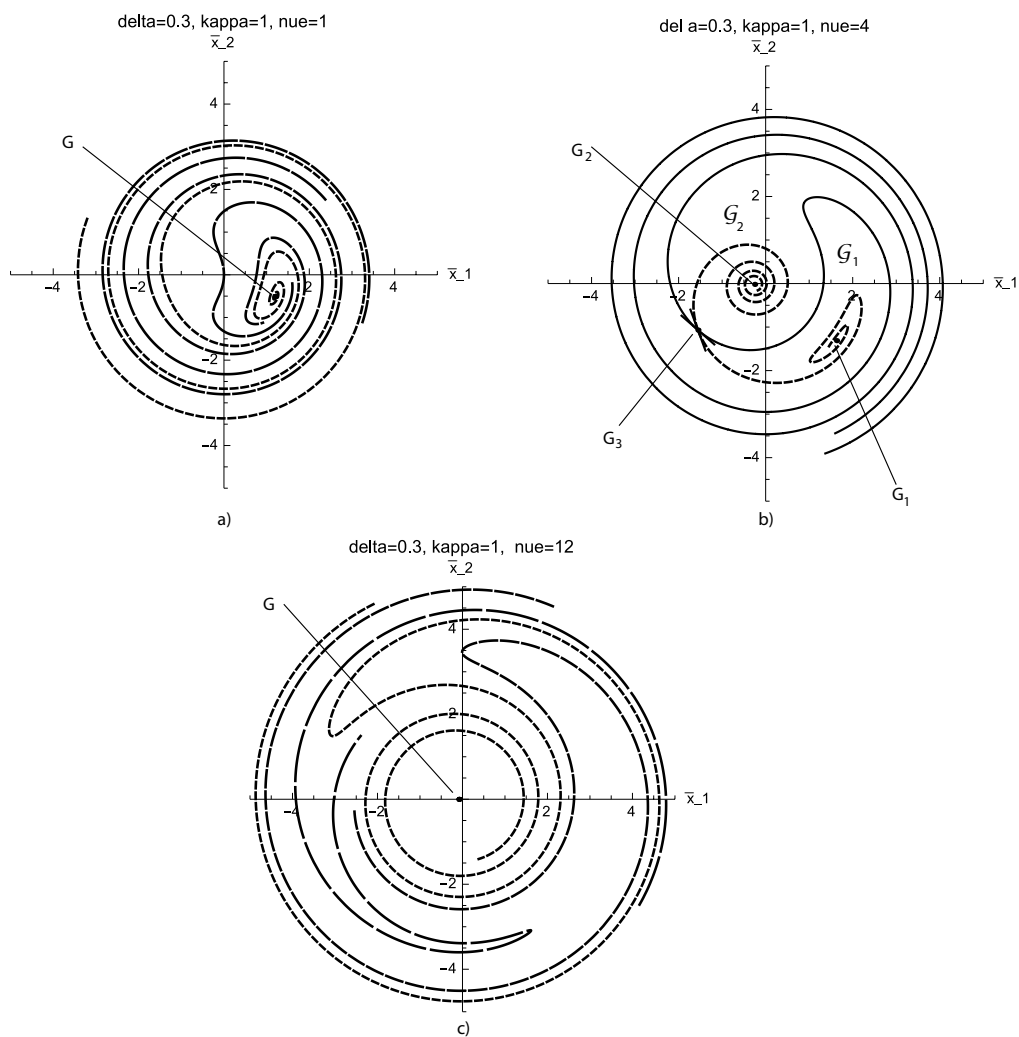


Abbildung 6: Wie die Abbildungen 3 und 5, zusätzlich grössere Ausschnitte von ausgewählten Phasenkurven, sodass das jeweilige (mutmassliche) globale Phasenportrait erkennbar ist

In den beiden Fällen mit nur je einem Gleichgewicht (also für  $\nu = 1$  und  $\nu = 12$ , Abbildungen 6 a), 6 c)) streben offenbar alle Lösungen für  $\tau \rightarrow \infty$  gegen die jeweilige Gleichgewichtslösung, die Gleichgewichtslösung ist dann ein "globaler Attraktor", wie man sagt.

Im Fall  $\nu = 4$  mit drei Gleichgewichten zeigt sich folgendes Bild. Es gibt zwei Lösungen, die für  $\tau \rightarrow \infty$  (ausgezogen gezeichnet) und zwei Lösungen, die für  $\tau \rightarrow -\infty$  (gestrichelt gezeichnet) gegen das Sattelpunkt-Gleichgewicht<sup>9</sup>  $G_3$  streben. Die zwei Lösungskurven, die zu den beiden Lösungen gehören die für  $\tau \rightarrow \infty$  gegen  $G_3$  streben unterteilen die  $\bar{x}_1$ - $\bar{x}_2$ -Ebene in zwei Gebiete  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ . Diese Gebiete liegen spiralförmig ineinander und enthalten je eines der beiden anderen der drei Gleichgewichte:  $\mathcal{G}_1$  enthält das Gleichgewicht  $G_1$ ,  $\mathcal{G}_2$  enthält  $G_2$ . Phasenkurven mit Anfangs- (Start-)punkt im einen der beiden Gebiete laufen (vorwärts, also im Sinne zunehmender  $\tau$ -Werte) in Richtung des entsprechenden Gleichgewichts und spiralen auf dieses zu. Damit haben wir vollen Überblick über das qualitative Verhalten der Lösungen des gemittelten Systems (30), 2A (im betrachteten Fall, der allerdings typisch ist) gewonnen. Was folgt für die Duffing-Gleichung (32), 2A?

<sup>9</sup>Für seine Koordinaten siehe die mittlere der Angaben in (25), sowie die mittlere der Aussagen in (37).

## 7

Wie man sich erinnert (siehe Abschnitt 7, 2A) *generieren nicht-ausgeartete Gleichgewichte des gemittelten Systems* (30), 2A (und um solche handelt es sich bei (24)-(26), wie aus (36)-(38) folgt)

*2 $\pi$ -periodische Lösungen der Duffing-Gleichung* (33), 2A

Das gilt insbesondere für alle Gleichgewichte vom Typ “einlaufende Spirale”, siehe (36)-(38) im Verein mit (24) - (26).

Überdies kann man für das Verhalten der übrigen Lösungen der Duffing-Gleichung (33), 2A folgendes beweisen (man vergleiche mit Abschnitt 7, 2A):

$\nu = 1$  oder  $\nu = 12$

Für jede Lösung gilt: Sie strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen die  $2\pi$ -periodische Lösung, sofern  $\epsilon > 0$ , genügend klein gewählt ist.

$\nu = 4$

Für jede Lösung mit Anfangspunkt in  $\mathcal{G}_1$  bzw.  $\mathcal{G}_2$  gilt *mutatis mutandis* dasselbe, das heisst sie strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen die vom entsprechenden Gleichgewicht  $G_1$  bzw.  $G_2$  generierte  $2\pi$ -periodische Lösung, vorausgesetzt  $\epsilon > 0$  ist genügend klein gewählt.

Das sind Aussagen mit Geltungsbereich über das (unendlich lange) Zeitintervall  $[0, \infty)$ . Jedoch hängt es von der jeweils betrachteten Lösung ab, wie klein  $\epsilon$  (mindestens) gewählt werden muss. In dieser Hinsicht erfüllen diese Aussagen die Wunschvorstellungen aus Abschnitt 3, 2A nicht.

Wählt man hingegen in  $\mathcal{G}_1$  bzw. in  $\mathcal{G}_2$  *kompakte* Teilmengen  $\mathcal{K}_1$  bzw.  $\mathcal{K}_2$ , so existiert ein  $\epsilon_0 > 0$ , sodass für *alle*  $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$  und *jede* Lösung mit Anfangspunkt in  $\mathcal{K}_1$  bzw.  $\mathcal{K}_2$  gilt: Sie strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen die entsprechende  $2\pi$ -periodische Lösung der Duffing-Gleichung. Mit anderen Worten: *Man weiss, wie sich sehr viele Lösungen der Duffing-Gleichung langfristig verhalten.*

## 8

Im letzten (kurzen) Teil dieser Reihe über Schwingungen, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2C*, werden wir einer berühmten Frage nachgehen: Wie “reagiert” die Duffing-Gleichung, wenn man die Verstimmung  $\nu$  zwischen Eigenfrequenz des Schwingers und der Frequenz der äusseren Anregung *adiabatisch*, das heisst (theoretisch: unendlich) langsam *verändert*? Es passiert etwas Unerwartetes: René Thom nannte es eine Katastrophe ...

## Literatur

- [1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
- [2] U. Kirchgraber: *Schwingungen I oder wenn der Vater mit dem Sohn*, VSMP-Bulletin Nr. 128, Mai 2015, p. 24-30, *Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*, VSMP-Bulletin Nr. 129, September 2015, p. 10-19, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*, VSMP-Bulletin Nr. 130, Januar 2016, p. 24-31.
- [3] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.

# Eine visuelle Analyse der Sterblichkeit männlicher Spanier

J. S. Marron, ist Professor der Statistik und Unternehmensforschung an der University of North Carolina in Chapel Hill, USA

## Zusammenfassung

Die statistische Visualisierung benutzt graphische Methoden um Erkenntnisse aus Daten zu gewinnen. Wir zeigen wie mit dem Verfahren der Hauptkomponentenanalyse die Sterblichkeit in Spanien im Laufe der letzten hundert Jahre analysiert werden kann. Diese Datenzerlegung zeigt sowohl erwartete geschichtliche Ereignisse auf, als auch einige, teilweise überraschende Entwicklungen der Sterblichkeit im Laufe der Zeit.

## 1 Datenvisualisierung

Die statistische Analyse beschäftigt sich mit Datensätzen. Einfache *Datensätze* bestehen im Grunde aus (einer Ansammlung von) Tabellen, die eine Liste von Variablen mit ihren dazugehörigen Werten an bestimmten Datenpunkten (Messpunkten) enthalten. Ein Datensatz kann beispielsweise eine Liste von Orten und die Temperatur, die am dritten Februar 1900 um 9 Uhr an ihnen gemessen wurde, enthalten. Oder es handelt sich um eine Liste aller Schüler, die eine bestimmte Schule besuchen, zusammen mit ihrer Körpergröße und ihrem Alter. Eine statistische Analyse solcher Datensätze nutzt Verfahren um aus den gegebenen Rohdaten Erkenntnisse zu gewinnen, z.B. dass zwölfjährige Kinder eher 150 cm als 190 cm groß sind.<sup>1</sup> Ein sehr wichtiger, aber leider allzu oft vernachlässigter Teil der statistischen Analyse besteht darin, sich den Datensatz anzuschauen – zu visualisieren. Gebräuchliche Visualisierungsverfahren zeigen sich in Form von Graphen und Diagrammen. Weil bei modernen, komplexen Datensätzen nicht immer ganz klar ist wie sie visualisiert werden sollen, handelt es sich hierbei um ein aktives Forschungsgebiet.

In diesem Schnappschuss beschäftigen wir uns hauptsächlich mit *Kurven als Datenobjekten* und verwenden Begriffe aus der objektorientierten Datenanalyse (OODA, Object Oriented Data Analysis), welche von Wang und Marron [4] geprägt wurde. Eine ausführliche Abhandlung dieses Konzepts und eine weiterführende Diskussion des hier untersuchten Datensatzes findet sich bei Marron und Alonso [1].

Anhand eines Datensatzes, der Daten zur Sterblichkeit enthält, stellen wir die Hauptkonzepte der OODA-basierten Datenvisualisierung vor. Unter Sterblichkeit verstehen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person bei einer bestimmten Populationsstufe (z.B. in einem bestimmten Alter) stirbt. Bei einer gegebenen Gruppe von Leuten in einem gegebenen Zeitraum wird die Sterblichkeit quantifiziert indem die Anzahl der Verstorbenen durch die Gesamtgröße der Gruppe geteilt wird. In unserem Beispiel besteht der beobachtete Zeitraum aus den Kalenderjahren 1908 bis 2002. Für jedes dieser Jahre werden die Menschen nach Alter von 0 bis 90 gruppiert und die entsprechende Sterblichkeitsrate berechnet. Ein solcher Datensatz, der für den männlichen Anteil der spanischen Bevölkerung erhoben wurde, ist in Abbildung 1 wiedergegeben. Jede der Kurven im linken Diagramm entspricht dabei einem Jahr (1908–2002) und ist als Graph der Sterblichkeit dargestellt, welche auf der vertikalen Achse aufgetragen ist und als Funktion des auf der horizontalen Achse aufgetragenen Alters interpretiert wird.

<sup>1</sup>Weitere Beispiele der statistischen Analyse gibt es im Schnappschuss 6/2014 “Statistics and dynamical phenomena” von H. Tong.

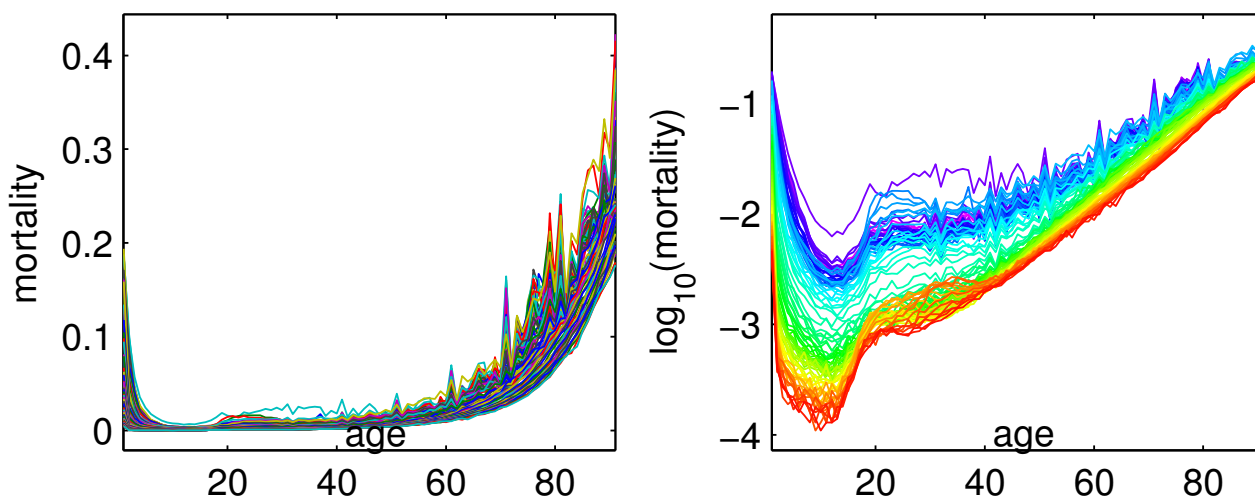


Abbildung 1: Links: Unbearbeitete, mit einer Standardpalette eingefärbte Sterblichkeitskurven mit der Sterblichkeit (mortality) auf der vertikalen Achse. Rechts: Logarithmierte Sterblichkeitskurven. Die logarithmische Skalierung wirkt natürlicher, die einzelnen Jahre werden durch die Farben des Regenbogens unterschieden. Diese Kurven zeigen nicht nur allgemeine, altersbedingte Effekte, sondern auch einen auf sinkende Sterblichkeit hinweisenden Langzeittrend.

Die Kurven der verschiedenen Jahre unterscheiden sich in ihrer Farbe – ein Feature, das die meisten Visualisierungsprogramme von Haus aus anbieten. In unserem Fall wurde die aus sieben Farben bestehende Standardpalette des Matlab-Softwarepakets verwendet, mit dem die obigen Graphiken erzeugt wurden.

Die Darstellung unserer Daten im linken Diagramm wird dadurch eingeschränkt, dass ein Großteil der Variation zwischen den Kurven nur schwer erkennbar ist. Das liegt daran, dass die Werte der Sterblichkeit sich über mehrere Größenordnungen erstrecken und es somit schwierig wird kleine Werte zu unterscheiden – vor allem in den Kindheitsjahren, wo alle Kurven sich im Wesentlichen bei 0 befinden. Ein gebräuchlicher Ansatz dieses Visualisierungsproblem zu lösen ist den *Logarithmus* der Daten darzustellen. Der Logarithmus einer Zahl ist diejenige Potenz zu der eine andere Zahl (in unserem Fall die 10) erhoben werden muss, so dass sich dadurch die erste Zahl ergibt; beispielsweise ist der (Zehner-)Logarithmus von 100 die 2, denn  $10^2 = 100$ . Weil die Unterschiede zwischen den Kurven sehr klein sind – kleiner als 0,1 – werden die Logarithmen der Sterberaten und ihre Unterschiede betragsmäßig (also im Sinne des Absolutbetrags) zu relativ großen, negative Zahlen. An einer Stelle, an welcher der Wert eine Kurve beispielsweise nur das 0,001-fache einer anderen Kurve beträgt, unterscheiden sich die beiden Kurven bei einer logarithmischen Skalierung um drei Längeneinheiten (denn  $0,001 = 10^{-3}$ )<sup>2</sup>. Dieser Effekt zeigt sich im rechten Diagramm, wo die Logs (Abkürzung für Logarithmen) der Kurven dargestellt sind und sich die Unterschiede bei jedem Alter deutlicher abzeichnen.

Eine weitere Einschränkung des linken Sterblichkeitsdiagramms besteht darin, dass wir kaum erkennen können welche Kurve zu welchem Jahr gehört. Dieses Problem wird im rechten Diagramm von Abbildung 1 durch den Einsatz einer anderen Farbpalette beseitigt. Hier wird ein einziger Farbzyklus für die Jahre 1908 bis 2002 verwendet, dessen Farben ein Regenbogenschema durchlaufen. Dieser beginnt für das Jahr 1908 bei blau, durchläuft die Farben cyan, grün und gelb und färbt schließlich die Kurve für das Jahr 2002 rot ein. Dieses Farbschema zeigt einen klaren Trend: im Laufe des letzten Jahrhunderts gab es eine stetige, allgemeine Besserung (d.h. eine Senkung) der Sterblichkeit in der männlichen, spa-

<sup>2</sup>Nebenbei bemerkt ist diese Herangehensweise auch dann sehr nützlich, wenn starke Variationen zwischen großen, positiven Zahlen vorliegen. Dadurch, dass der Logarithmus aus sehr großen Zahlen wesentlich kleinere macht (wir ersetzen mit ihm z.B. 100 durch 3), können wir die Werte eines Datensatzes wesentlich überschaubarer machen; dieser Trick wird beispielsweise in Abbildung 3 des Schnappschusses 5/2015 *Chaos and chaotic fluid mixing* von T. Solomon verwendet.

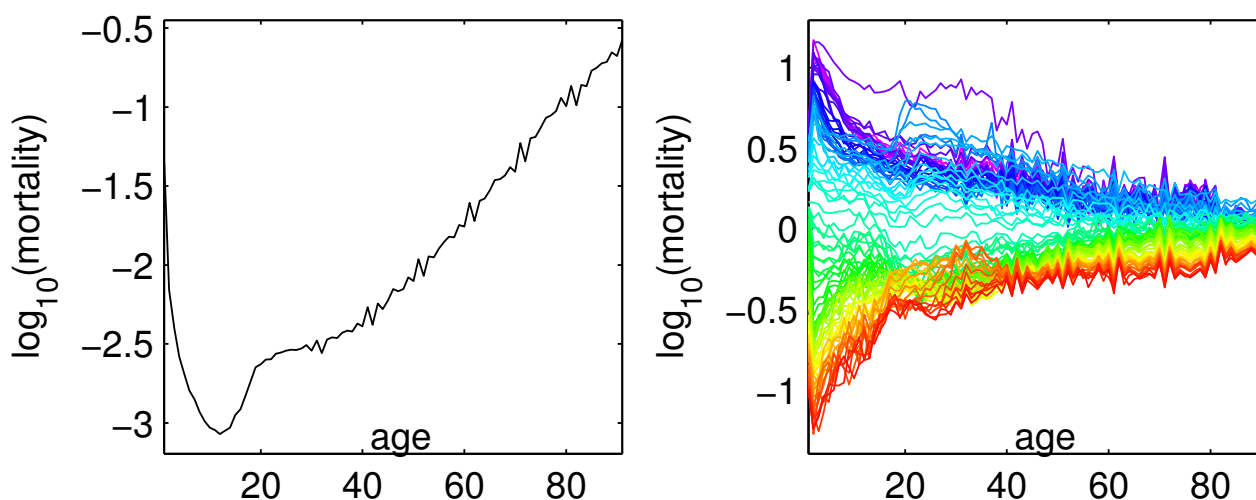


Abbildung 2: Links: Die Mittelwertskurve mit den allgemeinen Alterseffekten. Rechts: Residualkurven, welche die allgemeine Verbesserung der Sterblichkeit zeigen und keine Alterseffekte aufweisen.

nischen Bevölkerung. Das liegt vor allem an dem Fortschritt der Medizin und der Verbesserung des Gesundheitswesens in diesem Zeitraum.

## 2 Kurven als Datenobjekte

Bis jetzt bestanden die Daten, die wir analysierten – unser Datensatz – aus Sterblichkeitsraten, Altersklassen und Jahren. Um diese Daten besser zu verstehen, haben wir sie auf verschiedene Arten visualisiert. Wir gehen nun einen Schritt weiter und möchten wissen, ob wir noch mehr Informationen gewinnen können, indem wir die Kurven selbst als zu analysierende Daten auffassen. Wenn wir die Kurven als Datensatz auffassen, liegt es nahe ihre Mittelpunkte zu betrachten. Das linke Diagramm von Abbildung 2 zeigt die Kurve, welche wir erhalten, wenn wir an jeder Stelle (der horizontalen Achse) den Mittelwert aller Kurven im rechten Diagramm von Abbildung 1 berechnen. An dieser Mittelwertkurve erkennen wir den erwarteten, menschlichen Lebenszyklus. Ganz links ist die Kurve hoch, denn es ist gefährlich ein Säugling zu sein. Danach, in den Kindheitsjahren, fällt die Sterblichkeit rasant ab um über die Lebensjahre hinweg schrittweise anzusteigen: schließlich haben ältere Menschen im Verhältnis zu jüngeren ein höheres Todesrisiko.

Etwas überraschend wirken möglicherweise die kleinen Spitzen. Diese tauchen jedoch nicht zu zufälligen Zeitpunkten auf, sondern kommen in gleichen Abständen vor. Außerdem zeigen sie sich nur bei dekadischen Altern (Vielfachen von Zehn). Das liegt daran, dass diese Spitzen ein Überbleibsel schlechter Buchhaltung in den früheren Zeitabschnitten unseres Gesamtzeitraums sind. Wenn in früheren Zeiten ein alter Mensch starb, war sein genaues Alter manchmal ungewiss. Deswegen wurde in solchen Fällen das amtliche Sterbealter einfach gerundet. Das zeigt sich klarerweise in den Spitzen bei den dekadischen Alterszahlen und den unmittelbar davor und danach liegenden Tälern.

Auch wenn die Mittelwertskurve schon für sich interessant ist, ergeben sich zusätzlich Erkenntnisse, wenn wir genauer auf die Variation um den Mittelwert achten. Eine einfache Darstellung dieser Variation ist im rechten Diagramm von Abbildung 2 gegeben, nämlich durch die *Residuen (um den Mittelwert)*. Diese Kurven gehen von den Datenkurven aus dem rechten Diagramm von Abbildung 1 hervor nachdem die Mittelwertskurve aus dem linken Diagramm von Abbildung 2 von ihnen abgezogen wurde. Wie erwartet ist die allgemeine Verbesserung (Senkung) der Sterblichkeit deutlich in diesen Residualkurven zu erkennen. Zudem sind die oben erwähnten altersbedingten Auswirkungen auf die Sterblichkeit verschwunden, was zeigt, dass sie allgemeine Effekte sind, die sich nicht merklich mit der

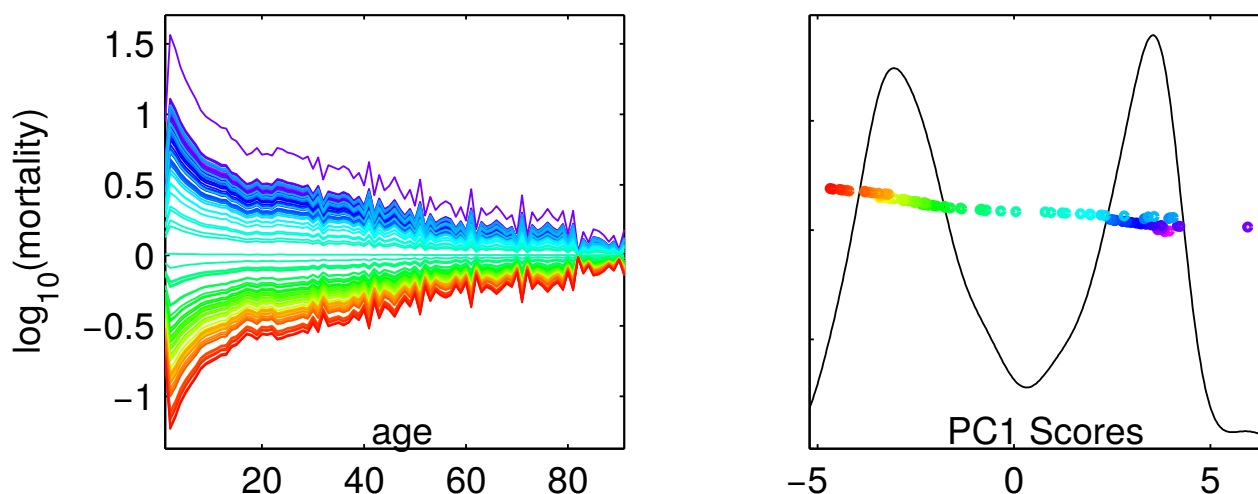


Abbildung 3: Links: Der Loadings-Plot für die erste Hauptkomponente (PC1). Dieser zeigt, dass die allgemeine Verbesserung der Sterblichkeit die Hauptursache der Datenvariation darstellt. Rechts: Der dazugehörige Score-Plot der ersten Hauptkomponente (PC1), der die Hauptursache der Variation genauer beschreibt.

Zeit verändern.

Eine genauere Betrachtung der Daten ist im linken Diagramm von Abbildung 3 zu sehen. Dieses Diagramm wird Loadings-Plot der *ersten Hauptkomponente* (PC1, *principal component 1*) genannt. Bei diesem Verfahren werden starke Unterschiede hervorgehoben indem die weniger starken herausgefiltert werden.

Um dieses Vorgehen zu verstehen ist es hilfreich über den Raum der Kurven nachzudenken. Dieser ist ein Raum, der für jede Variable – jede Altersklasse – eine Dimension besitzt. In Abbildung 1 haben wir beispielsweise eine Dimension für die verschiedenen Altersklassen und eine für die Sterblichkeit. Somit ist jeder Punkt in diesem (zweidimensionalen) Raum durch die Sterblichkeit einer bestimmten Altersklasse festgelegt. Räume, in denen wir uns für die Werte der Punkte in ihren verschiedenen Dimensionen (welche *Koordinaten* genannt werden) interessieren, heißen *Vektorräume*. Ihre Punkte nennen wir *Vektoren*. In unserem neuen Vektorraum repräsentiert jeder Punkt (Vektor) eine ganze Sterblichkeitskurve; das bedeutet, dass jeder Punkt die Sterblichkeit aller Altersklassen in einem bestimmten Jahr kodiert. Jetzt, wo wir einen Raum für unsere Kurven haben, markieren wir in ihm die Residuen um den Mittelwert aus dem rechten Diagramm von Abbildung 2, um die Richtung der maximalen Varianz<sup>3</sup> zu bestimmen. Jeder Datenpunkt (d.h. jede Residualkurve) kann nun auf diesen Richtungsvektor projiziert werden. Wir können uns diese Projektion wie folgt vorstellen: wir messen wo der Schatten jedes Punktes auf die Gerade in Richtung der maximalen Variation fällt. Die resultierenden Kurven, die als Punkte repräsentiert auf einer gemeinsamen Gerade liegen, werden Vielfachen dieses gemeinsamen Richtungsvektors sein. Das zeigt sich im linken Diagramm von Abbildung 3, wo die projizierten Punkte (wieder als Sterblichkeitskurven) Vielfachen der gleichen Form sind (wobei negative Vielfache sich wie Spiegelbilder verhalten). Dieses Verfahren offenbart gewissermaßen die Variation zwischen den Datenpunkten im Hinblick auf die größte Variationsursache. Sowohl die Längen der projizierten Punkte (ihre *Scores*) als auch die Formen der Kurven liefern nützliche Erkenntnisse.

Die gemeinsame Gestalt der Kurven spiegelt auch die erwartete Tatsache wieder, dass Verbesserungen des allgemeinen Gesundheitswesens im Grunde der ganzen Bevölkerung nutzen. Allerdings schrumpft die Höhe der Besserung bei ansteigendem Alter, denn auch die positiven Auswirkungen des medizinischen Fortschritts lassen gerade bei steigenden Lebensalter nach. Auch in dieser Betrachtung sind die Zacken bei den dekadischen Altersgruppen, die wir schon in der Mittelwertskurve auf der linken Seite

<sup>3</sup>Einfach ausgedrückt, misst die Varianz wie stark die Werte eines Datensatz streuen.

von Abbildung 2 beobachteten, ein wichtiges Merkmal. Diesmal gehen sie jedoch in den frühen Jahren (des Gesamtzeitraums) nach oben, was zeigt, dass das Runden des Sterbealters gerade in diesen frühen Jahren häufiger vorkam. Später zeigen die Zacken nach unten, was daran liegt, dass dieser Alterseffekt später verschwunden ist und wir hier ja immer die Differenz zum Mittelwert betrachten.

Eine genauere Betrachtung der Scores ist im rechten Diagramm von Abbildung 3 wiedergegeben<sup>4</sup>. Diese sind die Koeffizienten der Projektion auf die erste Hauptkomponente. Jeder Punkt entspricht einer Sterblichkeitskurve, wobei die horizontale Koordinate anzeigt, wo genau sie auf dem Vektor in Richtung der maximalen Varianz liegt. Weil wir mit den Residualkurven arbeiten, entspricht hier die Mittelwertkurve dem Nullpunkt. Je weiter also der Score eines Punktes von der Null entfernt ist, desto höheren Abstand hat die entsprechende Kurve von der Mittelwertkurve – und umso mehr hat sie zu den Mittelwerten beigetragen, sei es positiv oder negativ. Die Farben der Punkte entsprechen wieder den Jahren. Außerdem sind sie genau in ihrer Reihenfolge vertikal angeordnet – die früheren Jahre befinden sich unten, die späteren oben im Diagramm. Der lila-blaue Punkt ganz rechts steht für das Jahr 1918. Er besitzt den höchsten positiven Score, was bedeutet, dass er am meisten zum Mittelwert beigetragen hat. In diesem Jahr trat das vielleicht wichtigste, epidemiologische Ereignis der Weltgeschichte ein. Die Soldaten, die aus dem ersten Weltkrieg zurückkehrten, brachten einen furchtbaren Abkömmling der Grippe mit sich, der Millionen von Menschen auf der ganzen Welt tötete. Die hohe Todeszahl in Spanien in diesem Jahr spiegelt sich durch die Position dieses Punktes wieder. Dass es sich bei diesem Punkt um einen Ausreißer handelt, ist auch schon aus der Visualisierung der Rohdaten im rechten Diagramm von Abbildung 1 erkennbar (dargestellt durch die magentafarbene Kurve). In den Jahren danach gab es allgemeine Verbesserungen, die bis zum nächsten Schwung nach rechts anhielten. Es wäre denkbar, dass es sich hierbei um eine Auswirkung des zweiten Weltkrieg handelt, aber tatsächlich war Spanien in diesem Jahr gar nicht an den Kampfhandlungen des Krieges beteiligt. Stattdessen repräsentieren die hellblauen Punkte die späten dreißiger Jahre, als in Spanien ein grausamer Bürgerkrieg ausgetragen wurde. Danach rücken die Punkte wieder nach links, vor allem nachdem sich das allgemeine Gesundheitswesen im Laufe der Zeit verbessert hatte.

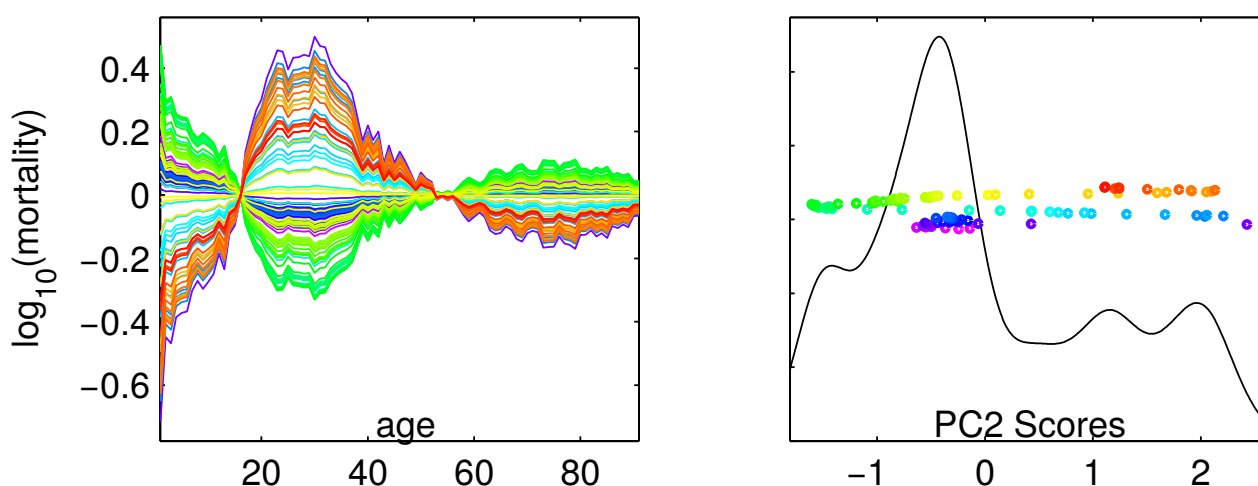


Abbildung 4: Links: Der Loadings-Plot für die zweite Hauptkomponente (PC2). Rechts: Der dazugehörige Score-Plot.

Abbildung 4 zeigt noch genauer, wie sich die Sterblichkeit über die Jahre veränderte. In dieser Abbildung wird die zweite Hauptkomponente (PC2) betrachtet. Das entsprechende Verfahren gleicht demjenigen für die erste Hauptkomponente (PC1), nur dass wir jetzt denjenigen Richtungsvektor der maximalen Variation betrachten, der senkrecht auf der Richtung steht, die wir bei der ersten Hauptkomponente verwendeten. Dabei wird gewissermaßen die Variation der ersten Richtung ignoriert um

<sup>4</sup>Die dunkle Kurve im Hintergrund des rechten Diagramms (und in Abbildung 4) ist die *geschätzte Dichte*. Sie zeigt wie wahrscheinlich die verschiedenen Score-Werte für die Kurven sind

die nächstgrößere Variation hervorzuheben. Die graphische Darstellung der Loadings besteht wieder aus den Vielfachen einer einzelnen Kurve, wobei ihre Farben die entsprechenden Jahre kodieren. In diesem Fall ist das Farbschema weniger leicht zu interpretieren. Das Hauptmerkmal an dieses Kurvenmusters ist jedoch, dass diese Richtung die Differenz zwischen der Gruppe der 20- bis 45-jährigen Männer und der übrigen, aus allen jüngeren und älteren bestehenden Gruppe, darstellt.

Während die Farbmuster im linken Diagramm kein ganz klares Bild liefern, zeigen sich im dazugehörigen Scores-Plot auf der rechten Seite (was dasselbe Format wie in Abbildung 3 besitzt) einige deutliche Entwicklungen. Wieder treten das Jahr 1918 (lila) und der Spanische Bürgerkrieg (hellblau) deutlich hervor, weil die 20 bis 45 Jahre alten Männer während dieser Jahre in vergleichsweise höherer Zahl verstorben sind. Danach ergibt sich eine Besserung bis zu der Mitte der fünfziger Jahre (grün). In den Fünfzigern stieg die Sterblichkeit erneut (nicht für alle, aber gerade für 20- bis 45-jährige Männer). Zu dieser Zeit wurden Automobile erschwinglich und die Neigung zu gefährlichem Fahrverhalten in gerade dieser demographischen Gruppe führte zu einer stetig wachsenden Sterblichkeitsrate. Glücklicherweise kehrte sich dieser Trend in den frühen Neunzigern (orange bis rot) dank der Einführung von Sicherheitsgurten und anderen Sicherheitsmaßnahmen im Verkehr, sowie verbesserter Straßenplanung, wieder um.

Diese Beispiele zeigen, wie effektiv die Hauptkomponentenanalyse komplexe Datensätze von Kurven in einfacher zu interpretierende Teile zerlegen kann. Mehr über dieses Analyseverfahren, oft *funktionelle Datenanalyse* genannt, gibt es bei Ramsay und Silverman [2, 3].

## Acknowledgement

*Schnappschüsse moderner Mathematik aus Oberwolfach* werden von Teilnehmerinnen und Teilnehmern des wissenschaftlichen Programms des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach (MFO) geschrieben. Das Schnappschuss-Projekt hat zum Ziel, Verständnis und Wertschätzung für moderne Mathematik und mathematische Forschung in der allgemeinen Bevölkerung weltweit zu fördern. Es begann als Teil des Projekts „Oberwolfach trifft IMAGINARY“, welches von der Klaus Tschira Stiftung gefördert wird. Das Projekt wurde auch von der Oberwolfach Stiftung sowie vom MFO unterstützt. Alle Schnappschüsse können unter [www.imaginary.org/snapshots](http://www.imaginary.org/snapshots) sowie unter [www.mfo.de/snapshots](http://www.mfo.de/snapshots) abgerufen werden. Der Originaltext kann unter <http://www.mfo.de/math-in-public/snapshots/files/visual-analysis-of-spanish-male-mortality> gefunden werden, inklusive aller Abbildungen in Farbe.

*Lizenz:*

Creative Commons BY-SA 4.0

*Mathematische Gebiete:*

Numerik und Wissenschaftliches Rechnen, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

*Verbindung zu anderen Gebieten:*

Finanzwissenschaften, Geistes- und Sozialwissenschaften

*Übersetzt aus dem Englischen:*

Daniel Katona

*Editor:*

Daniel Kronberg - [junior-editor@mfo.de](mailto:junior-editor@mfo.de)

*Chefeditorin:*

Carla Cederbaum - [senior-editor@mfo.de](mailto:senior-editor@mfo.de)

## Literatur

- [1] J. S. Marron and A. M. Alonso. Overview of object oriented data analysis. *Biometrical Journal*, 56:732–753, 2014.
- [2] J. O. Ramsay and B. W. Silverman. *Applied functional data analysis: methods and case studies*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2002.
- [3] J. O. Ramsay and B. W. Silverman. *Functional data analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2005.
- [4] H. Wang, J. S. Marron, et al. Object oriented data analysis: Sets of trees. *The Annals of Statistics*, 35(5):1849–1873, 2007.

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF - SSPMP - VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra  Herr/M./Sig.  Prof.  Dr.

Name/Nom/Cognome: .....

Vorname/Prenom/Nome: .....

Adresse/Indirizzo (privat/privato): .....

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo: .....

(Land/Pays/Paese): .....

Email: ..... (Tel): .....

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita): .....

Sprache/Langue/Lingua: D  F  I.

Schule/école/scuola: ..... Kanton/canton/cantone: .....

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo  passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: [www.vsg-sspes.ch](http://www.vsg-sspes.ch)

## Impressum

**Herausgeber — Éditeur**  
VSMP – SSPMP–SSIMF

**Korrespondenz — Correspondance**

Franz Meier                      franz.e.meier@bluewin.ch  
Alpenquai 44                      Tel. 079 79 89 770  
6005 Luzern

**Layout — Mise en page**

Samuel Byland                      samuel.byland@vsmp.ch  
Weinbergstrasse 48b              Tel. 079 728 63 97  
5000 Aarau

**Inserateverwaltung — Publicité**

Stefan Walser                      stefan.walser@alumni.ethz.ch  
Weinbergstrasse 3                      Tel. 032 512 0 128  
8807 Freienbach

**Bestimmungen für Inserate und Beilagen**

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:  
ganzseitig                      Fr. 500.–  
halbseitig                      Fr. 300.–  
Beilagen:  
bis 20 g                      Fr. 500.–  
über 20 g                      nach Vereinbarung

**Adressänderungen — Changement d'adresse**

VSMP Mitglieder — *Membres de la SSPMP:*  
VSG – SSPES – SSISS  
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)  
3000 Bern  
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04  
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — *autres abonnées:*  
Franz Meier                      franz.e.meier@bluewin.ch  
Alpenquai 44                      Tel. 079 79 89 770  
6005 Luzern

**Auflage — Tirage**

900 Exemplare  
erscheint dreimal jährlich

**Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF**

Arno Gropengiesser              groppi@bluewin.ch  
Via Domenico Galli 44  
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

**Deutschschweizerische Mathemattikkommission**

Daniela Grawehr                      grawehr@kfanet.ch  
Schützenstrasse 36                      Tel. 041 810 49 88  
6430 Schwyz

**Deutschschweizerische Physikkommission**

Christian Stulz                      christian.stulz@gymburgdorf.ch  
Pestalozzistrasse 17                      Tel. 034 423 46 43  
3400 Burgdorf

**Commission Romande de Mathématique**

Tatiana Mantuano                      tatiana.mantuano@gfbienne.ch  
rue Louis-de-Meuron 4                      Tél. 032 544 47 53  
2074 Marin-Epagnier

**Commission Romande de Physique**

Stéphane Davet                      davet.stephane@lyca.eduvs.ch  
Av. Plantaud 28B                      Tél. 024 471 21 83  
1870 Monthey

**Commissione di Matematica della Svizzera Italiana**

Luca Rovelli                      lucarovelli@ticino.com  
Via Pedmunt 10                      Tel. 091 825 76 69  
6513 Monte Carasso

**Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)**

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 133	30.11.2016 (20.01.2017)
Nr. 134	31.03.2017 (20.05.2017)
Nr. 135	31.07.2017 (20.09.2017)

**Druck und Versand — Imprimerie**

Niedermann Druck AG  
Letzistrasse 37  
9015 St. Gallen  
www.niedermanndruck.ch

**Internet-Adressen — Adresses Internet**

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch