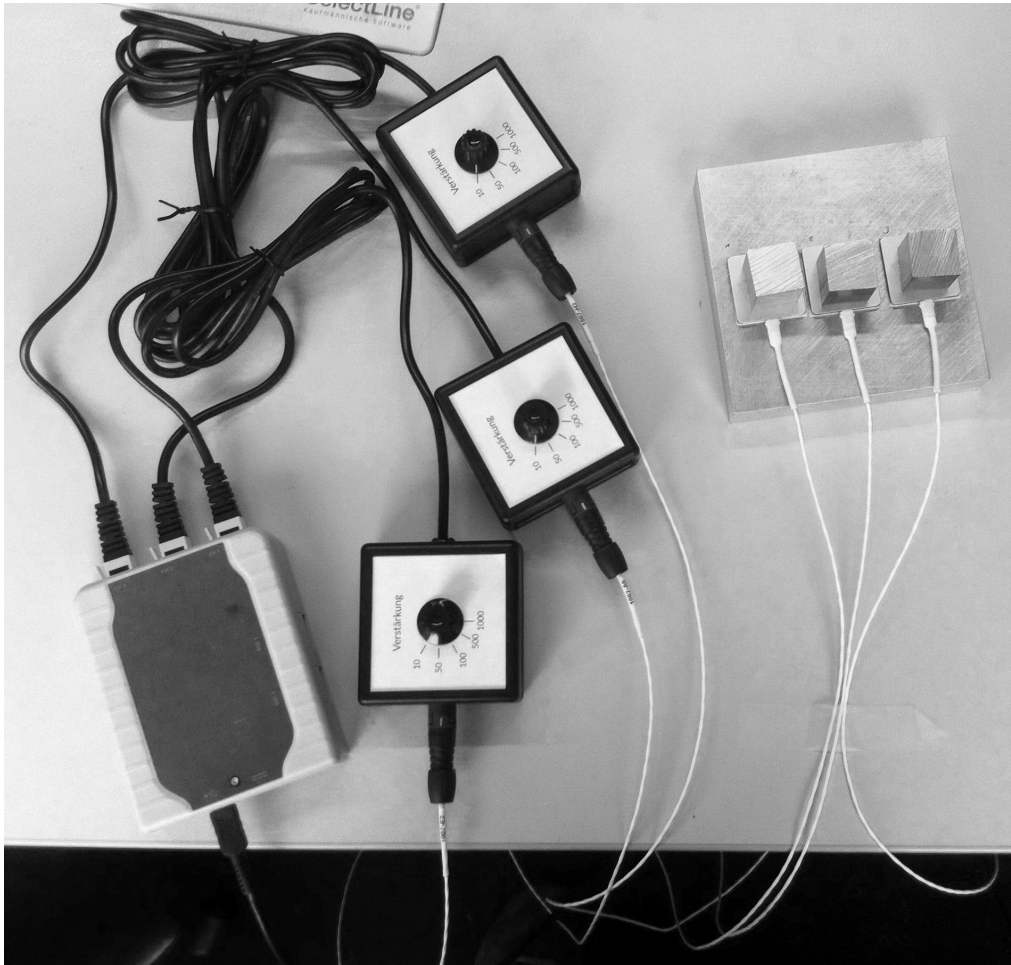




Bulletin

Mai 2016 — Mai 2016

N° 131

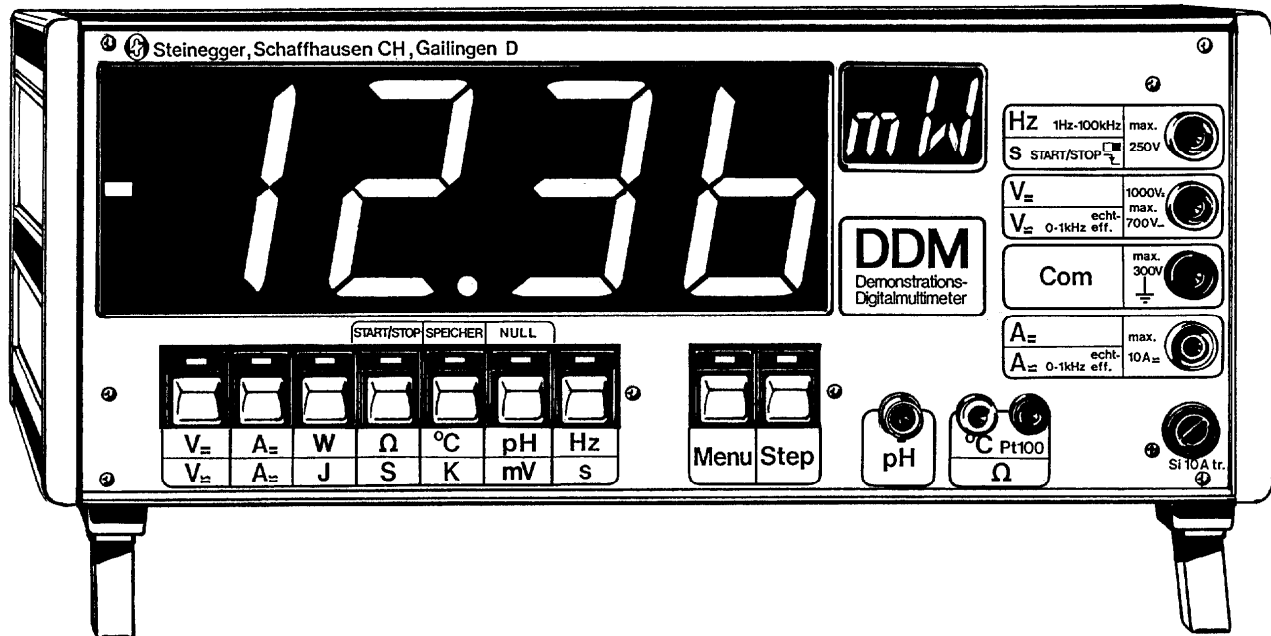


VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter DDM

Art. Nr. 26



- **Misst: Spannung, Strom, Wirkleistung, Energie, Widerstand, Temperatur, pH-Wert, Zeitintervall und Frequenz**
- **56mm hohe LED-Ziffern und 9999 Messpunkte**
- **Automatische und manuelle Bereichsumschaltung**
- **Mehr als 20 Zusatzgeräte direkt anschließbar**
- **Einfacher Datenaustausch mit PC/Mac im Multitasking über die bidirektionale Serieschnittstelle**
- **2 freiprogrammierbare Analog-Ausgänge**
- **Ausführliche 75-seitige Bedienungsanleitung**

Preis inkl MWSt. Fr 2'350.-

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Demonstrations-Digitalmultimeter DDM Art. Nr. 26" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



Fax : 052-625 58 60
☎ : 052-625 58 90
Internet: www.steinegger.de

Ihr Unterricht mit dem idealen Begleiter leicht gemacht

BLICK INS BUCH:
www.ofv.ch/lernmedien



DMK / DPK (Hrsg.)
Fundamentum
Formeln, Begriffe, Tabellen
für die Sekundarstufen I und II
Inklusive E-Book
8. überarbeitete Auflage 2015
120 Seiten
17×23 cm, klappenbroschiert
Fr. 22.–
ISBN 978-3-280-04098-0

Das «Fundamentum» überarbeitet und neu gestaltet

Die praktische Formelsammlung beinhaltet die zentralen Wissensinhalte zu Mathematik und Physik. Sachverhalte werden mit Worten knapp umschrieben. Die formale Sprache wird damit leicht verständlich. Die farbige Hinterlegung der Fakten und die Gestaltung der Hauptteile ermöglichen eine schnelle Orientierung.

Die englische Ausgabe erscheint auf das Schuljahr 2016/17.

DMK / DPK / DCK (Hrsg.)
Formeln, Tabellen, Begriffe
Mathematik – Physik – Chemie
Inklusive E-Book
5. erweiterte Auflage 2015
264 Seiten
17×23 cm, klappenbroschiert
Fr. 25.–
ISBN 978-3-280-04116-1

«Formeln, Tabellen, Begriffe» mit erweitertem Chemieteil

Das bewährte Nachschlagewerk wurde um acht Seiten in Chemie ergänzt und wird damit den Anforderungen des immer beliebteren Schwerpunktfaches Chemie/Biologie gerecht.

Die englische Ausgabe ist in Inhalt und Gestaltung identisch – parallel kann mit beiden Sprachversionen in einer Klasse gearbeitet werden.

DMK / DPK / DCK (Hrsg.)
Formulae, Tables
and Concepts
A Concise Handbook of
Mathematics – Physics – Chemistry
2014, 264 Seiten
17×23 cm, klappenbroschiert
Fr. 25.–
ISBN 978-3-280-04084-3



Nur E-Book
Fr. 20.–
ISBN 978-3-280-03824-6



Unsere E-Books:

- sind in der kostenlosen App vom Orell Füssli Verlag (im Apple App Store bzw. Google Play Store) oder unter <https://reader.ofv.ch> erhältlich.
- können ohne zusätzliche Installation auf jedem PC online und als App auf dem Tablet offline sofort verwendet werden.
- sind mit verschiedenen interaktiven Funktionen angereichert.
- können beliebig mit eigenen Notizen ergänzt werden.
- enthalten verlinkte Seitenverweise und Internetadressen.

orell füssli Verlag
www.ofv.ch/lernmedien

In dieser Ausgabe — *Dans ce numéro*



Commission Romande de Physique **4**

- Damien Gollut*
Peer Instruction en physique 4
- Frédéric de Montmollin*
Le Swiss Young Physicists' Tournament 2016 6
- Cours: La physique dans le sport* 8

DPK

Deutschschweizerische Physikkommission **9**

- Kurs: Immersionsunterricht in Mathematik und Physik* 9
- Hans Kammer, Manuel Kugler, Irma Mgeladze*
Wärmestromsensoren 10
- Patrick Lenggenhager*
Swiss Young Physicists' Tournament 2016 13
- Martin Lieberherr*
Aufenthaltswahrscheinlichkeit im freien Fall 14
- Andrea Schneider*
Internationale Physik-Olympiaden 2015 und 2016 16
- Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht 18



Commissione di Matematica della Svizzera Italiana **20**

- Corso: Eadem mutata resurgo – L'eredità dei Bernoulli* 20



Commission Romande de Mathématiques **21**

- Cours: Eadem mutata resurgo – L'héritage des Bernoulli* 21



Deutschschweizerische Mathematikkommission	22
<i>Willi Köchli</i>	
Einfache Konstruktion des Sehnenvierecks	22
<i>Peter Thurnheer</i>	
Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (2. Teil)	24
<i>Urs Kirchgraber</i>	
Mathematik – das unerkannte Vergnügen	31
<i>Weiterbildung: Terme und Gleichungen</i>	38
<i>Kurs: Sport als Sachthema im Mathematikunterricht</i>	41
Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht	42
<i>Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht</i>	44
<i>Roman Meier</i>	
Mehr Mathematik!	46
<i>Dima Nikolenkov</i>	
Math Challenge KST	48
<i>Kaloyan Slavov</i>	
The ETH Math Youth Academy	52
<i>Urs Kirchgraber</i>	
Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing (Teil 2A)	61

Internet-Adressen — *Adresses Internet*

www.vsmp.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch

Titelseite — *Page de Titre*

Experimenteller Aufbau zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von drei Metallwürfeln
(Bild: Manuel Kugler; Artikel Seite 10 in dieser Ausgabe)

Peer instruction en physique

Damien Gollut, Lycée-Collège des Creusets, Sion
damien.gollut@bluewin.ch

La méthode d'Eric Mazur

Eric Mazur est un physicien et un enseignant américain, professeur à Harvard. Jusqu'en 1990, Eric Mazur enseignait de façon "traditionnelle" en dispensant un cours magistral ponctué de quelques démonstrations en classe. Ses étudiants réussissaient remarquablement les examens qui étaient également plutôt traditionnels. Mais il a constaté que les élèves avaient du mal à expliquer des concepts physiques, d'où une maîtrise finalement assez superficielle. C'est dans ce contexte qu'il a développé le concept d'instruction par les pairs (*peer instruction*) associé à la pratique d'une classe inversée. Après avoir demandé aux élèves de consulter, hors classe, des ressources avant un cours, c'est en classe qu'il envisage de répondre aux principales questions relatives aux difficultés rencontrées par les élèves au sujet des concepts étudiés. Ensuite, il avance un *concept test* qui est une question de compréhension pour laquelle il est proposé trois à quatre réponses possibles.

Ce *concept test* doit porter que sur un seul concept. La formulation d'une telle question à choix multiples n'est pas toujours aisée car les choix proposés doivent être adéquats : ils doivent comporter notamment des idées préconçues erronées et présumées des élèves. Cela nécessite, de la part de l'enseignant, d'avoir déjà des connaissances sur la didactique de sa discipline ou d'avoir déjà repéré de fausses conceptions.

De plus, les questions conceptuelles ne doivent pas être ni trop dures, ni trop faciles, et doivent impliquer un assez haut niveau cognitif.

Une fois la question proposée, chaque étudiant y réfléchit individuellement puis vote pour la réponse qu'il juge la plus acceptable. Il se prépare aussi à justifier son choix auprès de ses collègues.

Le professeur prend alors connaissance de la dispersion des réponses dans le groupe. Il s'agit d'un renseignement crucial pour juger du niveau de compréhension du groupe.

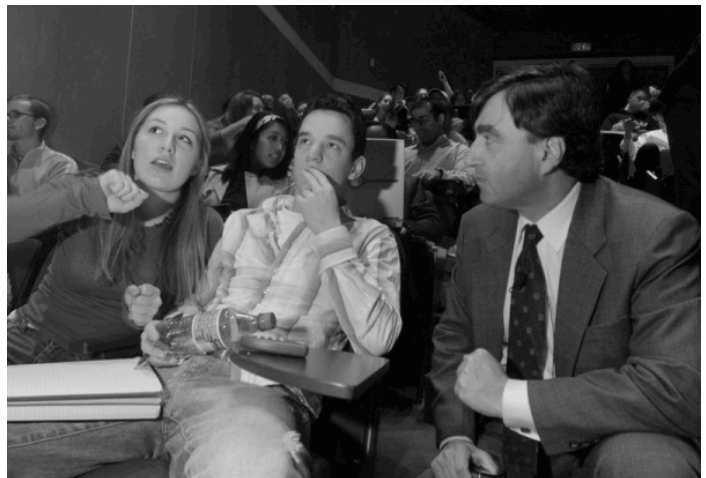
Les étudiants ont deux ou trois minutes pour ensuite convaincre leurs voisins de la justesse de leur choix. À cette étape, le professeur se déplace dans la classe pour entendre les arguments utilisés (sur la photo ci-contre, on voit Eric Mazur à l'écoute des arguments de ses étudiants).

Les étudiants votent à nouveau après avoir délibéré. De manière générale, les étudiants qui détenaient la bonne réponse sont parvenus à convaincre leurs camarades de la justesse de leur raisonnement.

Les résultats de ce nouveau vote permettent au professeur de prendre connaissance une deuxième fois du niveau de compréhension du groupe et d'en noter l'évolution.

Le professeur présente le résultat du vote au groupe, explique la bonne réponse et déconstruit les raisonnements erronés qu'il a pu entendre.

Si la majorité des étudiants ont choisi la bonne réponse, le professeur passe au prochain concept et recommence le cycle. Si l'inverse se produit, il reprend son explication et fait un nouveau *concept test* sur le même concept.



Essais réalisés au Collège des Creusets à Sion

Quatre enseignants du groupe de physique du Lycée-Collège des Creusets à Sion expérimentent cette méthode depuis maintenant 3 ans dans leur cours de discipline fondamentale avec une séquence pour l'introduction à la cinématique à une dimension (horaire, vitesse, accélération) et une autre séquence pour le cours de calorimétrie (température, échange de chaleur).

Chacun de ces cours est proposé aux étudiants sur une période d'environ 6 semaines en suivant les principes de l'enseignement d'Eric Mazur.

Les versions papier du cours de cinématique et de calorimétrie ont été complètement réécrits en tenant compte que chaque étudiant devait pouvoir lire ce cours et réaliser les exercices proposés de manière autonome (pour chaque exercice, un corrigé complet est alors mis à disposition des élèves).

L'utilisation de la plateforme internet *Moodle* du collège permet en plus de pouvoir proposer des ressources en ligne accessibles en tout temps par les élèves (QCM de vérification, vidéo d'expérience, compléments au cours). Le vote pour les *concept test* proposées en classe peut également se faire en direct sur *Moodle* à l'aide d'un smartphone et d'une connexion internet, ce qui permet au professeur d'avoir tout de suite les statistiques des réponses proposées par les élèves.

Ci-dessous, un exemple de question de compréhension posée aux élèves dans le cours de calorimétrie :

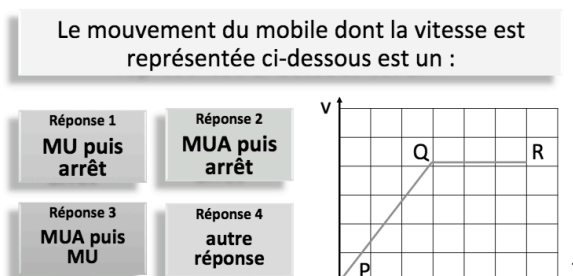
Est-ce que 50 grammes de glaçon mélangé à 1 dl d'eau vont dans tous les cas complètement fondre ?

- Oui, bien sûr
- Il n'y a que la partie des glaçons immergée dans l'eau qui va fondre
- Pas forcément. Cela dépend de la température initiale de l'eau
- On ne peut pas le savoir

Submit

Ou ci-contre un autre exemple en cinématique :

En plus de développer une meilleure compréhension des concepts, cette méthode contraint aussi les étudiants à faire preuve d'une grande autonomie dans leur travail, ceux-ci devant impérativement faire le travail de préparation du cours à la maison s'ils ne veulent pas être complètement dépassés en classe lors des questions de compréhension proposées.



Quant aux épreuves finales d'évaluation pour ces deux cours, elles ont été également adaptées par rapport à des examens classiques, avec notamment l'intégration de QCM. Les résultats encourageant obtenus lors de ces tests (au delà des notes, aussi par rapport à la compréhension des concepts par les élèves et à leur meilleure capacité de raisonnement) nous poussent à poursuivre l'expérience, tout en continuant de l'affiner et de l'adapter d'année en année.

On peut relever tout de même deux ombres au tableau : les élèves ne plébiscitent pas tous cette méthode car elle demande un investissement de leur part plus important que dans les cours traditionnels et du côté de l'enseignant, elle est plus chronophage qu'un enseignement frontal.

En espérant avoir éveillé en vous un peu de curiosité à la lecture de cet article, les enseignants intéressés à en savoir un peu plus sur cette expérience, sur les moyens utilisés ou sur l'organisation pratique de ces cours peuvent volontiers me contacter par courriel.

Le Swiss Young Physicists' Tournament 2016 (SYPT)

Un petit retour d'expérience et une invitation à participer aux futures éditions.

Frédéric de Montmollin, Gymnase Auguste-Piccard, Lausanne
frederic.demontmollin@vd.educanet2.ch

A la suite d'une information transmise aux files de physique, une petite équipe formée de trois élèves motivés des gymnases *Auguste-Piccard* et de *la Cité* à Lausanne, a relevé le défi de participer au *SYPT 2016* les 1 et 2 avril dernier.

Le *SYPT* désigne un « tournoi » de jeunes physiciens et physiciennes. A vrai dire, aucun des participants ne savait vraiment dans quoi ils se lançaient, mais ont tous été motivés par le principe consistant à faire une recherche scientifique sur un des sujets proposés puis à présenter leurs résultats aux autres équipes.

Dans le détail, au cours du tournoi, chaque participant prend tour à tour un des rôles suivants : *Reporter*, *Opponent*, *Reviewer*. Il participe donc à trois manches (*Physics Fight*) durant le tournoi. Une manche se déroule comme suit:

Le **Reporter** a 12 minutes pour **présenter une recherche** sur un des 17 sujets de physique proposés chaque année. Ces sujets sont très ouverts et permettent de nombreuses approches différentes. Le *Reporter* a quelques mois de préparation à disposition puisque les sujets sont publiés en été et que le concours a lieu au printemps.

Après quelques questions et une courte préparation, l'**Opponent** a ensuite 11 minutes (5' de rapport et 6' de discussion) pour **faire la critique** la plus constructive possible du sujet présenté.

Finalement, le **Reviewer** a 4 minutes pour **passer en revue les prestations** du *Reporter* et de l'*Opponent* sur le fond et sur la forme.

Le tout *in English, of course* !

Les prestations des participants sont notées par le jury. Le déroulement de chaque phase du tournoi est très codifié. C'est un aspect un peu troublant au début, mais qui s'explique par le fait que ces règles sont calquées sur celles du tournoi international, le *IYPT*. Il s'agit d'une vraie compétition.

Pour se faire une idée des sujets proposés, en voici deux :

8. train magnétique

Deux petits aimants cylindriques sont fixés aux deux extrémités d'une petite batterie (AA ou AAA). Lorsqu'on place le tout dans un solénoïde de cuivre de telle sorte que les aimants soient en contact avec la bobine, le "train" commence à se déplacer. Expliquer le phénomène et étudier la façon dont les paramètres significatifs affectent la vitesse et la puissance du train.

15. Mesure d'épaisseur sans contact

Inventer et construire un dispositif optique qui utilise un pointeur laser et permet la détermination sans contact de l'épaisseur, l'indice de réfraction, et d'autres propriétés d'une lame de verre.

La première manche à laquelle l'équipe a participé (*Reviewer*) a été un sacré choc ! Une participante (*Reporter*) a présenté son sujet à une telle vitesse que l'on avait du mal à suivre. Principe de l'expérience, modèle mathématique très développé, variation des paramètres significatifs, présentation graphique des résultats, etc. ont défilé à toute allure. Au point que le pauvre *Opponent* n'a

pu que demander de répéter lentement les points essentiels pour essayer d'y comprendre quelque chose. C'était assez impressionnant.

La seconde manche a montré au contraire un *Reporter* se limitant à une étude très basique du sujet choisi.

Lors de ces deux premières manches, les participants ont été confrontés à deux extrêmes : D'un côté, une finaliste de l'année précédente, qui a déjà participé au tournoi international 2015, clairement engagée pour gagner et de l'autre côté, un jeune participant tentant sa chance pour la première fois avec peu d'assurance.

Les participants sont en général des gymnasiens de 2^{ème} et 3^{ème} année, parfois de 1^{ère} année. Certains ont fait du *SYPT* leur sujet de travail de maturité. Il y a une très grande diversité de niveau, mais chacun peut y trouver son compte. L'équipe vaudoise a finalement obtenu la 6^{ème} place sur 15 équipes et une des membres de l'équipe a été sélectionnée pour les qualifications pour le *IYPT 2016*. C'est un très bon résultat pour une première participation romande.

Mon regard personnel sur cette compétition tient en quelques mots : Stimulant, amusant et rafraichissant. J'ai eu beaucoup de plaisir à accompagner cette équipe et à les aider à préparer leur sujet. Je pensais naïvement avoir bien compris la physique derrière les sujets proposés et je me suis fait surprendre, voire je me suis clairement planté. C'est extrêmement rafraichissant de se confronter à de tels défis.

Pour les participants, l'expérience est de très bonne qualité et très formatrice. Ils sont amenés à faire de la « vraie physique », une recherche sans savoir à l'avance ce qu'il y a à trouver. Ils doivent aussi présenter et soutenir leurs résultats face à des critiques pas toujours bienveillantes, mais souvent pertinentes. Une bonne partie des membres du jury et de l'équipe d'encadrement est composée d'anciens participants qui sont devenus des étudiants, doctorants ou post-doc de l'ETHZ. Il faut croire que cela leur a apporté quelque chose.

J'ai bien l'intention de renouveler l'expérience en espérant motiver de nouveaux élèves ces prochaines années. Et j'encourage tous mes collègues à tenter cette expérience. Si l'on est intéressé, on peut trouver naturellement beaucoup de documentation sur le net. Mais quelques indications pratiques et des retours d'expérience peuvent être salutaires. Je me tiens à disposition de toute personne ayant des questions à ce sujet.

www.sypt.ch

www.iypt.ch

www.youtube.com (pour des vidéos des finales internationales)

Cours de formation continue 2016: La physique dans le sport

Davet Stéphane, davet.stephane@eduvs.ch

Informations générales:

- **Objectifs:**
 1. Présenter les différents phénomènes physiques qui interviennent dans le sport.
 2. Permettre une actualisation de nos cours à l'avantage des élèves.
- **Dates:** 20-21-22-23 septembre 2016
- **Lieu:** Champéry (VS)
- **Inscription:** Dès la mi-mai 2016 (les membres SSPMP seront prioritaires)

Description du cours:

Les phénomènes physiques et leur modélisation interviennent dans tous les sports; en effet, l'étude des phénomènes naturels a notamment pour objectif de mieux comprendre comment les objets et systèmes qui nous entourent interagissent avec leur environnement. Or en pratiquant des sports, l'homme "joue" la plupart du temps avec l'influence des milieux extérieurs (frottement de l'air, de l'eau, adhérence et/ou glissement sur des surfaces solides, etc...) sur son corps, sur des objets (balles, ballons, disque, javelot, skis, patins, ...) ou sur des "machines" (voitures, voiliers, ...). La physique s'impose donc à l'évidence dans l'étude de ces interactions.

Ce cours de formation continue propose de vous présenter l'état des lieux de nos connaissances quant à la compréhension des phénomènes physiques dans de nombreuses situations. A cette fin, la CRP a invité une brochette de spécialistes remarquables qui, nous l'espérons, nous aiderons à y voir plus clair grâce à des explications pertinentes. A titre indicatif voici quelques sujets abordés:

- "L'aérodynamisme des balles et des ballons" par F. Gallaire (EPFL)
- "Mesures et analyse en biomécanique sportive" par K. Aminian (EPFL)
- "La physique de superman" par R. Lehoucq (ENS)
- "L'équilibre des bicyclettes" par J.-P. Vieren (CNRS)
- "Les techniques de chronométrage" par P. Richard (Swisstiming)

Durant ce cours, la CRP souhaite également favoriser l'échange de pratiques d'enseignement entre collègues par le biais d'une présentation qui ne manquera pas de vous intéresser. Elle a également invité les fabricants de matériels d'expériences à venir nous présenter leurs nouveautés.

Kursausschreibung: Immersionsunterricht in Mathematik und Physik

Thun, 9. und 10. September 2016

Les mathématiques en français? Physics in English? Mathematik auf Deutsch?

Dieser Kurs wendet sich an Physik- und Mathematiklehrkräfte, die bereits englisch, deutsch oder französisch immersiv unterrichten oder es noch vorhaben. Neben Lektionsbesuchen und Referaten von Fachleuten wird es Gelegenheit für Austausch über Lehrmittel, Unterrichtsmaterial und Besonderheiten des immersiven Unterrichts geben. Der Kurs wird von der DPK und Adrian Stutz und Jürg Barblan vom Gymnasium Thun organisiert.

Details und Kontakt: juerg.barblan@gymthun.ch

Wärmestromsensoren: Neue Messmöglichkeiten für den Physikunterricht

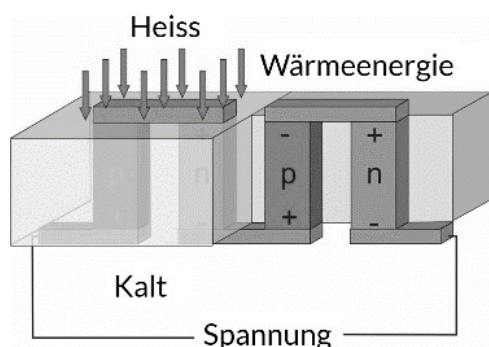
Hans Kammer, Bern, hanskammer@bluewin.ch

Manuel Kugler, ETH Zürich, kuglerm@micro.mavt.ethz.ch

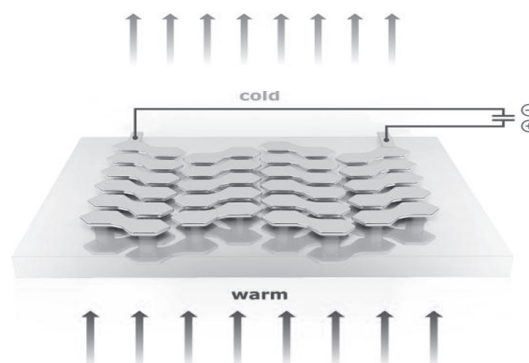
Irma Mgeladze, Gymnasium Köniz-Lerbermatt, irma.mgeladze@koeniz-lerbermatt.ch

Wärmestromsensoren

Die greenTEG AG, eine Spin-Off-Firma der ETH Zürich, stellt auf der Grundlage des klassischen Seebeck-Effekts integrierte Wärmestromsensoren her. In einem solchen Sensor sind abwechslungsweise p- und n-dotierte Halbleitersäulen aus Bismutellurid Bi_2Te_3 in Serie geschaltet (Fig. 1). Mehrere solche p-n-Thermoelemente bilden einen Wärmeflussensor (Fig. 2). Die Thermospannung des einzelnen Thermoelements wird so vervielfacht; man erzielt Werte von einigen Millivolt pro Kelvin Temperaturdifferenz am Sensor. Deshalb ist es möglich, Temperaturdifferenzen im Millikelvinbereich und damit auch kleine Wärmeströme durch den Sensor zu messen.



Figur 1: Integrierte Halbleiterthermoelemente in greenTEGs Wärmestromsensoren.



Figur 2: Wärmestromsensor mit elektrisch in Serie-geschalteten Thermoelementen.

Besteht zwischen dem oberen und dem unteren Ende der p-n-Thermoelemente eines solchen Sensors eine Temperaturdifferenz ΔT , so entsteht längs der p-n-Thermoelemente ein Temperaturgradient $\Delta T/\Delta x$ und es bildet sich ein Wärmestrom ΔQ .

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{T_1 - T_2}{l} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

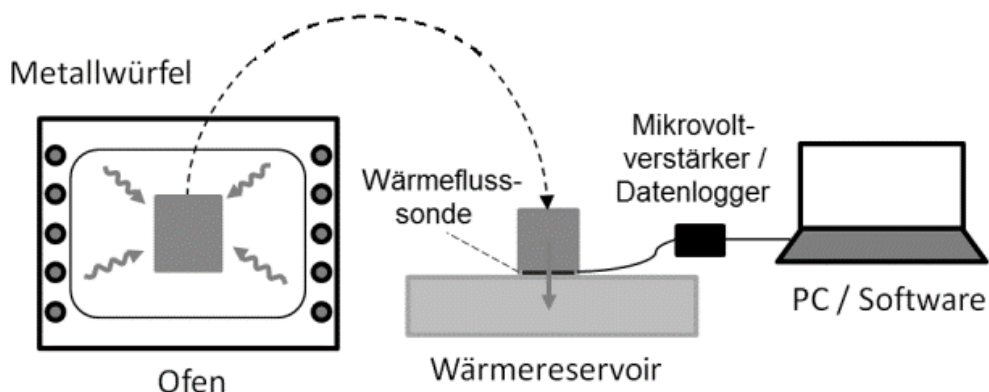
Dabei ist A die Sensorfläche und λ die Wärmeleitfähigkeit des Sensormaterials.

Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität

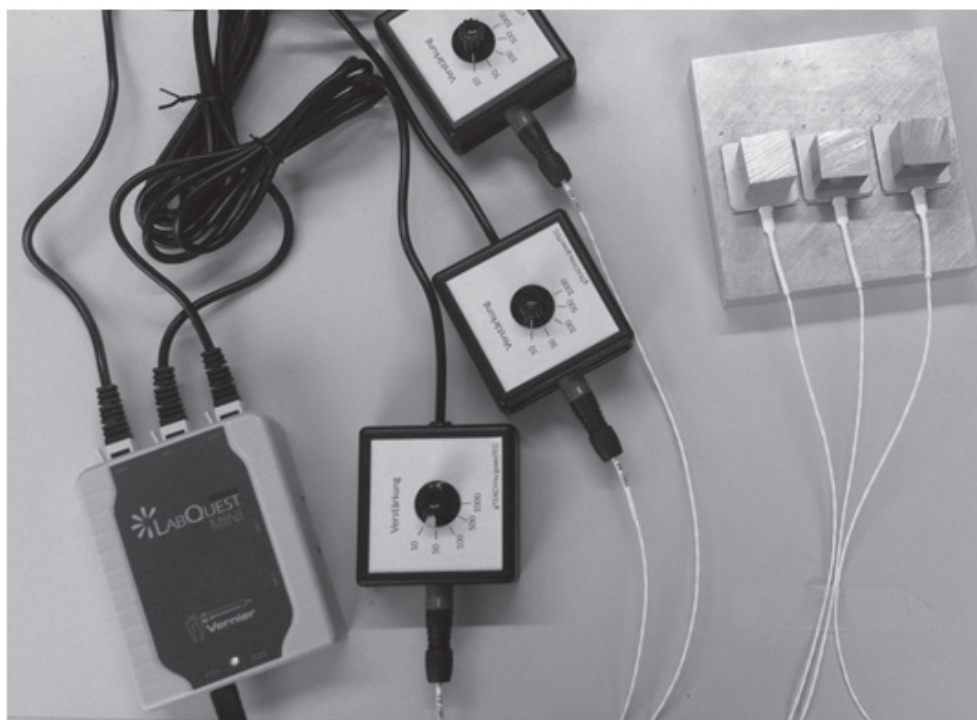
Für den Physikunterricht eröffnen diese Wärmestromsensoren neue Möglichkeiten für Messungen des Wärmetransports durch Wärmeleitung, Wärmestrahlung und Konvektion. Wir beschreiben hier einen Messvorgang zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von drei Metallwürfeln (Kupfer, Aluminium und rostfreier Stahl) mit der Wärmestrommethode (Figuren 3 bis 5).

Die Würfel werden in einem (Back-) Ofen auf eine genau bestimmte Temperatur, z.B. $40\text{ }^\circ\text{C}$, erwärmt. Anschliessend werden sie aus dem Ofen genommen und auf einen Wärmestromsensor gesetzt. Der Sensor ist auf einer ca. 2 cm dicken Aluminiumplatte befestigt, die als Wärmereservoir mit nahezu konstanter

Temperatur (z.B. 22 °C) dient. Die Sonde ist über einen Vorverstärker an ein Datenerfassungssystem, LabPro, LabQuest (Vernier) oder Lab Cradle (TI) angeschlossen. Das Datenerfassungssystem wird mit einem Computer (PC, Chrome, iOS, Android) verbunden, auf dem eine Auswertungssoftware (LoggerPro, Labquest, TI-nspire) installiert ist.

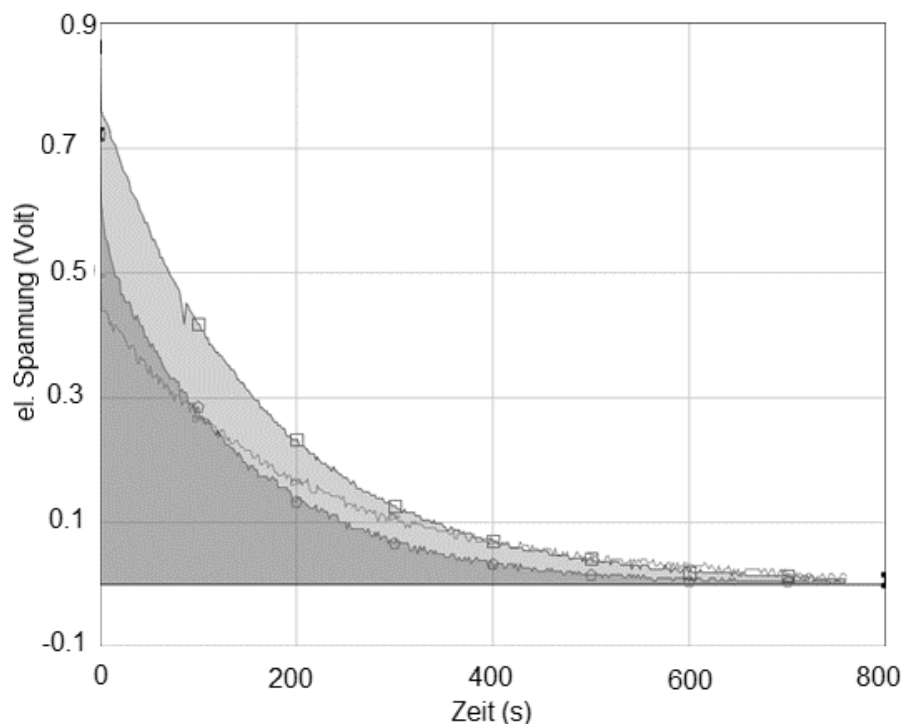


Figur 3: Schematischer experimenteller Aufbau und Ablauf der beschriebenen Wärmestrommessung zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität.



Figur 4: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von drei Metallwürfeln, von links nach rechts: Aluminium, Kupfer und rostfreier Stahl. Hier wurden drei Wärmeflussensoren auf einer Aluminiumplatte befestigt und über je einen Vorverstärker an einen LabQuest Mini angeschlossen.

Nun wird der Wärmestrom P in Funktion der Zeit t gemessen. Die durch die Sonde abgeführte Wärme ΔQ entspricht dem Integral über der Zeit t . Aus dieser Wärme, der Würfelmasse m und der Temperaturdifferenz ΔT lässt sich nun die spezifische Wärmekapazität $c_p = \Delta Q / (m \cdot \Delta T)$ berechnen. Bei dieser Messung wurden Strahlungs- und Konvektionsverluste durch die fünf nicht auf dem Sensor liegenden Würfel Flächen vernachlässigt. Die erzielte Genauigkeit liegt dennoch im Bereich von 5 %. Mit Styroporabdeckungen könnte dieser systematische Messfehler reduziert werden.



Figur 5: Messkurven des Wärmestroms $P=P(t)$ von drei Wärmestromsensoren, jeweils mit einem unterschiedlichen Metallwürfel (Aluminium, Kupfer, rostfreier Stahl) beladen.

Schlussbemerkungen

Wärmestromsensoren können für zahlreiche weitere Experimente eingesetzt werden. Beispielsweise können sie die Moll'sche Säule für Strahlungsexperimente und Messungen mit dem Leslie'schen Würfel [1] ersetzen. Sie können zur Messung der Strahlung der Sonne und von Lampen oder zur Messung des Wärmetransports durch Mauerwerk eingesetzt werden. Weitere Experimente sind auf der Firmenwebsite beschrieben [2]. Die Sensoren eignen sich neben Klassenzimmerexperimenten auch hervorragend für Maturaarbeiten, beispielsweise zur Bestimmung von U -Werten von Baumaterialien an Gebäudefassaden.

Im Rahmen eines von der Gebert RUF Stiftung finanzierten Projekts [3] wurden speziell für den Schuleinsatz robuste Wärmestromsensoren entwickelt. Ebenso ein Vorverstärker, der zu in Schulen vorhandenen Datenerfassungssystemen kompatibel ist. Die von greenTEG produzierten Wärmestromsensoren, passende Vorverstärker und Datenerfassungssysteme sind bei der Firma EducaTec AG in Döttingen erhältlich [4].

Links:

- [1] www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p5/p5523_d.pdf.
- [2] www.greenteg.com/heat-flux-sensor/gteach
- [3] www.grstiftung.ch/de/portfolio/projekte/alle/y_2014/GRS-037-14.html
- [4] www.educatec.ch

Swiss Young Physicists Tournament 2016

Patrick Lenggenhager (patrick.lenggenhager@sypt.ch), ETH Zürich

Am 1./2. April fand an der ETH Zürich das SYPT 2016 statt. Eröffnet wurde das Turnier durch die ETH Rektorin Prof. Dr. Sarah Springman. Wie gewohnt traten Teams aus verschiedenen Mittelschulen in *Physics Fights* gegeneinander an. In diesem Jahr waren zum ersten Mal nicht nur Schulen aus der Deutschschweiz, sondern auch aus der Westschweiz vertreten. Insgesamt nahmen 43 Schülerinnen und Schüler in 15 Teams teil. Die Einzelrangliste wurde geografisch vergleichsweise divers angeführt: Nicht nur Zürcher, sondern auch Winterthurer und Lausanner Kantonsschulen sowie die Zurich International School waren in den vorderen Rängen vertreten. Aus Sicht der Organisatoren war das SYPT 2016 ein voller Erfolg.

Ausblick 2017

Um diese Entwicklung zu fördern, soll nächstes Jahr eine Vorbereitungswoche für Teilnehmerinnen und Teilnehmer des SYPT aus der ganzen Schweiz durchgeführt werden. Diese soll zwar zentral in Zürich stattfinden, ist aber vor allem dazu gedacht, Teams aus anderen Regionen der Schweiz (insbesondere Ost- und Westschweiz) durch erfahrene Betreuungspersonen zu fördern.

IYNT/SYNT

Seit wenigen Jahren gibt es analog zum internationalen Bruder des SYPT, dem IYPT, auch das *International Young Naturalists' Tournament (IYNT)*, welches ein Format ähnlich dem des IYPT hat, jedoch für jüngere Teilnehmerinnen und Teilnehmer (12 – 16 Jahre) konzipiert ist. Die Problemstellungen stammen nicht nur aus der Physik, sondern auch aus Biologie und Chemie, und die Herangehensweise ist im Vergleich zum IYPT/SYPT spielerischer. Analog zum SYPT soll für 2017 eine Schweizer Ausscheidung, das SYNT, organisiert werden, mit dem Ziel, erstmals mit einem Schweizer Team am IYNT teilzunehmen.

Kontakt

An der Vorbereitungswoche oder dem SYNT interessierte Schülerinnen und Schüler bzw. deren Lehrpersonen können sich gerne unter der E-Mail-Adresse info@sypt.ch melden.



Aufenthaltswahrscheinlichkeit im freien Fall

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

1 Einleitung

Werfen wir einen Ball vertikal nach oben, so scheint er im Scheitel ein Weilchen stehen zu bleiben. Meine Schülerinnen und Schüler können das begründen, weil sie den Zeitanteil für die obere Hälfte der Fallstrecke bestimmen mussten. Die Rechnung lässt sich erweitern, indem man die Wahrscheinlichkeitsdichte berechnet, den Körper auf einer bestimmten Höhe anzutreffen. Wir werden uns auf den freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit aus der Höhe H konzentrieren; der Aufwärtswurf ist eine einfache Verallgemeinerung.

2 Theorie

Ein Massenpunkt falle ohne Anfangsgeschwindigkeit über die ganze Fallstrecke H . Dann gilt

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq h \leq H \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \leq T = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (1)$$

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, den Massenpunkt zwischen h und $h + dh$ anzutreffen? Die Variable N bezeichne die (ev. normierte) Anzahl Beobachtungen. Die Beobachtungen seien zeitlich gleichverteilt: $dN/dt = \text{const.}$ Da wir den Massenpunkt sicher während der Fallzeit T beobachten, gilt:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{T} \quad (2)$$

Jetzt brauchen wir nur noch diese Gleichverteilung zu transformieren: $dN/dt \rightarrow dN/dh$.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{1}{T} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\frac{dN}{dh} = \frac{1}{T} \frac{dt}{dh} = \frac{1}{T} \frac{d}{dh} \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4)$$

$$\frac{dN}{dh} = \frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{2\sqrt{Hh}} \quad (5)$$

3 Simulation

Da ich ohnehin für einen Praktikumsversuch meine ExcelTM-Fähigkeiten erweitern wollte, simulierte ich den im vorangehenden Abschnitt dargestellten Vorgang numerisch. Ich gab zufällig gleichverteilte Zeiten im Intervall $0 < t < T$ vor und berechnete $N = 10\,000$ Mal die durchfallene Höhe h . Die Parameterwerte sind $H = 10$ m und $g = 10$ m/s², woraus $T = \sqrt{2}$ s folgt. Die Höhen habe ich als Histogramm (Häufigkeitsverteilung) dargestellt, siehe Abbildung 1. Die Theoriekurve habe ich dazu gezeichnet. Sie passt sehr gut. Zur Kontrolle stellte ich die simulierten Daten noch doppelt logarithmisch dar, siehe Abbildung 2. Falls die Theorie korrekt ist, sollten die Daten dann auf einer Geraden liegen. Eine Ausgleichs-Potenzfunktion hat auch wie erwartet den Exponenten -0.5. (Nicht genau -1/2, vor allem weil im ersten Intervall nahe $h = 0$ die Mittelung unsauber ist.)

4 Vergleich Theorie und Simulation

Die Daten der Excel-Simulation werden in Abbildung 1 und 2 mit der Theorie verglichen. Die Parameter der Simulation sind $g = 10 \text{ m/s}^2$, $0 < h < 10 \text{ m}$, Klassenbreite $\Delta h = 0.1 \text{ m}$, $N = 10\,000$.

Abbildung 1: Histogramm der simulierten Fallstrecken mit der Theoriefunktion nach Gleichung (5). Die Beobachtungszeiten sind gleichverteilt, die beobachteten Fallstrecken sind es nicht: Die Verteilung divergiert für $h \rightarrow 0$. Positionen in der Nähe des Startpunktes werden viel wahrscheinlicher beobachtet als solche weiter unten.

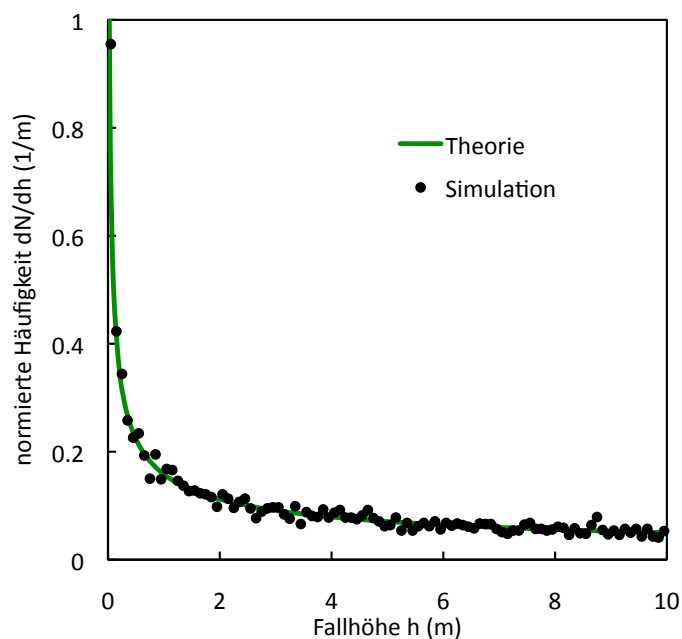
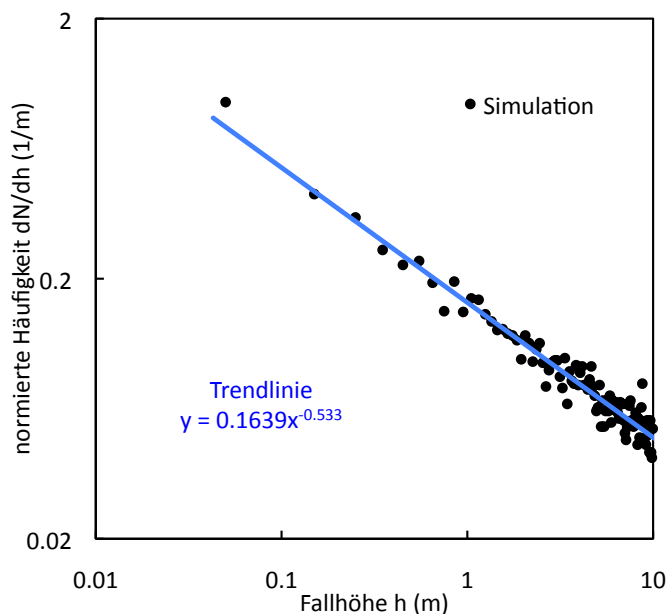


Abbildung 2: Die doppelt logarithmische Darstellung der simulierten Daten zeigt, dass sie gut durch eine Potenzfunktion dargestellt werden können. Die Ausgleichsfunktion ("Trendlinie", $y \hat{=} dN/dh$, $x \hat{=} h$) legt $dN/dh \propto 1/\sqrt{h}$ nahe. Der Vorfaktor müsste nach Theorie $1/\sqrt{4 \cdot 10} = 0.158$ sein. Der erste Datenpunkt aus der Simulation liegt daneben, weil das Intervall $0 < h < 0.1 \text{ m}$ zu nahe am Pol der Verteilung liegt. Bei grösseren Fallstrecken liegen weniger Datenpunkte in den Intervallen und die Werte streuen deshalb stärker.



Mit der Wahrscheinlichkeitsdichte lassen sich verschiedene Kennzahlen ausrechnen: Erwartungswert $E(h) = \frac{1}{3}H$, $E(h^2) = \frac{1}{5}H^2$, Varianz $\frac{4}{45}H^2$, Median $\frac{1}{4}H$ etc., die alle per Simulation kontrolliert werden können.

Eine analoge Aufgabe wäre, die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Ausschlags des harmonischen Oszillators zu berechnen. Sie hat eine gewisse Bedeutung als Limes der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsdichte des harmonischen Oszillators für hohe Quantenzahlen.

24. März 2016, Lie.

Internationale Physik-Olympiaden (IPhO) 2015 und 2016

Andrea Schneider, Internationale Physik-Olympiade 2016, andrea.schneider@ipho2016.org

Schweizer Nachwuchsphysiker ausgezeichnet an der IPhO 2015 in Mumbai

Über 380 Jugendliche aus der ganzen Welt haben sich im Juli 2015 an der Internationalen Physik-Olympiade IPhO in Mumbai, Indien gemessen. Die fünf Schweizer gewannen verdiente Auszeichnungen mit zwei Bronzemedailen und drei Honorable Mentions.



Von links: Anian Altherr aus Arnegg (Gymnasium Friedberg, SG, Honorable Mention), Linus Geiser aus Suhr (Kantonsschule Aarau, AG, Bronze), Andrea Gebek aus Unterseen (Gymnasium Interlaken, BE, Honorable Mention), Mattia Humbel aus Burg (beide Alte Kantonsschule Aarau, AG, Bronze) sowie Kajo Krummenacher aus Kriens (Kantonsschule Alpenquai, LU, Honorable Mention). Kniend die beiden Betreuer des Schweizer Teams Lionel Philippoz und Pierre-François Duc.

„Wir haben riesig profitiert von den neun Tagen in Mumbai. Wenn wir auch nicht mit Goldmedaillen nach Hause kommen, bleiben uns doch viele unvergessliche Erinnerungen“, meinte einer der Teilnehmer. „Es war faszinierend, Gleichaltrige von 83 Delegationen kennenzulernen. Und wir haben gemerkt, dass wir uns viel ähnlicher sind, als wir vermutet haben. Nicht zuletzt verbindet uns die Leidenschaft zur Physik.“

Die fünf Schweizer Finalisten haben sich in einem mehrstufigen nationalen Auswahlverfahren qualifiziert und durften nach intensiven Trainings zusammen mit zwei engagierten Betreuern nach Indien reisen. Diese Betreuer sind zwei der vielen Freiwilligen der Schweizer Physik-Olympiade, welche jedes Jahr viel Zeit in die Vorbereitungsarbeit investieren. Dass sich diese mit den gewonnenen Auszeichnungen ausgezahlt hat, motiviert das ganze Team.

Herausfordernde Aufgaben

Pierre-François Duc, Betreuer des Schweizer Teams: „Die Aufgaben waren herausfordernd und hatten einen starken Bezug zu aktuellen Forschungsthemen. Ich bin überzeugt, dass die teilnehmenden Mittelschüler durch die Aufgabenstellung inspiriert worden sind, den Themen nach den Prüfungen noch vertieft nachzugehen.“ Und weiter meinte er: „Die Organisatoren haben mit viel Passion und grossem Aufwand die Prüfungen erarbeitet, was uns anspornt, für das kommende Jahr ebensolche Aufgaben für die Austragung in Zürich auszuarbeiten.“

Als Beispiel standen in der ersten Aufgabe die Sonne und ihre Physik im Zentrum. Verlangt wurden unter anderem Berechnungen zur Temperatur der Sonne. Darüber hinaus gab es auch Aufgabenteile, welche der Frage nachgingen, „wie“ die Sonne scheint und wie wir dies trotz der 150 Millionen Kilometer Entfernung überhaupt wissen können.

Internationale Physik-Olympiade (IPhO) 2016 in Zürich

Die 47. Internationale Physik-Olympiade wird vom 11. – 17. Juli 2016 von den Gastgeberländern Schweiz und Liechtenstein gemeinsam durchgeführt. Die Wettbewerbe werden am Irchel Campus der Gastgeber-Universität Zürich stattfinden. Das Rahmenprogramm wird die rund 900 internationalen Teilnehmenden und deren Betreuer quer durch beide Länder führen – wobei Besuche am CERN und PSI sowie ein Ausflug in die Berge nicht fehlen dürfen.

Wollen Sie an der IPhO 2016 dabei sein?

Wenn auch die Anmeldefrist für die nationalen Ausscheidungen verstrichen ist, vielleicht sind Sie oder Ihre Schüler interessiert, am einzigartigen Grossereignis teilzunehmen. Wir suchen interessierte Volunteers, die verschiedenste Kenntnisse für vielfältige Einsatzbereiche mitbringen. Da gibt es zum Beispiel den sprachgewandten Team Guide, der während des gesamten Anlasses eine Delegation begleitet und betreut. Natürlich steht dabei die Unterstützung der Organisation im Vordergrund, aber beim Einsatz als Volunteer sollen auch gesellschaftliche Aspekte nicht zu kurz kommen. Die Freiwilligen können sich ein internationales Netzwerk zu Wissenschaftlern und anderen Freiwilligen aufbauen und es besteht die Möglichkeit, Erfahrungen in der Organisation einer Grossveranstaltung zu sammeln. Mehr Details über die möglichen Einsatzbereiche finden Sie auf unserer Webseite. <http://www.ipho2016.org/teilnehmer-helfer>.

Internationale Physik-Olympiade IPhO

Die Internationale Physik-Olympiade IPhO ist ein Wettbewerb für junge Physikerinnen und Physiker, die sich für mehr als den Mittelschulstoff interessieren. Die Schweiz nimmt seit 1995 an der IPhO teil. Das Ziel der Olympiaden ist die Herausforderung und Ermutigung wissenschaftlich interessierter und begabter Mittelschülerinnen und -schüler sowie der internationale Austausch. Jedes der 86 Teilnehmerländer kann ein Team von maximal 5 Jugendlichen unter 20 Jahren stellen, die in der nationalen Olympiade ihres Landes selektiert worden sind. Die erste Runde der Schweizer Physik-Olympiade SwissPhO 2016 absolvierten gegen 100 Schweizer und Liechtensteinische Teilnehmende.

Die Organisation der SwissPhO, die Teilnahme der Schweizer und Liechtensteinischen Delegationen an den IPhO sowie die nationale Vorbereitung übernimmt der Verein SwissPhO und seine ehrenamtlich tätigen Mitglieder. Der Verein ist Mitglied im Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden und dadurch in stetem Austausch mit den Olympiaden in Biologie, Chemie, Geographie, Informatik, Mathematik und Philosophie.

www.ipho2016.org – Internationale Physik-Olympiade IPhO 2016 in Zürich, Schweiz

www.facebook.com/IPhO2016 sowie www.facebook.com/Einsteinsein

www.swisspho.ch – Schweizer Physik-Olympiade SwissPhO

www.olympiads.ch – Verband Schweizer Wissenschafts-Olympiaden

17. Schweizerischer Tag für Physik und Unterricht

Mittwoch, 07. September 2016, 13:00 - 17:30 Uhr an der ETH Zürich (Zentrum)

Themen: Informatik, Smartdevices im Unterricht und Exoplaneten

- 12:30 - 13:00 Begrüssungskaffee
- 13:00 - 13:30 **Eröffnung und Verleihung des MINT Preises**
- 13:30 - 14:15 **"The Algorithm as Lens on the Sciences" or "Computation as a scientific Weltanschauung"**
Prof. Christos Papadimitriou, University of California at Berkeley.
- 14:30 - 15:30 **iMobile Physics: Experimente mit Smartphone, Tablet-PC & Co. im Physikunterricht**
Prof. Jochen Kuhn, Universität Kaiserslautern.
Zu diesem Thema führen wir am 18. November 2016 eine ganztägige Weiterbildung an der ETH durch.
- 15:30 - 16:00 **Kaffeepause mit Austauschmöglichkeit**
- 16:00 - 17:00 **Extra-solare Planeten: die Suche nach Leben im Weltraum**
Prof. Hans Martin Schmid, ETH Zürich
- 17:00 - 17:30 **Apéro**

Gleichzeitig finden die Studieninformationstage an der ETH und der Universität Zürich statt. An Ständen im Hauptgebäude stellen sich die Studiengänge der ETH von 9:00 bis 16:00 Uhr vor.

Treffpunkt (wird später präzisiert)

Ort: ETH Zentrum, Hauptgebäude

Anmeldung:

Mailen, faxen oder schicken Sie die Anmeldung bitte spätestens bis zum 31. August 2016 an:

Andreas Vaterlaus, ETH Hönggerberg HPF G4.1, 8093 Zürich.

FAX 044 633 1623

Email: vaterlaus@phys.ethz.ch

(für eine frühzeitige, evtl. auch provisorische Anmeldung sind wir sehr dankbar!)

Kosten: keine

Angaben:

Name und Vorname:

Schule:

Email:

DIE NEUEN VERNIER-PRODUKTE JETZT BEI EDUCATEC BESTELLEN

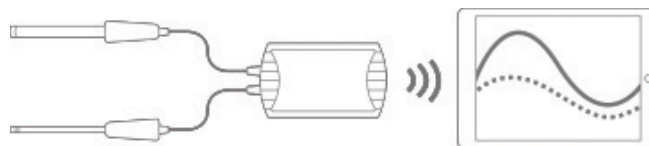
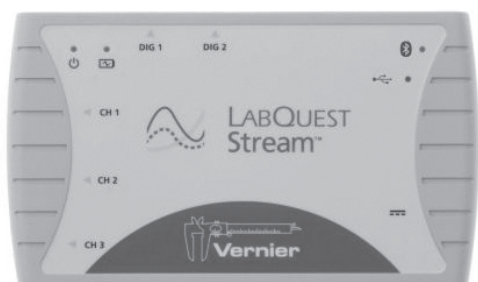
educatec.ch/vernier

VERNIER LABQUEST STREAM™



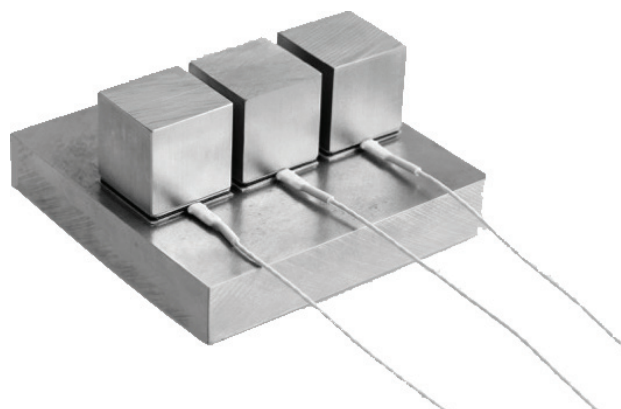
Ab Spätfrühling neu verfügbar.

Der neue Datenlogger LabQuest Stream von Vernier erfüllt alle Anforderungen moderner und mobiler Lernumgebungen. Er verbindet kabelbasierte und drahtlose Konnektivität in einem Gerät. So können mit dem LabQuest Stream Messdaten via USB-Kabel an Computer übertragen, bzw. drahtlos an Mobilgeräte (Android/iOS) sowie an kompatible Computer gestreamt werden. Die drahtlose Verbindung geschieht über Bluetooth (Bluetooth Low Energy/Bluetooth Smart), was wegen des geringen Energieverbrauchs lange Betriebszeiten ohne Netzspeisung erlaubt.



gTEACH PROJEKT

Das von der Gebert RUF Stiftung finanzierte Projekt „Mit Wärmeflussmessungen die Thermodynamik begreifen“ soll Schülerinnen und Schülern thermodynamisches Grundwissen spielerisch vermitteln und ihnen die zentrale Bedeutung von Wärme in unserem Leben aufzeigen. Das Projekt entstand in Kollaboration mit der ETH Zürich und der greenTEG AG. Ein erhofftes Ziel ist es, den bewussteren Umgang mit Wärmeenergie zu fördern und unnötigen Energieverbrauch durch Sensibilisierung zu verringern; eine wichtige Voraussetzung, um die angestrebten Energieziele zu erreichen.



gSKIN® Wärmeflussensoren sind mit LabQuest Stream und anderen Datenlogger von Vernier kompatibel.

EducaTec AG bietet diesen Sensor als Produkt an. Weitere Informationen zum gTEACH Projekt finden Sie in unserem neuen Shop unter www.educatec.ch/greenteg



Weitere Informationen finden Sie in unserem Online Shop unter www.educatec.ch
Für weitere Kataloge von uns wenden Sie sich an contact@educatec.ch

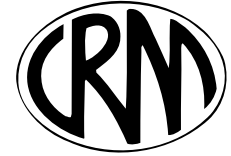
Neuer Shop

EducaTec AG

Altes Schulhaus, Kanzleigasse 2
Postfach, 5312 Döttingen

T +41 56 245 81 61, F +41 56 245 81 63
contact@educatec.ch, www.educatec.ch

educaTEC



Corso d'aggiornamento 2016

Eadem mutata resurgo

L'eredità dei Bernoulli

Ascona (TI), 20-23 settembre 2016

Il secondo corso d'aggiornamento organizzato congiuntamente dalla CMSI e dalla CRM vuole celebrare i numerosi contributi scientifici della famiglia Bernoulli. Si è deciso di rivisitare una parte delle opere di Jakob e Johann, senza tralasciare i lavori di Daniel e di altri membri della famiglia. Il titolo del corso, *Eadem mutata resurgo* ("sebbene cambiata, rinasco identica"), si riferisce alla spirale logaritmica o *spira mirabilis*, curva studiata da Jakob, che l'ha affascinato a tal punto che volle fosse incisa sulla sua tomba a Basilea.

Gli argomenti che saranno trattati durante il corso includeranno lavori di Jakob e Johann nell'ambito del calcolo differenziale e integrale (in particolare le equazioni differenziali), contributi di Johann e Nikolaus nel calcolo delle probabilità (*Ars conjectandi*), i lavori di Daniel nell'ambito dell'idrodinamica (equazione di Bernoulli) e della medicina (modello della diffusione del vaiolo), senza dimenticare i numeri di Bernoulli e la loro occorrenza in diversi ambiti della matematica. Il corso sarà pure l'occasione per conoscere la Società Bernoulli-Euler e le sue attività.

Vi invitiamo cordialmente ad unirci a noi per celebrare l'eredità scientifica di una delle famiglie di matematici e di scienziati più influenti che il mondo abbia conosciuto.

Pagina Internet del corso

<http://www.vsmf.ch/crm/cours/>

Relatori

Emanuele Delucchi (Università di Friburgo)
Jean-Pierre Gabriel (Università di Friburgo)
Philippe Henry
Hans-Christof Im Hof (Università di Basilea)
Martin Mattmüller (Società Bernoulli-Euler)
Gerhard Wanner (Università di Ginevra)

Organizzatori

Arno Gropengiesser (CMSI)
José Luis Zuleta (CRM)

Iscrizioni

wbz cps

Corso WBZ CPS 16.04.02
www.webpalette.ch

Schweizerische Weiterbildungszentrale
Centre suisse de formation continue
Centro svizzero di formazione continua

Termine d'iscrizione: 30 giugno 2016

Prezzo del corso: 350.-

(con una riduzione per i membri della SSIMF)

Luogo del corso

Congressi Stefano Franscini (CSF)
Fondazione Monte Verità
Via Collina 84
6612 Ascona
091 785 40 54/56
www.csf.ethz.ch

Alloggio

Ogni partecipante è responsabile della propria prenotazione all'albergo:

Albergo Monte Verità
Via Collina 84
6612 Ascona
091 785 40 40
info@monteverita.org

Disponibilità per una trentina di camere (a partire da 120 franchi/notte in camera singola).

Una lista d'alberghi è disponibile sul sito
www.ascona-locarno.com



Cours de perfectionnement 2016

Eadem mutata resurgo **L'héritage des Bernoulli**

Ascona (TI), 20–23 septembre 2016

Pour leur deuxième cours de perfectionnement organisé en commun, la CRM et la CMSI souhaitent célébrer les nombreuses contributions scientifiques de la famille Bernoulli. Il sera question de revisiter une partie de l'oeuvre de Jakob et Johann, sans oublier les travaux de Daniel et des autres membres de la famille. Le titre du cours, *Eadem mutata resurgo* («déplacée je ressurgis à l'identique»), fait référence à la spirale logarithmique ou *spira mirabilis*, courbe étudiée par Jakob, qui l'a fasciné au point qu'il a demandé qu'elle soit gravée sur sa tombe à Bâle.

Les sujets qui seront présentés pendant le cours incluront notamment les travaux de Jakob et Johann dans le domaine du calcul différentiel et intégral (équations différentielles), les contributions de Johann et Nikolaus dans le calcul des probabilités (*Ars conjectandi*), le travail de Daniel dans les domaines de l'hydrodynamique (équation de Bernoulli) et de la médecine (modèle de la variole), sans oublier les nombres de Bernoulli et leur apparition dans plusieurs domaines des mathématiques. Le cours sera aussi l'occasion de découvrir les activités de la Société Bernoulli-Euler.

Nous vous invitons à nous rejoindre pour célébrer l'héritage scientifique de l'une des familles de mathématiciens et scientifiques les plus influentes que le monde ait connu.

Page web du cours

<http://www.vsmf.ch/crm/cours/>

Conférenciers

Emanuele Delucchi (Université de Fribourg)
Jean-Pierre Gabriel (Université de Fribourg)
Philippe Henry
Hans-Christof Im Hof (Université de Bâle)
Martin Mattmüller (Société Bernoulli-Euler)
Gerhard Wanner (Université de Genève)

Organisateurs

Arno Gropengiesser (CMSI)
José Luis Zuleta (CRM)

Inscription

wbz cps

Cours WBZ CPS 16.04.02
www.webpalette.ch

Schweizerische Weiterbildungszentrale
Centre suisse de formation continue
Centro svizzero di formazione continua

Délai d'inscription : 30 juin 2016

Prix du cours : 350.-

(réduction pour les membres de la SSPES)

Lieu du cours

Congressi Stefano Franscini (CSF)
Fondazione Monte Verità
Via Collina 84
6612 Ascona
091 785 40 54/56
www.csf.ethz.ch

Logement

Chaque participant est responsable de sa réservation à l'hôtel:
Albergo Monte Verità
Via Collina 84
6612 Ascona
091 785 40 40
info@monteverita.org

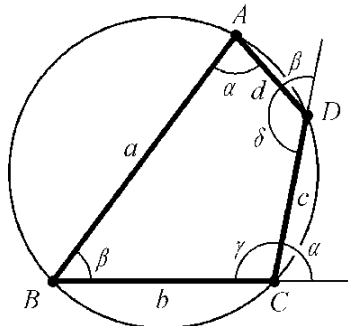
Il y a environ une trentaine de chambres disponibles (dès 120 francs par nuit en chambre simple).

Une liste d'autres hôtels est disponible sur le site
www.ascona-locarno.com

Einfache Konstruktion des Sehnenvierecks

Willi Köchli

Figur 1: Festlegung der Bezeichnungen



Im Sehnenviereck sind gegenüberliegende Winkel supplementär,
 $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$.

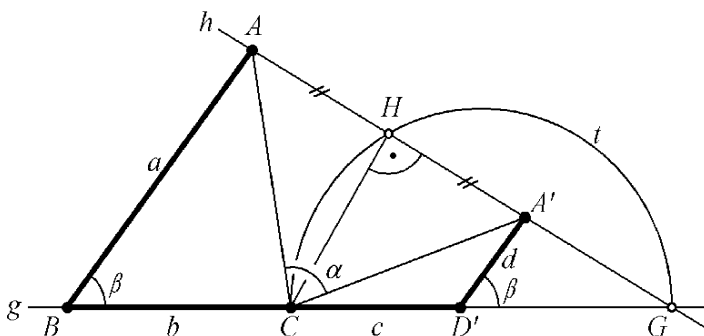
Gegeben: Seitenlängen a, b, c, d .

Gesucht: β .

Meistens empfiehlt es sich, die Seiten nach Länge zu sortieren: $a \geq b \geq c \geq d$.

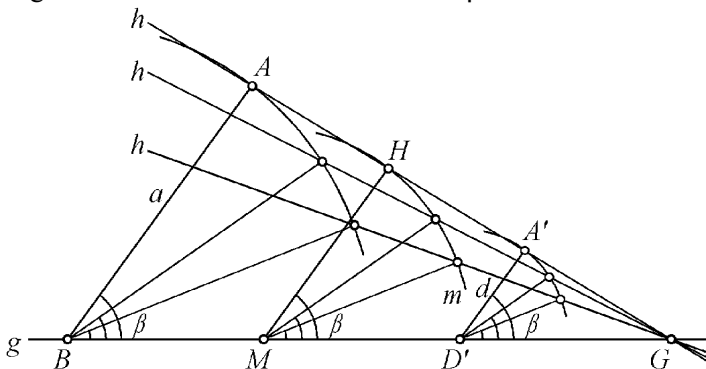
Die Idee: Wird das Dreieck CDA um $-\alpha$ weggedreht, kommen a und d parallel zu liegen. Günstiger Drehpunkt ist C.

Figur 2: Hilfsriss mit weggedrehtem Dreieck CDA



Die Gerade durch B, C und D' heisse g , jene durch A und A' h . Der Schnittpunkt von g und h heisse G. Das Dreieck $A'AC$ ist gleichschenkelig mit Basis $A'A$. Der Fusspunkt der Basishöhe heisse H. H liegt auf dem Thaleskreis t über CG und zugleich in der Mitte zwischen A und A' .

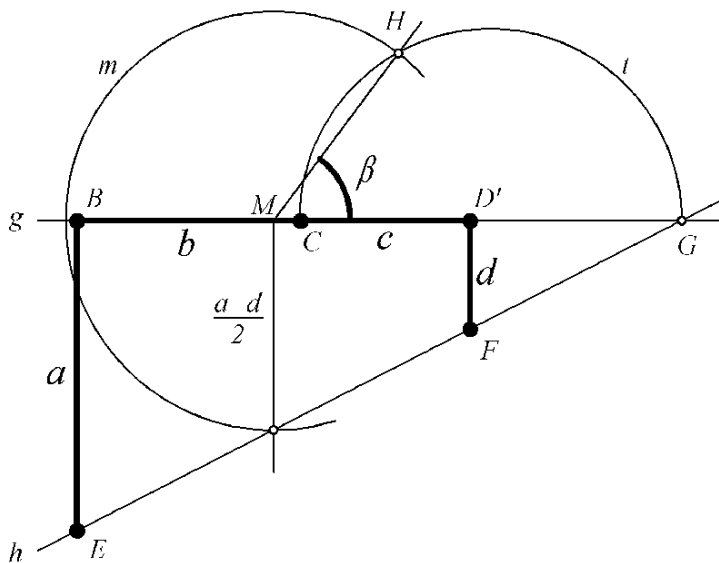
Figur 3: Verhältnisse bei variierendem β



A bewegt sich auf einem Kreis mit Mittelpunkt B und Radius a , A' auf einem Kreis mit Mittelpunkt D' und Radius d , H auf einem Kreis m mit Mittelpunkt M und Radius $(a+d)/2$. M liegt in der Mitte zwischen B und D' . Laut Zweitem Strahlensatz gehen alle Geraden h durch den selben Punkt G. Es gibt daher nur den einen

Thaleskreis t , und H resultiert als Schnittpunkt von m und t , β als Winkel GMH . Die Konstruktion wird denkbar einfach.

Figur 4: Konstruktion



Konstruktionsfolge:

- 1) Gerade g mit Punkt B .
- 2) Punkt C auf g mit Abstand b von B . Punkt D' auf g mit Abstand c von C .
- 3) Punkt E mit Abstand a von B . Punkt F mit Abstand d von D' . $D'F$ parallel BE .
- 4) Gerade h durch E und F . Schnittpunkt G von h und g .
- 5) Thaleskreis t über CG .
- 6) Mittelpunkt M zwischen B und D' . Mittenkreis m mit Zentrum M und Radius $(a+d)/2$.
- 7) Schnittpunkt H von m und t .
- 8) $\beta = \text{Winkel } GMH$.

Bei fastquadratischen Sehnenvierecken kommt G ausserhalb des Papiers zu liegen. Dann dreht man besser um γ statt um $-\alpha$, bei fast gleicher Konstruktionsfolge.

Willi Köchli, Höschstrasse 15, 8706 Feldmeilen, kex@bluewin.ch

Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (2. Teil)

Peter Thurnheer, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, tpeter@math.ethz.ch

Nachdem wir im 1. Teil die geometrischen Resultate, von denen Morley ausging, und seine ersten Verallgemeinerungen formuliert haben, kommen wir im 2. Teil zu seiner in [1] entwickelten Methode, welche den Zusammenhang zwischen Geometrie und komplexen Zahlen herstellt.

Komplexe Kreiskoordinaten

Die Konjugiertkomplexe einer komplexen Zahl $z = a + ib$ bezeichnen wir mit $\bar{z} = a - ib$.

Komplexe Zahlen vom Betrag 1 bezeichnen wir im Folgenden mit t, t^*, t_0, t_1, \dots etc. oder τ_0, τ_1, \dots und nennen sie, wie Morley, kurz Turns. Für diese und nur für diese gilt insbesondere

$$\bar{t} = \frac{1}{t}. \quad (2)$$

Die rationalen Kurven, um die es geht, werden nun nicht in reellen kartesischen Koordinaten x, y beschrieben, sondern in der komplexen Ebene $z = x + iy$ als Bilder des komplexen Einheitskreises \mathbb{E} durch die entsprechenden Abbildungsgleichungen. Für Geraden geben wir schliesslich auch eine (Kreis-)Koordinatengleichung. Sprachlich identifizieren wir dabei die komplexen Zahlen mit den sie repräsentierenden Punkten in der komplexen Ebene.

Gerade

Bei gegebenem x_0 und für einen beliebigen festen Turn τ_0 beschreibt die Gleichung

$$z = z(t) = \frac{x_0 \tau_0}{\tau_0 - t} \quad (3)$$

eine Gerade in dem Sinn, dass z in der komplexen Ebene die Mittelnormale der Strecke zwischen 0 und x_0 durchläuft, wenn t auf dem Einheitskreis \mathbb{E} variiert.

Dies folgt wegen $|z| \rightarrow \infty, t \rightarrow \tau_0$ daraus, dass — wie man sofort sieht — für jeden Turn $t \neq \tau_0$ gilt $|z| = |z - x_0|$. Man kann auch abbildungsgeometrisch argumentieren: Die zu diskutierende Kurve ist das Bild von \mathbb{E} unter der komplexen Inversion $z(w) = \frac{x_0 \tau_0}{\tau_0 - w}$.

Eine solche bildet Möbiuskreise — hier \mathbb{E} — auf Möbiuskreise — hier offensichtlich eine Gerade — ab. Dabei gehen zur Ausgangskurve inverse Punkte — wie hier 0 und ∞ — in zum Bild inverse Punkte über — hier sind dies dann x_0 und 0.

Ueber den Turn τ_0 können wir frei verfügen und wählen $\tau_0 = \frac{\bar{x}_0}{x_0}$.

Mit (2) lautet die zu (3) konjugierte Gleichung

$$\bar{z}(t) = \frac{\bar{x}_0 t}{t - \tau_0}.$$

Bei gegebenem x_0 liegt der Punkt z somit auf der Mittelnormalen der Strecke zwischen 0 und x_0 dann und nur dann, wenn gilt

$$\frac{z}{x_0} + \frac{\bar{z}}{\bar{x}_0} = 1. \quad (4)$$

In diesem Sinn ist (4) die Koordinatengleichung der Geraden. In der Form, in der wir dies später brauchen:

Bei gegebenem x_0 beschreibt die Gleichung

$$z\tau_0 + \bar{z} = x_0\tau_0 \quad \text{mit } \tau_0 = \frac{\bar{x}_0}{x_0}$$

eine Gerade. Wir bezeichnen diese ebenfalls mit x_0 .

Im Folgenden bezeichnen wir die Geraden einer (n) -Konfiguration stets mit x_1, x_2, \dots, x_n und die sie definierenden Turns mit $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$.

Kreis

Offensichtlich gilt

Bei gegebenen a und b , beschreibt die Gleichung

$$z = z(t) = a + bt, \quad t \in \mathbb{E},$$

den Kreis mit Zentrum a und Radius $|b|$.

Limaçon Kurve

Bei gegebenen a, b, c beschreibt die Gleichung

$$z = z(t) = a + bt + ct^2, \quad t \in \mathbb{E},$$

eine Limaçon Kurve.

Beweis.

Sei $t = t_0\tilde{t}$ mit einem allgemeinen Turn \tilde{t} und dem festen Turn t_0 , für den gilt

$$\arg t_0 = \arg b - \arg c.$$

Dann ist $\frac{b}{ct_0} = k$ reell, und die zu diskutierende Gleichung lautet

$$z(\tilde{t}) = a + ct_0^2(k\tilde{t} + \tilde{t}^2), \quad \tilde{t} \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{R}.$$

Eine Variation der Konstanten a , respektive ct_0^2 unterwirft die Kurve einer Translation, respektive einer Drehstreckung. Es genügt eine Gleichung folgender Form zu studieren:

$$z(t) - 1 = kt + t^2, \quad t \in \mathbb{E}, k \in \mathbb{R}.$$

Mit $t = \cos \varphi + i \sin \varphi$ wird

$$\begin{aligned} z(t) - 1 &= k \cos \varphi + ik \sin \varphi + \cos^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi - \sin^2 \varphi, \\ z(t) &= k \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi + i(k \sin \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi). \end{aligned}$$

Im (x, y) -Koordinatensystem, $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$, erhält man für die Kurve damit eine Parameterdarstellung der Form (1), (s. Teil 1). \square

Schnittpunkt

Der Schnittpunkt der Geraden x_1, x_2 :

$$z\tau_1 - \bar{z} = x_1\tau_1$$

$$z\tau_2 - \bar{z} = x_2\tau_2$$

ist der Punkt

$$z_{1,2} = \frac{x_1\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} + \frac{x_2\tau_2}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (5)$$

Man sieht dies sofort, indem man \bar{z} aus den Geradengleichungen eliminiert.

Notation

Für Folgen x_1, x_2, \dots, x_n und $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ werden wir kurz schreiben

$$\begin{aligned} & \frac{x_1\tau_1^\alpha}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3) \cdots (\tau_1 - \tau_n)} + \frac{x_2\tau_2^\alpha}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4) \cdots (\tau_2 - \tau_1)} + \cdots \\ & \cdots + \frac{x_n\tau_n^\alpha}{(\tau_n - \tau_1)(\tau_n - \tau_2) \cdots (\tau_n - \tau_{n-1})} = \sum^* \frac{x_1\tau_1^\alpha}{(\tau_1 - \tau_2) \cdots (\tau_1 - \tau_n)}. \end{aligned}$$

Charakteristische Konstanten

Definition. Die charakteristischen Konstanten einer (n) -Konfiguration sind die Grössen

$$a_m = a_{n,m} = \sum^* \frac{x_1\tau_1^{n-m}}{(\tau_1 - \tau_2) \cdots (\tau_1 - \tau_n)}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Den ersten Index schreiben wir nur, wenn dies wirklich nötig scheint.

Die folgenden Eigenschaften (7), (8) und (9) sind fundamental für den Beweis der Sätze! Auf ihnen beruhen die Sätze überhaupt.

Mit $s_k = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$ gilt

$$\bar{a}_{k,m} = (-1)^{k-1} s_k a_{k,k+1-m}, \quad m = 1, 2, \dots, k, \quad (7)$$

und damit

$$|a_{k,m}| = |a_{k,k+1-m}|, \quad m = 1, 2, \dots, k. \quad (8)$$

Beweis.

Mit (2) und (6) ist, wenn man noch beachtet, dass gilt $\bar{x}_j = x_j\tau_j$, $j = 1, 2, \dots, k$:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{k,m} &= \sum^* \frac{\bar{x}_1\tau_1^{m-k}}{\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2}\right) \cdots \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_k}\right)} = \sum^* \frac{\bar{x}_1\tau_1^{m-k}}{\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1\tau_2} \cdots \frac{\tau_k - \tau_1}{\tau_1\tau_k}} \\ &= (-1)^{k-1} \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k \sum^* \frac{x_1\tau_1\tau_1^{k-2}\tau_1^{m-k}}{(\tau_1 - \tau_2) \cdots (\tau_1 - \tau_k)} = (-1)^{k-1} s_k a_{k,k+1-m}. \end{aligned}$$

Wegen $|s_k| = 1$ folgt daraus unmittelbar (8). □

Entfernt man aus einer (n) -Konfiguration eine Gerade x_j , $j = 1, 2, \dots, n$, so erhält man eine $(n - 1)$ -Konfiguration mit den charakteristischen Konstanten

$$a_{n-1,m} = a_{n,m} - a_{n,m+1}\tau_j, \quad m = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (9)$$

Beweis.

Es ist offensichtlich, dass es genügt die Beziehungen für $j = 1$ und $m = 1$ zu zeigen.

$$\begin{aligned} a_{n,1} - a_{n,2}\tau_1 &= \frac{x_1\tau_1^{n-1}}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3) \cdots (\tau_1 - \tau_n)} \\ &\quad + \frac{x_2\tau_2^{n-1}}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4) \cdots (\tau_2 - \tau_1)} + \cdots + \frac{x_n\tau_n^{n-1}}{(\tau_n - \tau_1)(\tau_n - \tau_2) \cdots (\tau_n - \tau_{n-1})} \\ &\quad - \frac{x_1\tau_1\tau_1^{n-2}}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3) \cdots (\tau_1 - \tau_n)} \\ &\quad - \frac{x_2\tau_1\tau_2^{n-2}}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4) \cdots (\tau_2 - \tau_1)} - \cdots - \frac{x_n\tau_1\tau_n^{n-2}}{(\tau_n - \tau_1)(\tau_n - \tau_2) \cdots (\tau_n - \tau_{n-1})} \\ &= 0 + \frac{x_2\tau_2^{n-2}(\cancel{\tau_2} \cancel{\tau_1})}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4) \cdots (\cancel{\tau_2} \cancel{\tau_1})} + \cdots + \frac{x_n\tau_n^{n-2}(\cancel{\tau_n} \cancel{\tau_1})}{(\cancel{\tau_n} \cancel{\tau_1})(\tau_n - \tau_2) \cdots (\tau_n - \tau_{n-1})}, \end{aligned}$$

die erste charakteristische Konstante $a_{n-1,1}$ der $(n-1)$ -Konfiguration, welche x_1 nicht mehr enthält. \square

Umkreis

Der Umkreis des durch die Geraden einer (3) -Konfiguration definierten Dreiecks ist der Kreis

$$z = z(t) = a_{3,1} - a_{3,2}t, \quad t \in \mathbb{E}, \quad (10)$$

mit Mittelpunkt $a_{3,1}$ und Radius $|a_{3,2}|$.

Schreibt man nämlich die Kreisgleichung mit Hilfe der Definition (6) der charakteristischen Konstanten um, so erhält sie die Form

$$z(t) = \frac{x_1\tau_1(\tau_1 - t)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} + \frac{x_2\tau_2(\tau_2 - t)}{(\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_1)} + \frac{x_3\tau_3(\tau_3 - t)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}, \quad t \in \mathbb{E}.$$

Dabei sieht man unmittelbar, dass man für $t = \tau_1, \tau_2, \tau_3$ aufgrund von (5) als Kreispunkte die Schnittpunkte von je zwei der drei Geraden erhält.

Beweis der Sätze

Wichtig: Wir werden nun immer mit den charakteristischen Konstanten a_1, a_2, \dots der Konfiguration von der wir ausgehen rechnen. Entfernen wir aus dieser eine Gerade, so drücken wir die charakteristischen Konstanten der entstehenden, reduzierten Konfiguration mit Hilfe von (9) durch diejenigen der Ausgangskonfiguration aus.

Beweis Satz 1

Wir beweisen den Satz und beschreiben die Zentrumskreise, indem wir zeigen:

Der Zentrumskreis einer (k) -Konfiguration, $k \geq 3$, ist der Kreis

$$z = z(t) = a_1 - a_2 t, \quad t \in \mathbb{E}. \quad (11)$$

Beweis.

Mit *vollständiger Induktion* über die Anzahl k der Geraden in der Konfiguration.

Verankerung: Nach (10) ist der Umkreis einer (3)-Konfiguration von der Form (11).

$$\text{Der Umkreis einer (3)-Konfiguration ist der Zentrumskreis der Konfiguration.} \quad (12)$$

Induktionsvoraussetzung: Aussage (11) gilt für $k = n - 1$.

Entfernt man eine Gerade x_j aus einer (n) -Konfiguration, so erhält man eine $(n - 1)$ -Konfiguration. Deren Zentrumskreis ist nach Induktionsvoraussetzung, wenn man (9) beachtet, der Kreis

$$z_j(t) = a_1 - a_2(t + \tau_j) + a_3 t \tau_j, \quad t \in \mathbb{E}, \quad (13)$$

mit Zentrum $a_1 - a_2 \tau_j$.

Die Zentren dieser Kreise liegen damit offensichtlich für alle $j = 1, 2, \dots, n$ auf dem Kreis

$$z(t) = a_1 - a_2 t, \quad t \in \mathbb{E}. \quad (14)$$

Dieser Kreis ist der Zentrumskreis der (n) -Konfiguration, was zu zeigen war. \square

Beweis Satz 2

Wir beweisen den Satz und beschreiben den Zentrumspunkt w , indem wir zeigen:

Die Zentrumskreise der n $(n - 1)$ -Konfigurationen einer (n) -Konfiguration gehen durch den Punkt

$$w = a_1 - \frac{a_2 \bar{a}_3}{\bar{a}_2}.$$

Beweis.

Zuerst zeigen wir:

$$\text{Der Quotient } t_0 = \frac{a_2}{\bar{a}_2} \cdot \frac{\bar{a}_2 \tau_j - \bar{a}_3}{a_3 \tau_j - a_2} \text{ ist ein Turn.} \quad (15)$$

Dies folgt daraus, dass mit (2) gilt $\bar{t}_0 = \frac{1}{t_0}$.

Der Zentrumskreis der $(n - 1)$ -Konfiguration, die man durch entfernen einer Gerade x_j aus einer (n) -Konfiguration erhält, ist nach (13) der Kreis

$$z(t) = a_1 - a_2(t + \tau_j) + a_3 t \tau_j. \quad (16)$$

Wählt man $t = t_0$, so erhält man nach (15) einen Kreispunkt. Dieser ist aber für alle $j = 1, 2, \dots, n$ gleich dem Punkt w . Das war zu zeigen. \square

Wir beenden den Beweis von Satz 2, indem wir zeigen:

Die Limaçon Kurve

$$z(t) = a_1 - 2a_2t + a_3t^2, \quad t \in \mathbb{E},$$

ist die Hüllkurve der Kreisschar (16).

Erstens stellt man fest, indem man in der Kreis- respektive Limaçon-Kurvengleichung $t = \tau_j$ wählt, dass der Punkt $a_1 - 2a_2\tau_j + a_3\tau_j^2$ ein gemeinsamer Punkt der Kurven ist.

Zweitens ist

$$\left. \frac{dz_{\text{Kreis}}(t)}{dt} \right|_{t=\tau_j} = -a_2 + a_3\tau_j; \quad \left. \frac{dz_{\text{Limaçon}}(t)}{dt} \right|_{t=\tau_j} = -2a_2 + 2a_3\tau_j.$$

Die Tangenten an beide Kurven haben im gemeinsamen Punkt dieselbe Richtung. Die Kurven berühren sich dort.

Dass der allen Kreisen gemeinsame Punkt $w = a_1 - \frac{a_2\bar{a}_3}{a_2}$ der Knoten der Limaçon Kurve ist, folgt daraus, dass für $z = w$ gilt

$$\frac{a_3}{a_2}t^2 - 2t + \frac{\bar{a}_3}{a_2} = 0.$$

Nach Vieta ist somit das Produkt der Lösungen dieser Gleichung ein Turn, sodass es zwei Turns gibt, welche die Gleichung erfüllen. Der Punkt w ist ein Doppelpunkt der Limaçon Kurve. (Kurz: Die Gleichung ist selbstkonjugiert (siehe 3. Teil), ihre Lösungen sind Turns.)

Literatur

- [1] F. Morley. On the metric geometry of the plane n -line. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1(2):97–115, 1900.

Editorial

Seit seiner Emeritierung hält Urs Kirchgraber regelmässig Vorträge und Vorlesungen an der Zürcher Volkshochschule (VHS ZH). Es geht dabei darum, einem breiteren Publikum mit ganz unterschiedlichen Vorkenntnissen ein Angebot zu machen: vorhandene Mathematik-Kenntnisse aufzufrischen und weitere Einblicke zu ermöglichen.

Natürlich ist diese Situation mit dem gymnasialen MU nicht zu vergleichen. Nichtsdestotrotz denkt die Redaktion des Bulletins, dass es nicht ohne Interesse sein könnte, in loser Folge den einen oder anderen Ausschnitt aus Urs Kirchgraber's Veranstaltungen an der VHS zur Lektüre anzubieten – vielleicht ergibt sich ja doch die eine oder andere Anregung auch für den MU.

Wir beginnen mit der Wiedergabe eines Kurzvortrags, den UK am 24. Oktober 2015 anlässlich der Feier zum Einzug der VHS ZH in ihr neues Domizil an der Bärengasse in Zürichs Bankendistrikt, unweit des Paradeplatzes, gehalten hat. Es handelt sich tel quel um die schriftlich ausformulierte Fassung jenes Vortrags.

Mathematik – das unerkannte Vergnügen*

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

Wenn Sie, meine Damen und Herren, gern einen Gedanken verfolgen, Freude an einer zündenden Idee haben, ein Aha-Erlebnis geniessen – dann sind Sie in der Mathematik richtig. Dass es in der Mathematik genau darum geht, möchte ich im folgenden anhand einiger Beispiele belegen.

2

Ich beginne mit einer Figur, die jeder kennt: mit der *Pythagoras-Figur*, siehe Abbildung 1. Im Zentrum der Pythagoras-Figur ist ein rechtwinkliges Dreieck D . Die Dreieckseiten, die dem rechten Winkel anliegen, heissen, wie Sie sich vielleicht erinnern: *Katheten*. Die Dreieckseite dem rechten Winkel gegenüber nennt man *Hypotenuse*.

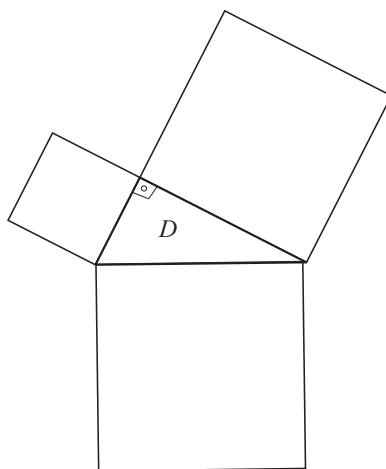


Abbildung 1: Pythagoras-Figur

Es ist klar: Die Katheten *bestimmen* die Hypotenuse. (Kennt man die Kathetenlängen, kann man das Dreieck D konstruieren, somit ist die Hypotenuse und ihre Länge bestimmt.)

Nur: Ist dieser Zusammenhang zwischen Katheten und Hypotenuse einfach, kompliziert, durchschaubar? Die Pythagoras-Figur versucht den Zusammenhang zu signalisieren. Über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks D sind die jeweiligen *Quadrate* errichtet. Man soll, zeigt die Pythagoras-Figur an, seine Aufmerksamkeit auf die Quadrate richten. Zwischen ihnen, deutet die Figur an, bestehe eine überblickbarer Zusammenhang. In der Tat besagt der sogenannte

*Schriftliche Fassung eines Vortrags zur Eröffnung der Volkshochschule Zürich an der Bärengasse am 24. Oktober 2015 im Rahmen der Festveranstaltung "Tanz der Synopsen".

Satz 1 (*Satz von Pythagoras SvP*)

Die beiden Kathetenquadrate zusammen überdecken eine gleich grosse Fläche wie das Hypotenusenquadrat.

Wenn das stimmt, meine Damen und Herren, liegt dieser Zusammenhang gewiss *nicht* auf der Hand. Denken Sie sich die Probe aufs Exempel gemacht:

- Stellen Sie sich vor, die Figur sei konstruiert und die drei Quadrate wären ausgeschnitten.
- Versuchen Sie nun in Gedanken die beiden Kathetenquadrate so aufs Hypotenusenquadrat zu legen, dass dieses exakt zugedeckt wird.

Das klappt natürlich nicht! Sie müssten schon die *Schere* zur Hand nehmen und die Kathetenquadrate in Stücke schneiden.

Aber wie?

3

Der folgende Vorschlag stammt vom Aachener Mathematik-Didaktiker *Heinrich Winter* [1].

Im *ersten Schritt* denkt sich Winter die beiden Kathetenquadrate so hingelegt, dass vier ihrer acht Ecken auf einer geraden Linie g liegen, siehe Abbildung 2. Überdies sollen sich die beiden Kathetenquadrate in einer Ecke berühren.

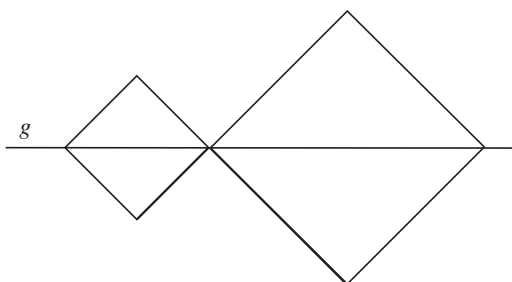


Abbildung 2: Erster Schritt in H. Winters Beweis des SvP: Positionierung der beiden Kathetenquadrate

Die Gerade g zerschneidet die beiden Kathetenquadrate in zwei Paare rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke.

Jetzt hat Winter eine zündende Idee, einen Geistesblitz, a stroke of genius, a revelation, die Muse küsst ihn: Im *zweiten Schritt* vertauscht er die beiden Dreiecke unterhalb der Geraden g , siehe Abbildung 3.

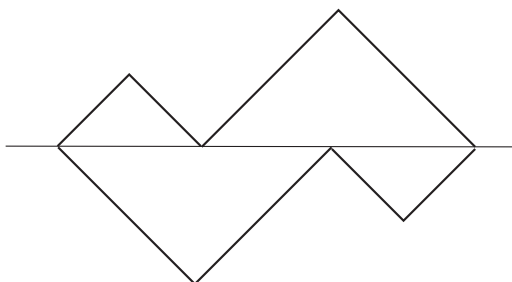


Abbildung 3: Zweiter Schritt in H. Winters Beweis des SvP: Vertauschung der beiden rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke unterhalb der Geraden g

Meditiert man die entstehende, zunächst durchaus etwas eigenartig anmutende Figur eine Weile, beginnt man sich an ihr zu freuen. Denn Stück um Stück ermöglicht sie ein Aha-Erlebnis: Vier (ehemalige) Kathetenquadrate-Eckpunkte treten hervor, wollen ein *Viereck* V bilden und beachtet werden, siehe Abbildung 4.

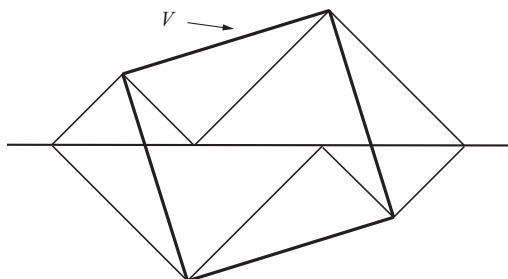


Abbildung 4: H. Winters Beweis des SvP: Das Aha-Erlebnis beginnt sich zu entfalten: Vier Punkte treten hervor, wollen beachtet werden – das Viereck V nimmt Gestalt an

Sie erkennen:

- Die vier Seiten des Vierecks V werden von den *Hypotenusen* von vier *Kopien des Dreiecks* D (jenes Dreiecks im Zentrum der Pythagoras-Figur, siehe Abbildung 1) gebildet.
- Folglich ist das Viereck V zumindest *Rhombus*.
- In Tat und Wahrheit ist V sogar ein *Quadrat*, denn die Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Seiten sind *rechte*: Man sieht, dass die beiden Teile eines solchen Winkels von *Kopien der beiden Basiswinkel* des Dreiecks D gebildet werden. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, der rechte Winkel 90° in Anspruch nimmt, bleibt für die beiden Basiswinkel zusammen ebenfalls 90° .
- Folglich ist das Quadrat V eine *Kopie* des ursprünglichen *Hypotenusenquadrats*. Aha!

Und nun die Coda:

- Die Kopie V des Hypotenusenquadrats in Abbildung 4 ist teilweise von den ursprünglichen Kathetenquadraten überdeckt.
- Aber einerseits gibt es zwei “Löcher” (die beiden Kopien von D an der oberen und an der unteren Hypotenusenquadratseite) und andererseits “lampen” zwei Teile (die beiden Kopien von D an der linken und rechten Seite des Hypotenusenquadrats) darüber hinaus.
- Doch Überhang und Löcher kompensieren sich perfekt: Voilà!

Die *Quintessenz*: Heinrich Winter hat eine *Zerlegung* der beiden Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks vorgeschlagen, derart, dass die entstehenden “Puzzle”-Teile exakt zum Hypotenusenquadrat umgelegt werden können. Man sagt, die beiden Kathetenquadrate einerseits und das Hypotenusenquadrat andererseits seien *zerlegungsgleich*.

Damit ist Satz 1 *bewiesen*.

In seinem Stück “Leben des Galilei” sagt Bertolt Brecht (1898-1956): “*Die Verführung, die von einem Beweis ausgeht ist gross. Ihr erliegen die meisten, auf die Dauer alle.*”

4

Wenn man einen Erwachsenen, eine Schülerin, einen Schüler nach dem Satz von Pythagoras fragt, wird er oder sie sagen, ach, das ist doch die Geschichte mit $a^2 + b^2 = c^2$ – und wohl kaum etwas übers Zerschneiden von Kathetenquadraten und dergleichen.

Das *Scharnier* zwischen beiden Sichtweisen bildet ein weiterer wichtiger Begriff der Geometrie: der Begriff des *Flächeninhalts* von *ebenen Figuren*. Sie wissen, dass der Begriff so festgelegt ist, dass zum Beispiel gilt: Flächeninhalt eines *Rechtecks* = Länge mal Breite, Flächeninhalt eines *Dreiecks* = Grundlinie mal Höhe dividiert durch 2, usw.

Der Begriff Flächeninhalt ist ein Versuch, den Aspekt “Grösse einer ebenen Figur” durch eine einzige Zahl wenigstens in gewissem Ausmass zu erfassen. Der Begriff Flächeninhalt ist so festgelegt, dass die folgende Aussage gilt:

Satz 2 *Sind zwei Vielecke (auch Polygone genannt) zerlegungsgleich, so haben sie gleichen Flächeninhalt.*

Interessanterweise gilt auch die sogenannte *Umkehrung* von Satz 2:

Satz 3 *(F. Bolyai, P. Gerwien 1832/33)*

Haben zwei ebene Vielecke gleich grossen Flächeninhalt, so sind sie zerlegungsgleich.

Satz 3 heisst *Satz* von *F. Bolyai* und *P. Gerwien*. Er wurde von den beiden unabhängig voneinander bewiesen und 1832 bzw. 1833 publiziert.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt, dass die Begriffe “zerlegungsgleich” und “flächeninhaltsgleich” jedenfalls bei ebenen Vielecken absolut *gleichwertig* sind. Ist das nicht bemerkenswert? Der Begriff “Flächeninhalt” reduziert eine Vieleck auf eine einzige Zahl. “Zerlegungsgleichheit” zweier Vielecke hingegen bedeutet, dass man das eine so in “Puzzle-Teile” zerschneiden kann, dass aus den Teilen eine Kopie des zweiten Vielecks zusammengesetzt werden kann. So betrachtet ist der Begriff “Flächeninhalt” ein (erstaunlich?) starker Begriff.

Beachten Sie überdies, dass der Begriff “zerlegungsgleich” eine sogenannte *Existenzaussage* beinhaltet: Es wird postuliert, dass man eines der Vielecke nehmen kann und dass es dann eine Zerlegung *gibt*, derart dass mit den erhaltenen Teilen eine Kopie des anderen Vielecks “gelegt” werden kann. Es wird nichts darüber gesagt, *wie* diese Zerlegung erhalten werden kann.

5

Mathematikerinnen und Mathematiker lieben Erweiterungen, Weiterentwicklungen, Verallgemeinerungen. Wie sieht es eine Dimension höher aus? Werfen wir einen Blick auf die Situation in drei Dimensionen, also im Raum.

Anstelle der Vielecke oder Polygone treten *Vielflache* (auch *Polyeder* genannt). Das sind Körper, die durch lauter Vielecke begrenzt sind, wobei jede Vieleckseite zu exakt zwei Vielecken gehört. Die geläufigsten Beispiele sind *Würfel*, *Quader*, *Tetraeder*, *Oктаeder*, ... , siehe Abbildung 5.

So wie Polygone zerlegungsgleich sein können, können auch Polyeder zerlegungsgleich sein. Anstelle des Begriffs Flächeninhalt tritt bei Polyedern der Begriff *Rauminhalt* oder *Volumen*. Und ganz analog wie im ebenen Fall, ist der Begriff Volumen so festgelegt, dass der zu Satz 2 analoge Satz gilt:

Satz 4 *Zwei zerlegungsgleiche Polyeder haben gleiches Volumen.*

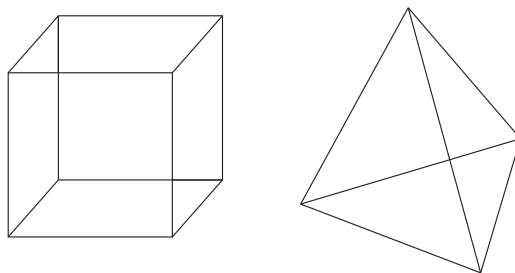


Abbildung 5: Würfel, Teraeder, ...

Natürlich stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung von Satz 4 gilt: *Sind zwei Polyeder mit gleichen Volumina zerlegungsgleich?* Diese Frage formulierte der berühmte deutsche Mathematiker *David Hilbert* (1862-1943) als drittes von insgesamt 23 (damals) offenen mathematischen Problemen auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahr 1900.

Die Antwort auf Hilberts drittes Problem fand recht bald einer seiner Schüler, der junge *Max Dehn* (1878-1952). Sie ist *negativ*.

Satz 5 (*Dehn*, 1901)

Würfel und reguläres Tetraeder sind auch dann nicht zerlegungsgleich, wenn sie gleiches Volumen haben

Der Beweis ist hoch interessant: Er zeigt auf, was verhindern kann, dass volumengleiche Körper zerlegungsgleich sind.

Und was, wenn die von Dehn entdeckte "Obstruktion" *nicht* verletzt ist? Gilt *dann* die Umkehrung? Vielleicht bald einmal Thema in einer VHS-Vorlesung? Da wären auch *Hugo Hadwiger* (1908-1981), viele Jahre anerkannter Mathematikprofessor an der Universität Bern, und *Jean-Pierre Sydler* (1921-1988), Mathematiker und lange Jahre hochgeschätzter Direktor der Hauptbibliothek der ETH, Thema.

6

Kehren wir zum Satz von Pythagoras zurück und zwar in der gängigeren Formulierung: *Im rechtwinkligen Dreieck gilt:*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wobei a , b die Längen der Katheten, c die Länge der Hypotenuse bezeichnet.

Die eminente Bedeutung dieses Resultats ist, dass es eine *Zusammenhang* zwischen *Geometrie* und *Rechnen* herstellt. Es erlaubt jederzeit aus der Kenntnis der Längen von zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge der dritten Seite zu berechnen, *sofern* man neben den

Grundrechnungsarten: $+$, $-$, \cdot , \div

das

Ziehen von (Quadrat-)Wurzeln

beherrscht.

Wenn Sie der Meinung sind, dass das nichts besonders Aufregendes sei, dann möchte ich immerhin darauf hinweisen, dass GPS, also das *Global Positioning System*, darauf beruht.

Die Technik ermöglicht Ihrem GPS-Empfänger zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort auf, oder in der Nähe der Erde, die Position von mindestens drei Satelliten zu ermitteln und seine Distanzen zu diesen, siehe Abbildung 6. Daher weiss Ihr GPS-Empfänger, dass Sie sich *gleichzeitig* auf 3 *Kugeloberflächen*

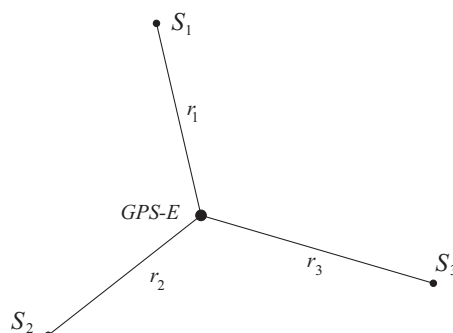


Abbildung 6: *GPS – E*: Ihr GPS-Empfangsgerät, S_1 , S_2 , S_3 drei gleichzeitig (elektronisch) sichtbare Satelliten, r_1 , r_2 , r_3 ihre Distanzen vom *GPS – E*.

befinden und auf welchen. Um Ihnen Ihre Position melden zu können, muss Ihr GPS-Empfänger die Schnittpunkte der drei Kugeloberflächen bestimmen¹. Dazu nutzt es fleissig den Satz von Pythagoras.

GPS? Ja klar – nicht nur Dank des SvP. Aber nicht ohne SvP!

7

Wenn Sie, meine Damen und Herren, gern einen Gedanken verfolgen, Freude an einer zündenden Idee haben, ein Aha-Erlebnis geniessen – dann sind Sie in der Mathematik richtig. Ich lade Sie herzlich ein, die kommenden VHS-Veranstaltungen in Mathematik zu besuchen!

Literatur

- [1] H. Winter *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung* Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GdM), 61 (1995), p.37-46.

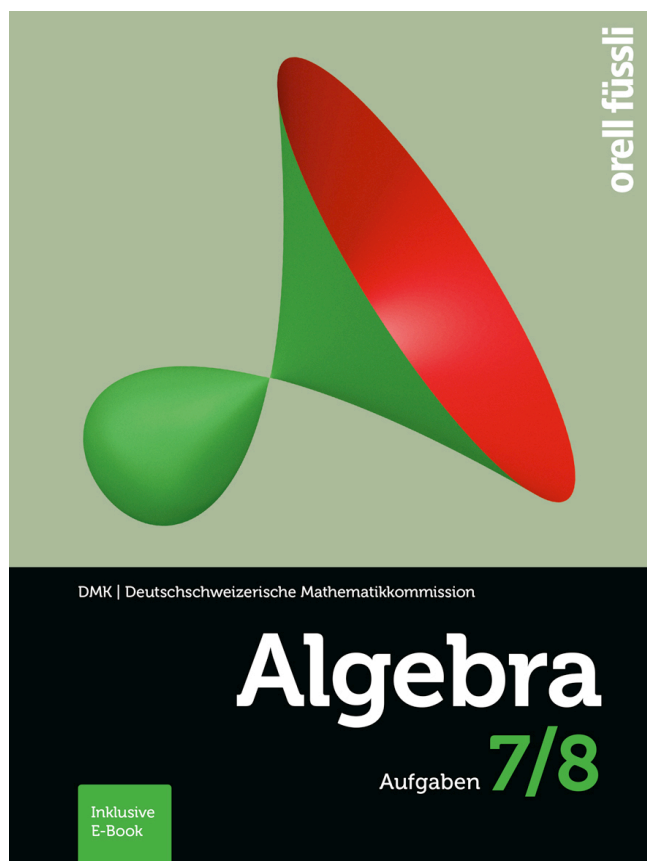
¹Die Satelliten kennen ihre Position zu jedem Zeitpunkt sehr genau. Sie übermitteln sie an den GPS-Empfänger. Aus der Zeit, die ein Signal vom Satelliten zum GPS-Empfänger benötigt, kann auf die Distanz geschlossen werden. Während die Satelliten mit hochpräzisen und daher teuren Atomuhren ausgestattet sind, arbeiten die Empfangsgeräte mit vergleichsweise billigen und deshalb relativ unpräzisen Quarzuhren. Daher müssen zur Ortung einer Position mindestens vier Satelliten benutzt werden, was die Bedeutung des SvP in keiner Weise tangiert.

Algebra 7/8

Der erste Band der von der DMK herausgegebenen und erweiterten Neubearbeitung ist erschienen!

Die 'Algebra 7/8' ist gegenüber der bisherigen 'Algebra 1' der DMK nach unten erweitert worden, so dass sie direkt im Anschluss an die Primarschule eingesetzt werden kann. Überaus vielfältige Aufgaben stehen im Zentrum und werden ergänzt durch Theorieblöcke, die bewusst kurz gefasst sind, was die Lehrkräfte in ihrer Methodenwahl nicht einschränken soll. Jedes der drei Kapitel schließt mit den beiden Unterkapiteln 'Vermischte Aufgaben' sowie 'Kontrollaufgaben'. Wie in der bisherigen 'Algebra 1' sind die Ergebnisse aller Aufgaben mit ungeraden Nummern am Schluss des Aufgabenbandes abgedruckt; die Ergebnisse sämtlicher Aufgaben sind in einem separat erhältlichen Ergebnisband zugänglich.

Die von Cornelia Gehrler (Luzern), Andreas Stahel (Basel), Hansjürg Stocker (Wädenswil ZH) und Reto Weibel (Gossau SG) bewerkstelligte Neubearbeitung ist nach Schuljahren gegliedert. Das zusammengetragene umfangreiche Aufgabenmaterial ermöglicht den Schülerinnen und Schülern nicht nur das selbstständige Erkennen und Erkunden von Mustern, Strukturen oder Gesetzmäßigkeiten, sondern dient auch dem Festigen und Vertiefen. Und dazwischen kommen immer auch wieder offene(re) Fragestellungen vor.



NEU

Algebra 7/8

- **Aufgaben**

inklusive **E-Book**

1. Auflage 2016

304 Seiten, 17×23 cm, gebunden

ISBN 978-3-280-04071-3

Einführungspreis CHF 36.–

- **Ergebnisse**

1. Auflage 2016

138 Seiten, 17×23 cm, broschiert

ISBN 978-3-280-04073-7

Einführungspreis CHF 42.–

Orell Füssli Verlag

Bestellungen: www.ofv.ch/lernmedien



Terme und Gleichungen. Eine altbekannte Notwendigkeit anders unterrichtet

Liebe Leserschaft

Leider ist das Gleichungslösen für viele Schülerinnen und Schüler ein Leidensweg, sie kämpfen mit der Algebra oft schon, wenn sie ins Gymnasium eintreten. Dies ist der Ausgangspunkt für unser Weiterbildungsangebot, auf das wir Sie hier aufmerksam machen möchten und das Teil eines nationalen Forschungsprojekts (SNF) zur Förderung des algebraischen Handwerks ist.

Bei Interesse an der Weiterbildung laden wir Sie zu einer *Informationsveranstaltung* ein, die an zwei Terminen durchgeführt wird, und zwar am Mittwoch, 25. Mai, 18.15 – 20.00 Uhr und am Samstag 25. Juni, 10.15 – 12.00 Uhr, beide Male an der Universität Zürich, Kantonsschulstrasse 3, 8001 Zürich. An dieser Veranstaltung berichten wir über Organisation und Ablauf der Weiterbildung sowie des Forschungsprojekts.

Da unser Forschungsprojekt auf das Unterrichten quadratischer Gleichungen fokussiert, sollten Sie dieses Thema im ersten Semester des Schuljahrs 2016/17 in einer eigenen Klasse unterrichten, falls Sie an der Weiterbildung teilnehmen möchten. In Zusammenarbeit mit Ihnen würden wir Ihren Unterricht gerne zur Datenerhebung (Schülertests, Videografie, Dokumentation der Unterrichtsunterlagen) nutzen, um die Auswirkungen unserer Weiterbildungsveranstaltungen zu untersuchen. Dadurch erhalten Sie und Ihre Klasse auch Einblick in die gegenwärtige mathematikdidaktische Forschung.

Wir würden uns überaus freuen, Sie an einem der beiden Informationsveranstaltungen begrüßen zu dürfen. Bei Fragen können Sie sich bereits auch im Vorfeld schon an Christian Rüede (christian.rueede@fhnw.ch) wenden.

Mit den besten Grüßen,

Christian Rüede

Fritz Staub

Beschreibung der Weiterbildung

Datum

Zur Weiterbildung gibt es eine *Informationsveranstaltung*, und zwar an folgenden Terminen:

- Mittwoch, 25. Mai 2016, 18.15 – 20.00 Uhr
- Samstag, 25. Juni 2016, 10.15 – 12.00 Uhr.

Die eigentliche *Weiterbildung* wird insgesamt vier Tage (2 Werktage, 2 Samstage) dauern. Möglicherweise erscheint das als viel. Wir möchten Ihnen aber Gelegenheit geben, die in der Weiterbildung kennengelernten Konzepte im eigenen Unterricht auszuprobieren. Die dabei gemachten Erfahrungen sind uns viel wert. Wir möchten diese gemeinsam mit Ihnen und den anderen Teilnehmenden während der Weiterbildung diskutieren sowie nach Verbesserungen und Grenzen der vorgestellten Konzepte suchen. Deshalb veranschlagen wir vier Tage.

Die Weiterbildung wird dreimal durchgeführt, und zwar in kleinen Gruppen von höchstens 10 Personen. Die Weiterbildungstage der ersten beiden Gruppen verteilen sich über Ende August bis Anfang November 2016, jene der dritten Gruppe über Ende April bis Juni 2017. Leider können wir die genauen Daten erst kurz vor der Informationsveranstaltung festlegen.

Kursleitung

- PD Dr. Christian Rüede, Fachdidaktik Mathematik, Pädagogische Hochschule FHNW
- Prof. Dr. Fritz C. Staub, Institut für Erziehungswissenschaft, Universität Zürich

Zielpublikum

Maturitätsschullehrpersonen für Mathematik. Weil die an der Weiterbildung teilnehmenden Lehrpersonen zugleich in ein SNF-Forschungsprojekt zum Algebraunterricht eingebunden sind, müssen sie im ersten Semester des Schuljahrs 2016/17 quadratische Gleichungen behandeln.

Thema

Die meisten Schülerinnen und Schüler schaffen es nach einer gewissen Zeit, quadratische Gleichungen mittels dem Standardverfahren zu lösen, also durch Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, Umformen auf Normalform und Anwenden der Lösungsformel. Manchmal sind sie darin so „geübt“, dass sie etwa auch die Gleichung $(x - 3)(x + 1) = 0$ genau so anpacken, statt sofort die beiden Lösungen zu erkennen. Hier setzt die Weiterbildung an. Ihr Thema sind innovative Unterrichtskonzepte und Aufgabenformate, die auf die Schulung von Standardverfahren (Sicherheit) sowie die spontane Produktion von alternativen Vorgehensweisen (Flexibilität) zielen. Die Kernfrage wird sein: Wie können Sie die in der Weiterbildung vorgestellten Unterrichtskonzepte und Aufgabenformate in Ihrem Unterricht zum Gleichungslösen so

einsetzen, dass Ihre Klasse die prozeduralen Fertigkeiten mit verstehensorientiertem Wissen verbindet?

Inhalte und Ziele

- Spezifische Gleichungen, mit denen gezielt das flexible Lösen angeregt werden kann: Worauf ist bei deren Konstruktion zu achten?
- Aufgabenformate, bei denen Gleichungen nicht gelöst, sondern vorgegebene Lösungswege verglichen werden: Wie werden sie im Unterricht nutzbringend eingesetzt?
- Frage- und Rückmeldestrategien, mit denen zur Diskussion über das Wie, Wann und Warum der Umformungsschritte angeregt wird: Wie werden mit ihrer Hilfe produktive Klassengespräche geführt?

Methoden

- Vorträge, Diskussionen, Übungen
- Abgabe von ausgearbeitetem Unterrichtsmaterial zu quadratischen Gleichungen. Anpassung dieses Materials an den eigenen Unterricht. Analyse und Diskussion der eigenen Erfahrungen.

Anzahl Teilnehmende

21–30 Personen (3 Gruppen à 7–10 Personen)

Kosten

- Informationsveranstaltung: kostenlos
- 4 Weiterbildungstage im Schuljahr 2016/17: CHF 220 zur Deckung der Kosten für Raummiete und Pausenverpflegung

Kursort

- Informationsveranstaltung: Universität Zürich, Kantonsschulstrasse 3, 8001 Zürich
- Weiterbildung: Zentrum für Weiterbildung UZH, Schaffhauserstrasse 228, 8057 Zürich

Anmeldung

- Informationsveranstaltung (25. Mai oder 25. Juni 2016): Bis 3 Tage im Voraus an christian.rueede@fhnw.ch
- Weiterbildung: Bis 3. Juli 2016 unter www.weiterbildung.uzh.ch/wbmat

Für Ihre Fragen, insbesondere falls Sie die Weiterbildung besuchen möchten, an den beiden Terminen der Informationsveranstaltung aber verhindert sind, oder falls Sie erst im Schuljahr 2017/18 das Thema der quadratischen Gleichungen in einer eigenen Klasse unterrichten, steht Ihnen Christian Rüede (christian.rueede@fhnw.ch) gerne zur Verfügung.

Organisation

Institut für Erziehungswissenschaft UZH

Vom Kindergarten bis zur Hochschule – Mathematik im Unterricht heute

Zentrale Aspekte des Mathematiklernens gelten vom Kindergarten bis zur Hochschule. In dieser Vortragsreihe der Fachbereiche Mathematik der PH Zürich und der ETH Zürich soll vorgestellt werden, was für den Mathematikunterricht aller Stufen wesentlich ist – theoretisch fundiert und praktisch illustriert. Diese Veranstaltung richtet sich an Lehrpersonen aller Stufen sowie an Mathematikunterricht Interessierte.

Donnerstag, 1. September 2016 in Zürich

17:15 bis 18:45 Uhr Vortrag mit anschliessendem Apéro (Eintritt frei)

Matthias Ludwig (Goethe-Universität Frankfurt am Main)

Sport als Sachthema im Mathematikunterricht

Ein motivierendes Sachthema im Mathematikunterricht kann Energien freisetzen, Aha-Effekte auslösen und im besten Falle dazu führen, dass man lernt, mathematische Verfahren und Ideen auf Alltagsprobleme anzuwenden. Vielleicht rechnet man gar nicht damit, im Thema Sport überhaupt Möglichkeiten zu finden, schulmathematische Themen zu behandeln. Aber schon die Frage nach Fairness («Wie muss die 400 m-Bahn gebaut sein, damit es für alle Sportler fair zu geht?»), die Frage nach der Optimierung der Wurftechnik beim Basketball («Wie hat es der Profi-Basketballer Dirk Nowitzki geschafft, so gut zu werden?») oder die Frage nach der Fußballkonstruktion zeigen dass in den meisten Sportarten etwas Mathematisches steckt. Im Vortrag werden Beispiele von der Primarschule bis zur Sekundarstufe II vorgestellt.



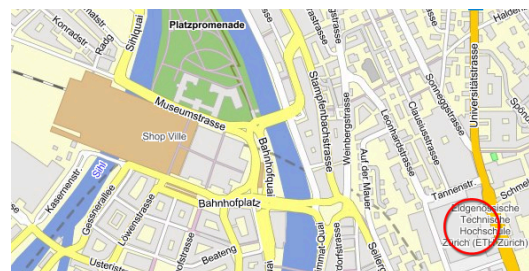
Prof. Dr. Matthias Ludwig studierte Mathematik und Physik in Würzburg und war anschließend für fast 9 Jahre im bayerischen gymnasialen Schuldienst tätig. Nach seiner Promotion 2002 unterrichtete er an der PH Weingarten am Bodensee, seit 2011 leitet er die Arbeitsgruppe «Mathematikdidaktik in der Sekundarstufe I» an der Goethe-Universität Frankfurt am Main. Er beschäftigt sich hauptsächlich mit Modellieren im Mathematikunterricht, forschendem und entdeckendem Lernen und der Entwicklung und zeitgemäßen technischen Umsetzung von Mathtrails. Er ist Autor des Buches «Mathematik + Sport, olympische Disziplinen im mathematischen Blick».

Herzlich laden ein

Norbert Hungerbühler (ETH Zürich) und
René Schellendorfer (PH Zürich)

Veranstaltungsort

ETH Zürich, Hauptgebäude
Rämistr. 101, 8092 Zürich
Hörsaal D 7.1



Tram Linie 6 oder 10 ab HB bis «ETH/Unispital»,
Linie 9 ab Bellevue bis «ETH/Unispital»,

Weiterbildung: 27. Schweizerischer Tag über Mathematik und Unterricht

Die SMG, die DMK und die ETH Zürich laden Sie herzlich zu dieser Weiterbildungsveranstaltung ein.

Kursdaten:

Ort: Kantonsschule Wil, Wil

Datum: Mittwoch, 7. September, 2016

Organisation: Meike Akveld (ETH), Andreas Wiedemann (KS Wil), Richard Wohlfender (KS Wil), Norbert Hungerbühler (ETH)

Programm:

09:30 Uhr	Check-in in der Aula
10:00 Uhr	Begrüssung
10:15 Uhr	Vortrag: Ueli Maurer (DINFK, ETH) <i>Kryptografie: Mit Mathematik gegen Hacker und die NSA</i>
11:15 Uhr	Preisverleihung SMG
11:30 Uhr	Kurze Pause
11:45 Uhr	Workshop I
12:45 Uhr	Mittagessen
14:00 Uhr	Workshop II
15:00 Uhr	Kaffeepause
15:15 Uhr	Vortrag: Christian Blatter (DMATH, ETH) <i>Unmögliche Zerlegungen</i>
16:15 Uhr	Ende der Veranstaltung

Die hier angekündigten 6 Workshops finden je zweimal parallel an den im Programm aufgeführten Zeiten statt:

- **Von Ursache und Wirkung:** Markus Kalisch (ETH)
- **Und dann und wann ein Leitprogramm 2.0!:** Stephan Schönenberger (PH St. Gallen)
- **Projektive Geometrie:** Lorenz Halbeisen und Norbert Hungerbühler (ETH)
- **Begabungsförderung:** Kaloyan Slavov (ETH)
- **Robotik:** Marcel Leupp und Thomas Spirig (KS am Burggraben St.Gallen)
- **Falten im DIN-Format:** Hans Walser (Mathematisches Institut, Universität Basel)

Bitte melden Sie sich bis spätestens 31.08.2016 auf der folgenden Webseite an:

www.math.ch/TMU2016

Dort finden Sie weitere Informationen zu den Workshops und der Anreise.



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 201

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im **Hörsaal HG G 3** des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem **Apéro im HG G 69** (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 29. September 2016

Viviane Kehl, Mathematik Studentin ETH Zürich

Titel: Vom Dreieck zum Metamorph

Abstrakt: Man nehme ein paar Tetraeder und verklebe diese entlang der Kanten zu einer geschlossenen Kette. Mit etwas Glück ist die Kette beweglich, und mit viel Glück lässt sie sich sogar durch sich hindurchdrehen, besitzt also einen Drehzyklus. Eine solche Kette nennen wir Metamorph oder Umstülpkörper. Vielleicht können wir die Kette so drehen, dass von jedem Tetraeder eine Fläche in einer gemeinsamen Ebene zu liegen kommt: Dies ist ein Ebenendurchgang.

Allerdings wollte ich mich bei meiner Maturarbeit nicht auf das Glück verlassen und startete deshalb andersherum: Ich nahm ein Dreieck. Gibt es einen Metamorph, dessen Tetraederflächen bei einem Ebenendurchgang dieses Dreieck bilden?

Im Vortrag werde ich wundervolle Punkte definieren, diese auf beliebigen Dreiecken lokalisieren und damit bisher unbekannte Metamorphs entdecken.

Donnerstag, 3. November 2016

Prof. Dr. Thomas Wihler, Universität Bern, Mathematisches Institut (MAI), Sidlerstrasse 5, 3012 Bern

Titel: Wenn Euler und Newton gemeinsam Nullstellen gesucht hätten

Abstrakt: Das Newtonverfahren zum numerischen Lösen von nichtlinearen Gleichungen wird gelegentlich auch im gymnasialen Unterricht thematisiert, etwa im Zusammenhang mit dem Heronverfahren oder beim Betrachten der Juliamengen. Ferner ist das Eulerverfahren zum Lösen von Differentialgleichungen ebenfalls gut in der gymnasialen Mathematik einbaubar. Vielleicht ist es überraschend zu erfahren, dass zum Newtonverfahren eine Differentialgleichung passt, deren näherungsweise Lösung durch das Eulerverfahren mit konstanter Schrittweite 1 gerade das klassische Newtonverfahren ergibt. Diese Beobachtung stimuliert die Frage, ob sich nichtlineare Gleichungen durch allgemeinere numerische Löser für Differentialgleichungen rasch und zuverlässig lösen lassen. Wir zeigen einige Beispiele, die so einfach sind, dass sie auch im Unterricht verwendet werden können, aber soviel Einsicht bieten, dass es sich lohnt, an ihnen mehr über die Dynamik des Newtonverfahrens zu lernen. Ziel ist es, das klassische Verständnis vom Newtonverfahren durch eine neue Sehensweise zu erweitern, die Raum lässt für angeleitete Schülerforschung im Rahmen von Maturarbeiten oder eines Projektes von SJf.

Donnerstag, 17. November 2016

Dr. Claudia Albertini, Pädagogische Hochschule Zürich und Universität Zürich

PD Dr. Martin Huber, Fachhochschule Winterthur (ZHAW) und Universität Zürich

Titel: Die Gregorianische Kalenderreform

Abstrakt: Der bei uns gebräuchliche Gregorianische Kalender stimmt mit dem von Julius Caesar im Jahr 45 v. Chr. eingeführten Julianischen Kalender weitgehend überein. Die mittlere Jahreslänge des letzteren Kalenders beträgt 365.25 Tage und ist damit nur ca. 11 Minuten länger als das astronomische Sonnenjahr. Doch bis zum 16. Jh. hatte sich diese Ungenauigkeit zu zehn Tagen aufsummiert, was die Astronomen jener Zeit schon sehr genau feststellen konnten.

Ostern, das wichtigste Fest der christlichen Kirche, wird gemäss Festlegung am ersten Sonntag nach dem Frühlingsvollmond gefeiert; d.h., nach dem ersten Vollmond, welcher am oder nach dem Frühlingsäquinoktium (Tagundnachtgleiche) auftritt. Letzteres fiel zu der Zeit, als diese Festlegung in Kraft trat, auf den 21. März. Die römische Kirche rechnete bis im 16. Jh. weiterhin mit dem 21. März; das Äquinoktium war jedoch inzwischen um zehn Tage zum 11. März abgewandert. Dies war Grund genug für eine Kalenderreform. Papst Gregor XIII. liess deshalb per Dekret im Oktober 1582 zehn Tage ausfallen. Damit die Tagundnachtgleiche sich im Kalender von nun an nicht mehr rückwärts bewegt – oder zumindest viel langsamer – enthält die Reform zusätzlich die Vorschrift, dass in drei von vier aufeinander folgenden Säkularjahren der Schalttag entfällt. Die mittlere Länge des Gregorianischen Jahres beträgt somit

$$365.25 - \frac{3}{400} = 365.2425 \text{ Tage.}$$

Dieser Teil der gregorianischen Reform ist weitgehend bekannt. Weniger bekannt ist der zweite Teil: Der Frühlingsvollmond wird nicht astronomisch bestimmt, sondern mittels eines 19-jährigen Mondzyklus berechnet. Die Ungenauigkeit dieses Zyklus hatte sich zwischen dem 6. und dem 16. Jh. zu drei Tagen aufsummiert. Auch dieser Fehler wurde im Zuge der Gregorianischen Reform korrigiert, und auch hier wurde festgelegt, wie zukünftige Abweichungen vermieden werden können.

In unserem Vortrag werden wir zunächst den 19-jährigen Mondzyklus und seine Bedeutung für die Osterrechnung darstellen. Darauf aufbauend können wir die Neuerungen der Gregorianischen Reform ausführlich beschreiben. Dies erlaubt uns insbesondere eine Formel aufzustellen, mit welcher das Osterdatum eines beliebigen Jahres berechnet werden kann.

Donnerstag, 1. Dezember 2016

Prof. Dr. Urs Kirchgraber, emeritierter Professor, ETH Zürich, Department Mathematik, 8092 Zürich

Titel: 1, 2, 3, 4 finito – wieso?

Abstrakt: Gleichungen sind eines der grossen Wissens- und Forschungsgebiete der Mathematik und ein (wenn nicht das) Scharnier zwischen Mathematik und Wirklichkeit. Viel Mathematikgeschichte verbindet sich mit dem Thema. Folgerichtig spielt es auch im Unterricht keine geringe Rolle.

Im Zentrum des Vortrags stehen polynomiale Gleichungen bis hin zur berühmten Frage nach der Lösungsformel für die Gleichung 5. Grades – und wie man mit ihr in der Schule umgehen könnte.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>

Mehr Mathematik!

Ein Plädoyer für mehr Mathematik an den Schweizer Gymnasien.

Roman Meier, Realgymnasium Rämibühl Zürich und Aargauische Maturitätsschule für Erwachsene, Aarau.
meier_roman@hispeed.ch.

Mehr Mathematik – wer von uns würde diese Forderung nicht unterschreiben? Mehr Lektionen, mehr Gewicht; zum Beispiel könnte man sich überlegen, die Mathematiknote bei den Promotionen wieder doppelt zu zählen, wie das ja üblich war und aktuell wieder diskutiert wird. Doch solcherlei zu fordern ist hier nicht meine Absicht. Natürlich unterstütze ich Forderungen nach mehr Mathematikunterricht – doch in diesem Artikel geht es um etwas ganz anderes: Dies ist ein Plädoyer für mehr Mathematik im Mathematikunterricht an den Gymnasien.

Wie komme ich dazu, mehr Mathematik im Mathematikunterricht zu fordern? – Und, noch wichtiger: Was meine ich mit damit? Was machen wir denn sonst im Mathematikunterricht, wenn nicht Mathematik? Ich werde zunächst anhand eines Beispiels aufzeigen, was ich mit der Forderung nach mehr Mathematik im Mathematikunterricht eigentlich meine.

Quadratisch? – Algebraisch!

Die Theorie der algebraischen Gleichungen gehört für mich zu den Highlights des gymnasialen Unterrichts! Es gibt in diesem Gebiet der Mittelschulmathematik viel Interessantes, Lehrreiches zu sehen, viele mathematische Perlen zu entdecken und einige spannende Geschichten zu hören!

- Schon die linearen Gleichungen haben es in sich, aber bei den quadratischen Gleichungen geht es erst so richtig los. Man kann verschiedene Methoden, die zu deren Lösung(en) führen, entdecken, eine gewitzter als die andere: Den ägyptischen „falschen Ansatz“, den Kreis von Carlyle und, ein Kleinod seltener Güte, den geometrischen Ansatz des Euklid, veredelt durch Al-Khwarizmi im 9. Jh., ein Lehrstück über die Schönheit einer geometrischen Überlegung und den Übergang von einem geometrischen zu einem algebraischen Lösungsweg, was man dabei gewinnt – und was man verliert. Viele anregende mathematische Argumentationen und Beweisführungen können Mittelschülerinnen und Mittelschüler hier nachvollziehen und selber entdecken. Und das ist erst der Anfang.
- Tartaglia (oder war es bereits del Ferro?) löst kubische Gleichungen der Form $ax^3 + bx = c$, in dem er den zweidimensionalen Ansatz Al-Khwarizmis mit einem Geniestreich ins Dreidimensionale erhebt. Hier hat man am Gymnasium eine der wenigen Gelegenheiten, ein mathematisches Juwel erster Güte zu untersuchen und zu bewundern.
- Dann die quartischen Gleichungen, Ludovico Ferrari löst im 16. Jh. einige von Ihnen, er nutzt die neugewonnenen Erkenntnisse über Termumformungen, bringt die „Coss“, die „Bemühung, die mathematische Terminologie vom geschriebenen Wort zu lösen¹“, zu einer ersten Blüte, zeigt, welche grosse Kraft in den mechanisch anmutenden Termumformungen steckt. Und schliesslich:
- Die Riesentöter Galois und Abel, beides spannende Gestalten des realen Lebens, die gemeinsam und doch jeder für sich die algebraischen Gleichungen erschlagen haben in schier unfassbaren

¹ Hans Wussing, 6000 Jahre Mathematik, Springer Verlag

Einzelleistungen, weit ihrer Zeit voraus. Natürlich kann man nicht Galoistheorie machen an einem Gymnasium. Und doch: dass an einer allgemeinbildenden Schule Mathematik gelehrt wird ohne dass diese beiden Personen und deren Leistungen thematisiert und gewürdigt werden, ist doch bedenklich.

Sie sehen, geschätzte Leserinnen und Leser, ich gerate leicht ins Schwärmen bei dieser Fülle an grosser, fantastischer Mathematik. Wie nun setzen die gängigen Lehrmittel diesen Stoff um? – Interessante Frage!

Müssen wir wirklich durch diese Wüste? – Ja doch!! – Und warum? – Frag nicht!²

Die meisten Lehrmittel zielen darauf ab, möglichst viele der üblichen Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen, zu lösen. Entsprechend geht es darum, möglichst rasch die Auflösungsformel für quadratische Gleichungen zur Verfügung zu haben und anschliessend die Lernenden mit Rezepten für Gleichungen mit Quadratwurzeltermen, Gleichungen mit Parametern, Gleichungen mit Bruchtermen, quadratische Gleichungssysteme, biquadratische Gleichungen etc. auszustatten. Die beschriebene Mathematik der algebraischen Gleichungen mit ihren gewitzten Herleitungen, cleveren Problemlösungen und spannenden Geschichten wird selten erwähnt und nie thematisiert.

Die Mathematik wird so reduziert auf das Auswendiglernen von Techniken, die im Kern von den meisten Lernenden nicht verstanden werden – und nicht verstanden werden müssen: Selten sieht man Aufgaben in Mathematikprüfungen, die den Nachweis verlangen, dass die mathematischen Inhalte verstanden wurden, dass die Lernenden gelernt haben, eine saubere Argumentation oder Herleitung aufzuziehen und die mathematische Terminologie zu beherrschen.

Viele Lehrmittel zur Mittelschulmathematik kümmern sich nur am Rande um die Mathematik. Besonders deutlich wird dies in einem der meistverbreiteten Lehrmittel in der Deutschschweiz: dem dreibändigen Werk Algebra I-III, für meine Begriffe weitgehend mathematikbefreites Lehrmittel: Hier wird nicht Mathematik gelehrt, hier werden Regeln gedrillt³.

Denn: Was ist Mathematik? Mathematik zu treiben bedeutet zu denken, zu verstehen und Einsicht zu gewinnen, zu probieren, zu argumentieren und zu diskutieren, zu beweisen, zu abstrahieren, anzuwenden, zu staunen – und ja, auch zu rechnen. Denn: Das Handwerkliche gehört dazu und soll auch ausreichend geübt werden. Erst ausreichende Rechenfertigkeit erlaubt es, mathematisch ausdrucksfähig zu werden⁴. Doch darf die Mathematik nicht auf diese Rechenfertigkeit reduziert werden. Genau dies geschieht aber in Lehrmitteln, und infolgedessen im Unterricht, allzu häufig.

Wenden wir uns also mehr der Mathematik zu! Lassen wir unsere Schülerinnen und Schülern die Welt der Mathematik tätig zu erfahren: Die Herleitungen und Beweise, die Ideen und Problemlösungen, die Anwendungen und, auch wichtig, die Welt des Rechnens und der Termumformungen. In diesen steckt viel Schönes, und ohne die Magd Termumformung hätte die Königin Mathematik nicht die Stellung in der heutigen Welt, die sie innehat. Aber dies ist kein Grund, die Magd zur Königin zu machen.

Gleiche Meinung? Andere Meinung? meier_roman@hispeed.ch.

² Gespräch zweier Banditen aus dem Film von Giorgio Stegani: *Die letzte Rechnung zahlst du selbst!*

³ Dieses Lehrmittel ist meines Erachtens an der „Krise des Mathematikunterrichts an den Mittelschulen“ zumindest mitschuldig, weil es sich konsequent auf das formale Rechnen beschränkt. Das erste Ziel eines jeden Unterrichts ist aber die Vermittlung von Erkenntnis.

⁴ So festgehalten in der sehr lesenswerten Präambel im „Kanon Mathematik“, siehe www.math.ch/kanon.

Math Challenge KST

Dima Nikolenkov, dmnikolenkov@kst.ch

1 Idee und Beschreibung

Wie begeistern wir die Jugendlichen für die Mathematik?

Ein Versuch für die Lernenden des ersten und des zweiten Gymnasialjahres an der Kantonsschule Trogen (Kurzzeitgymnasium) wurde vor 2 Jahren gestartet. Die Lernende sind 14 bis 16 Jahre alt.

In diesem Artikel möchte ich einerseits das Material zur Verfügung stellen und andererseits die Erfahrungen mitteilen, damit man Verbesserungen / Anpassungen für den eigenen Gebrauch vornehmen kann.

Der Math Challenge besteht aus 8 Serien zu je 4 Aufgaben, die in mehr oder weniger regelmässigen Abständen auf das ganze Schuljahr verteilt werden.

Die Teilnahme der Lernenden an diesem Wettbewerb ist freiwillig. Es ist wünschenswert, dass die jeweiligen Mathematiklehrpersonen die Schülerinnen und Schüler dazu motivieren.

Vorteilhaft ist es, die Zeitpunkte für das Verteilen der Serien so zu legen, dass die Abgabetermine nicht in prüfungsintensive Zeiten fallen. Die Bearbeitungszeit beträgt circa 2-3 Wochen.

Die Lösungen werden entweder schriftlich oder in elektronischer Form abgegeben. Der Lösungsweg muss bei den meisten Aufgaben ersichtlich sein und wird bewertet. Einige konstruktive Aufgaben sind einfach zum "Knobeln" da.

Es sind keine Vorkenntnisse erforderlich. Hilfreich sind jedoch Kenntnisse über die Primfaktorzerlegung und die Teilbarkeitsregeln. Die Schwerpunkte liegen auf dem logischen Denken, der Fähigkeit, Regelmässigkeiten zu erkennen und der Freude am Ausprobieren.

Die Aufbau der Serien sieht folgendermassen aus:

- eine oder zwei Aufgaben sind relativ einfach,
- eine Aufgabe erfordert eine gewisse Hartnäckigkeit im Testen / Probieren / Konstruieren etc.,
- eine Aufgabe ist etwas schwieriger und erfordert eine klare Begründung der Lösungen.

2 Beispiel einer Serie

Kantonsschule Trogen
Appenzell Ausserrhoden

Math Challenge KST 2015-16 Serie I

Teilnahme: FREIWILLIGE Lernende der 3.ten und der 4.ten Klassen

Abgabe bis 8.09.2015:

- Vorname: Name: Klasse:
- schriftlich / elektronisch, **KOMPLETTE LÖSUNGEN**, nicht nur die Antworten.

Wohin damit? – Folgende Möglichkeiten:

- Schriftlich: Deine Mathematiklehrperson im Unterricht oder Zimmer 47 im Annex
- Elektronisch: Die Lösungen scannen und per E-Mail an dmnikolenkov@kst.ch

Aufgabe 1 - 1 Punkt – Lösungsweg muss ersichtlich sein

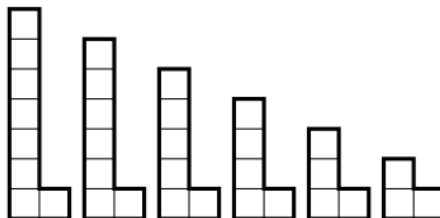
Man stelle so 6 verschiedene Zahlen auf einen Kreis, dass jede Zahl das Produkt der beiden Nachbarn ist.

Aufgabe 2 - 1 Punkt – Lösungsweg muss ersichtlich sein

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl, die nur aus Nullen und Einsen besteht und durch 225 teilbar ist.

Aufgabe 3 - 2 Punkte

Aus dem Satz "Ecken" ist ein Rechteck zu legen.



Bonus: Gib alle verschiedenen Lösungen, die Du gefunden hast, an.

Aufgabe 4 - 3 Punkte – Lösungsweg muss ersichtlich sein

Wenn wir die Zahlen $1, 2, \dots, n$ in irgendeiner Reihenfolge aufschreiben, bekommen wir eine n -Kette. Zum Beispiel eine der 11-Ketten wäre

3764581121910

Für welches kleinste $n > 1$ gibt es eine n -Kette, die ein Palindrom ist? (**Begründe!**)

(*Hinweis:* Palindrom ist eine Zahl, die man von links nach rechts und von rechts nach links gleich liest, z.B. 343, 170071, 222292222)

3 Zusammenhänge und Ausblicke

Ich hoffe mit diesem Challenge den Jugendlichen die grundlegenden *Ideen* der Mathematik anhand von einfachen Beispielen näher zu bringen. Erfreulich wäre es, wenn die Lernenden die Ideen selbst erkennen und weiter entwickeln würden.

Hier sind einige Beispielaufgaben mit kurzen Referenzen zu den erwähnten *Ideen*.

Aufgabe N1, Serie II, Schuljahr 2015-2016

Eine Uhr mit römischen Zahlen ist heruntergefallen und in vier Stücke zerbrochen. Die Summe der Zahlen auf jedem Stück beträgt 20. Bestimme, wie die Risse auf der Anzeige verlaufen.

Bonus: Gib alle Lösungen an, die Du gefunden hast.



Ideen:

- *Invarianz* – Die Summe der Zahlen muss konstant bleiben,
- *Teilbarkeit* – wie gross muss die Summe der Zahlen auf jedem Stück sein,
- *Konstruktion* – der Riss muss eine IX in eine X + I verwandeln oder ein IV in eine V + I.

Aufgabe N4, Serie IV, Schuljahr 2015-2016

$ABCD$ sei ein Quadrat.

Der Punkt K ist ausserhalb des Quadrates so gewählt, dass $\triangle ABK$ ein gleichseitiges Dreieck ist.

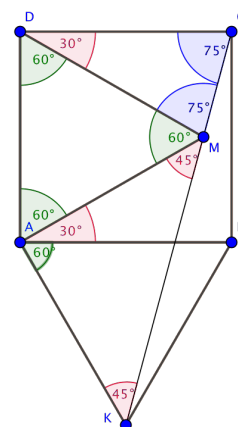
Der Punkt M ist innerhalb des Quadrates so gewählt, dass $\triangle ADM$ ein gleichseitiges Dreieck ist.

Beweise oder widerlege: Die Punkte C , M und K liegen auf einer Geraden.

Hinweis: fertige eine Konstruktion an. Die Konstruktion ALLEINE ist noch kein Beweis!

Ideen:

- *Was ist ein Beweis?* – Siehe der erste Hinweis (viele zeichnen es oder benutzen Software wie z.B. GeoGebra)
- *Äquivalenz* – drei Punkte liegen auf einer Geraden \iff der entsprechende Winkel = 180° .



Aufgabe N3, Serie III, Schuljahr 2014-2015

Stelle die Zahl 1001 als Summe von 4 natürlichen Zahlen dar, in deren Darstellung nur die Ziffern 0 und 7 vorkommen.

Ideen:

- *Abschätzung* – Wir brauchen wohl eine $7xx$ Zahl
- *Letzte Ziffer* – Wir müssen drei Summanden mit der letzten Ziffer 7 haben.

$$1001 = 770 + 77 + 77 + 70$$

4 Erfahrungen

Erfahrungsgemäss versuchen sich relativ viele Lernende an den ersten beiden Serien, dann bleiben in etwa 1/3 standhaft dabei bis zum Ende.

Teilnehmer- und Abgabezahlen der Kantonsschule Trogen in den Schuljahren 2014-15 und 2015-16 sind in der unten stehenden Tabelle zusammengestellt.

Jahr	# Lernenden	Abgabe Serien I / II	Abgabe alle Serien	"Gute " Noten
2014-15	173	36 / 23	7	7
2015-16	157	27 / 23	bis jetzt 12	??

Als "Belohnung" ist eine gute Note (liegt im Ermessen der Lehrperson) im Fach Mathematik oder Erweiterte Mathematik bei der Erreichung einer minimalen Grenze an Punkten vorgesehen. Denkbar sind auch abgestufte Modelle: jede Lehrperson kann sich überlegen, was am besten in ihr Konzept zur Bewertung der Leistungen passen würde.

Interessierte können sich bei mir unter dmnikolenkov@kst.ch melden. Mein komplettes Aufgabenset (mit Lösungen und einem Bewertungsvorschlag) für zwei Jahre stelle ich gerne zur Verfügung.

Der geschätzte Aufwand für die korrigierende Lehrperson beträgt circa 1-2 Stunden pro Serie, wenn wir von einer Teilnahme von 15 Lernenden ausgehen.

Die Aufgaben stammen zum sehr grossen Teil aus internationalen Wettbewerben wie USAMTS, Naboj, Matprazdnik, Matheregatta, etc. für die Altersgruppe zwischen 11 und 15 Jahren.

5 Dank

Die Realisierung dieses Projektes wäre unmöglich ohne die Hilfe meiner Kollegen A. Haidorfer (KST), L. Lippert(KST), M. Schenker(Liestal, Basel) und natürlich den Lernenden der beiden ersten Jahre an der Kantonsschule Trogen.

The ETH Math Youth Academy

Kaloyan Slavov, Dept. of Mathematics, ETH Zürich, kaloyan.slavov@math.ethz.ch

The ETH Math Youth Academy, recently established in Fall 2015, has been especially designed for Kurzzeitgymnasium students who want to engage in creative thinking and to delve deeper into exciting mathematics. The regular weekly classes are in the form of mini-courses on various extracurricular topics. The purpose of the present article is to provide details about the project and to invite teachers to collaborate.

1 SwissMAP and a mathematical “outreach” position at ETHZ

SwissMAP¹ is a large-scale, long-term project, funded by a grant from the Swiss National Science foundation, whose primary goal is to promote advanced-level research in mathematics and theoretical physics.

The project is so large that it also includes mathematical “outreach” activities for students in school. SwissMAP-funded outreach was first introduced in the French-speaking part of Switzerland, and has now further expanded to the German-speaking part. Namely, a new particular postdoc position at ETH Zürich has been recently created, with a focus on *designing* and *implementing* mathematical outreach activities for high school students. As I am holding this position since September 2015, I would like to describe the program that I have designed and launched. It is intended to be a long-term project and to grow over the upcoming years.

2 The weekly classes

The main activity of the ETH Math Youth Academy consists of regular weekly classes on topics outside of the standard gymnasium or university mathematics curriculum. There is an abundance of interesting, inspiring, and conceptual mathematics that is completely accessible to high school students and can be readily appreciated by them. Concrete examples will be given in Section 5. There is neither cost nor credit for these classes — they are meant for the personal enrichment and academic satisfaction of the students.

The course is intended for students in Kurzzeitgymnasium (above the age of 14). There is a “main” course for students in their early years of the gymnasium or students new to extracurricular mathematics, and a separate “advanced” course for the more experienced ones. The style and teaching philosophy is the same for both classes, but the topics in the advanced class are more difficult.

The main course meets on Wednesdays from 17:15 to 19:00 at ETH Zentrum. The schedule of the advanced class is coordinated with the schedules of the students attending and may vary from semester to semester; in Spring 2016, it takes place on Mondays from 17:15 to 19:00. Classes do not take place during school holidays.

¹<http://www.nccr-swissmap.ch>

The style of teaching is an interactive lecture format: I present material on the board, while continuously asking students for input and suggestions. I attempt to guide them to brainstorm ideas, build arguments, or, ideally, arrive at a solution. I spell out and write on the board the proofs with complete rigor: one of the goals of the course is that students become comfortable with the writing of rigorous and logically correct proofs.

2.1 Content

The classes are organized by topic or technique in the form of mini–courses, each lasting for 3 to 6 sessions. The focus is on elementary and yet nontrivial conceptual mathematics, whose aesthetics can be readily appreciated by the students. Some of the great ideas of mathematics manifest themselves already in settings which require only gymnasium–level background to understand. Moreover, exposure to such outside–of–the–box mathematical thinking is beneficial not only for the students who continue with mathematics in the university: the development of creative thinking and logical argumentation skills are advantageous in fact for any profession.

The classes take a middle–ground between what is regarded as “olympiad preparation/problem–solving” and theoretical mathematical studies. They are neither isolated problem–solving sessions, nor do they cover standard topics from the first years in a university. Preparation for mathematical olympiads is certainly a byproduct, but not the main goal in itself. Due to the systematic exposure to proofs, students will be better prepared for theoretical endeavors in the university.

2.2 Target audience and prerequisites

Geographically, any student willing to travel to ETH Zentrum is welcome. As of March 2016, regularly attending students come from the following schools: Literargymnasium Rämibühl, Realgymnasium Rämibühl, MNG Rämibühl, KS Freudenberg, KS Zürcher Oberland, KS Solothurn.

In terms of prerequisites, *any* student interested in pursuing extracurricular mathematics is very welcome to attend the classes! There is absolutely no specific background necessary — except, of course, comfort with the foundational material studied in school. In fact, students from the early years of the gymnasium are particularly encouraged to participate, since we can build more background over the years and delve into more advanced and sophisticated topics in the upcoming years.

I do not like to say that this is for the “gifted” or “talented” students, since it may often be too difficult or even impossible to judge correctly who is gifted at this age and who is not. In fact, those students are often modest and would not describe themselves as “gifted”, so they might be scared and decide that this is not for them.

Instead, this opportunity is aimed for the **interested** students. Any student motivated to spend these two hours after school doing extra mathematics is welcome. In fact, I encourage students in doubt to give it a try and then decide if they would like to continue or not. This is what happened when the project was launched: about 40 students from 6 schools attended the first two classes, and then about 15 keen ones continued to attend regularly. If more students from more schools hear about the project, they can check it out and make an informed decision if it is a good fit for them.

2.3 Model

These “math circle” classes model well–established traditions in Eastern Europe. For example, in my high school in Bulgaria, there were in fact separate such weekly classes for the students in each year of

the gymnasium. Math circles are popular in the United States — the Berkely math circle is a prominent example which illustrates the scale that such a project can reach: <http://mathcircle.berkeley.edu>.

According to [3], Switzerland (along with Liechtenstein) is best in Europe and 9-th in the world in terms of quality of the general-level mathematical education in school. However, the ETH Math Youth Academy is an opportunity for the students who want to engage further with mathematics to an *extracurricular* level. A student who enjoys music can play in an orchestra; a student who enjoys mathematics can take advantage of this new educational opportunity.

3 Public talks

Parallel to the weekly classes, I have launched an initiative for giving public talks at various high schools in Switzerland, emphasizing the aesthetic side of mathematics. I would love to communicate some of the most beautiful pieces of mathematics and to present them in an elementary and accessible way. These talks are meant to be short, up to 30 minutes (possibly less) and could fit into the school schedules during the lunch break, for example. They are designed for a *broad general audience* and are intended to be interesting and inspiring even for students whose favorite subject in school is not mathematics. The participation of students in a special school event with a guest speaker from ETH Zürich would add to the weight and popularity of mathematics as a school subject.

The first such talk that I gave took place at the Literargymnasium Rämibühl, thanks to the initiative of the math teacher Mrs. Margot Sigrist-Constantin, and the second one — at KS Baden, thanks to the enthusiasm of Mr. Armin Barth. They are available online

- Mathematical induction, <https://www.youtube.com/watch?v=ZgCHTAwm4>;
- Mathematical games, linked from <https://www.math.ethz.ch/eth-math-youth-academy>,

and I would encourage the readers to watch them for a concrete idea of how they work.

I have an abundance of further topics in mind, and I am looking forward to giving more talks. As an example, some of the problems discussed in Section 5 below would be appropriate as the content of a short public talk. As another example, in a talk on “Mathematical colorings,” I would start with the classical problem that if the bottom left and top right square of a chessboard have been removed, then the remaining squares cannot be tiled by 2×1 domino pieces (this is because in the standard coloring of the chessboard, each domino piece covers one white and one black square, while there are 30 black and 32 white squares remaining), and then discuss a second problem that involves a slightly fancier coloring. Further possible topics include: invariants, Pythagorean triples, number bases, prime numbers, Fibonacci numbers.

4 Your collaboration

The high participation rate and the success of the ETH Math Youth Academy so far have been due to the tremendous support that I had received from mathematics teachers in the months when I was informing the community about the project to be launched. My goals for the first year have been surpassed, and I am extremely grateful to all teachers who have contributed.

I strive for the project to expand significantly over its second year and to continue growing in the upcoming years. Therefore, I would like to invite teachers to promote its further development by

- arranging that I give a public talk at their school;
- informing their students about the weekly classes and encouraging them to participate;

- forwarding this announcement to other teachers or school administrators.

The ETH Math Youth Academy website is available at

<https://www.math.ethz.ch/eth-math-youth-academy>.

5 A sample class – the Extreme principle

This is a sample session from the main class. The “Extreme principle” refers to the general technique of picking an extreme element — smallest or largest — in a given setting or configuration. This could be a distance, an angle, an area (in geometry), a number that counts an appropriately-chosen quantity (in combinatorics), or a smallest solution of an equation (in number theory). Once such an extreme element has been singled out, just as a crack in the rock that a rockclimber grabs, it serves as a starting point in approaching the problem, and allows us to make deductions and build arguments.

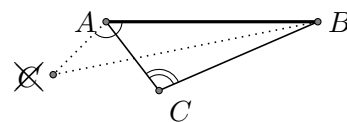
My view is that the Extreme Principle is most intuitively and vividly illustrated first in a *geometric* context, so the first few sessions in which I introduced it contained examples from geometry. Later on, thinking about an extreme element in combinatorial or number-theoretic settings will be seen by the students as a more natural approach.

For some of the problems below, I present just a solution, with only some hints about the guidance that I was giving, and omitting from the exposition the discussion that had taken place in class. For other problems, inspired by the style of [2], I also include samples from the classroom discussion. All of the problems presented here can be found in [1] or [4].

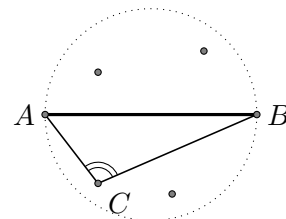
Problem 1. Finitely many points are given in the plane. It is known that the distance between any two of them is at most 1, and any triangle formed by three of these points has an obtuse angle. Prove that all the points are contained in some disc of diameter at most 1.

Solution. Since there are finitely many points given, there are also finitely many distances between pairs of points. Therefore, there is a *largest* distance: let A and B be two of the points, for which the distance AB is largest. If there are several such pairs, just take any one of them.

Now, by using the special choice of the points A and B , we can make a statement about the location of any *other* point C among the given ones. Where can C possibly be located? The triangle $\triangle ABC$ has an obtuse angle — where can that obtuse angle be? It cannot be that $\sphericalangle BAC > 90^\circ$, since then $CB > AB$, contradicting our choice of a *largest* distance AB . Therefore, we know that specifically, $\sphericalangle ACB > 90^\circ$.

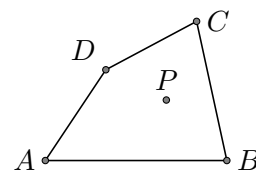


But this implies that any other point C is within the disc with diameter AB (recall that points on the circle with diameter AB satisfy $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, exterior points C satisfy $\sphericalangle ACB < 90^\circ$, and interior points C satisfy $\sphericalangle ACB > 90^\circ$). Since $AB \leq 1$, the disc with diameter AB satisfies the requirements.



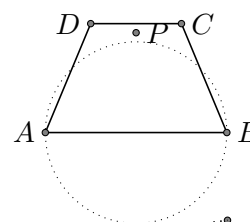
Problem 2. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. Prove that the discs with diameters AB, BC, CD, DA cover the whole interior of $ABCD$.

Discussion. Let P be an interior point. We have to prove that it belongs to one of these 4 discs. Which one? How would we select out a special side of the quadrilateral, to be sure that the respective disc contains the point P ?



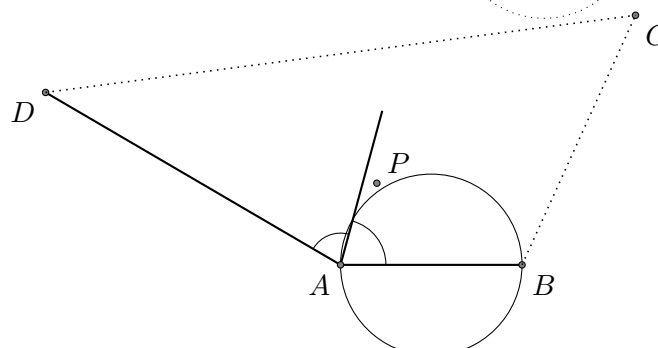
— Take the *longest* side of $ABCD$.

— But let's look at the following drawing. Here, this largest disc doesn't cover P . Moreover, it would be strange if this works, since then a *single* disc would cover the entire quadrilateral. You expect the target side to depend also on the point P .



— OK, then, take the side *closest* to P .

— This is a good guess; however, it could be that P is closest to the side AB , but still outside of the disc with diameter AB , as in the following picture.



— It is not the distance from a point to a side that tells you if the point belongs to the disc with diameter this side. Think about the previous problem. What does it mean quantitatively that P belongs to the disc with diameter, for example, AB ?

– It means that $\sphericalangle APB \geq 90^\circ$.

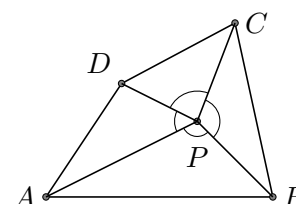
— Excellent! Now, how do we select out the required side, after all?

— One of the four angles, $\sphericalangle APB$, $\sphericalangle BPC$, $\sphericalangle CPD$, $\sphericalangle DPA$ must be at least 90° .

— Why?

— They add up to 360° .

— Exactly: they add up to 360° , so the *largest* angle among them must be at least 90° : if the largest angle were less than 90° , their sum would be less than $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.



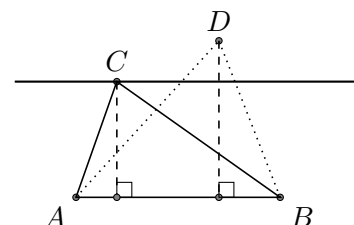
Problem 3. Finitely many points are given in the plane. It is known that the area of the triangle formed by any three of them is at most 1. Prove that all the points can be placed within a triangle of area at most 4.

Solution. What we are given and what we have to prove concern areas. We take a triangle $\triangle ABC$ with vertices among the given points, whose area is *largest*. We will use it to

- constrain the possible positions of all the *other* points;
- construct the required triangle of area at most 4.

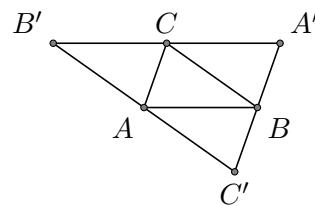
How does the choice of $\triangle ABC$ with largest area constrain the locations of the other points? Can you describe some region in the plane that for sure must contain all the other points?

If we draw a line through C parallel to AB , then all the other points must lie in the same half-plane determined by this line, as the points A, B — else, we would have a triangle $\triangle ABD$ of area larger than that of $\triangle ABC$.



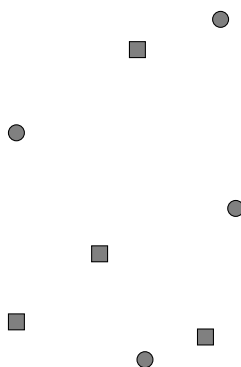
Therefore, if we build a triangle $\Delta A'B'C'$ by drawing similar lines through B and C , all of our points will lie within $\Delta A'B'C'$. Notice the three parallelograms in the figure. So, the area of $\Delta A'B'C'$ is

$$S_{A'B'C'} = 4S_{ABC} \leq 4.$$

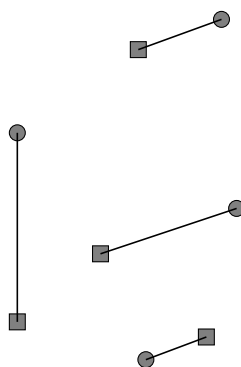


Problem 4. There are n farms and n wells in the plane, so that no three of the $2n$ points that they represent lie on a line. Prove that one can build n segments, each joining a farm and a well, such that no two of them intersect. In other words, one can match the farms and the wells via non-crossing straight roads.

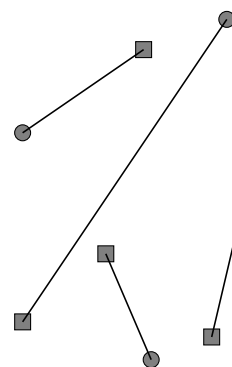
Discussion. Let's mark farms by squares, and wells by circles.



—How would you connect the farms and wells in this example?



A student suggests this matching.



— By the way, there are many solutions possible. Here is another, less “natural” one.

—This example could give us some feeling for the problem, but now we need to give a general proof. How would you construct a non-crossing matching?

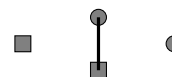
— Connect each farm to the *closest* well.

— This is a good start. A small problem is that some farm might have two equally close wells. If you say that you connect each farm to *a* closest well, then a problem is that some well might be the one closest to each of two farms.



— OK, then, pick one particular farm, join it to a well closest to it, isolate the pair, and continue.

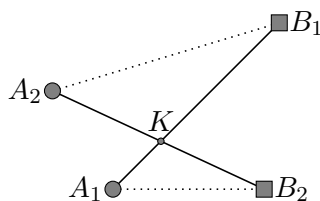
— Good idea. However, if we join a pair in this manner, we might get stuck and might not be able to continue, even if on the first step we had chosen a smallest distance between a farm and a well whatsoever.



— You are certainly on the right track, thinking about *short* segments and connecting points which are *close* to each other. It would be very unnatural to draw “long” segments, since you would expect that they would block possibilities to match the remaining points. However, you need to give a construction for the figure as a whole, all at once, and not give a “greedy” preference for a point or a pair that you join first, since it may then block other pairs.

There are finitely many possible matchings between farms and wells whatsoever (how many? exactly $n!$, in fact). Among all such matchings, with crossings or not, pick one for which the *sum* of all the drawn segments is *smallest*. Let's prove that for this particular (extreme) matching, there are in fact *no* intersections.

Suppose that A_1B_1 and A_2B_2 are two segments in this extreme matching, each joining a farm and a well, which intersect at a point K . We have to obtain a contradiction. What is going wrong here?



— It seems that

$$A_1B_2 + A_2B_1 < A_1B_1 + A_2B_2. \tag{1}$$

— Great! If we prove (1), we obtain the desired contradiction: if instead of matching A_1 with B_1 and A_2 with B_2 , we match A_1 with B_2 and A_2 with B_1 , keeping the rest of the matching unchanged, we obtain a matching with overall *smaller* total length! Now, why does (1) hold?

— Because the sum of the lengths of the diagonals is larger than the sum of the lengths of the opposite sides.

— Well, this is *restating* the claim in words, but is not a proof. You have to use the existence of this point K , so think about bringing it into the game.

— By the triangle inequality,

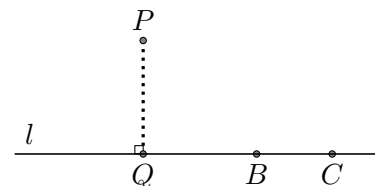
$$\begin{aligned} A_1B_2 &< A_1K + KB_2 \\ A_2B_1 &< A_2K + KB_1. \end{aligned}$$

Adding these two inequalities and combining the terms $A_1K + KB_1 = A_1B_1$ and $A_2K + KB_2 = A_2B_2$, we deduce (1).

Problem 5. (Sylvester–Gallai theorem) Finitely many points are given in the plane. The line through any two of them passes through a third. Prove that all the points lie on a line.

Solution. Suppose that not all of the points lie on a line. Since the given points are finitely many, the number of lines joining pairs of them is also finite.

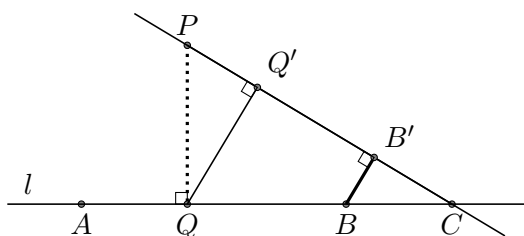
Among all the nonzero distances between a point among the ones given and a line joining two of the points given, take a *shortest* one. (Why does at least one nonzero distance exist?) Say the distance PQ between the point P and the line l is shortest. The line l joins two of the points given, and so, by assumption, it contains in fact at least *three* of them. At least two of them, say B and C , will be on the same side of Q (possibly, one coincides with Q). Without loss of generality, B is between Q and C .



But now, look at the distance between the point B and the line joining P and C :

$$0 < BB' \leq QQ' < PQ.$$

So, BB' is a nonzero distance between a point among the ones given and a line determined by two of them, which is smaller than the distance between P and l , contradicting the choice of P and l !



This problem is a perfect example of elementary and yet nontrivial mathematics. It has a rich history: the question was raised in 1893 and was not solved in fact until about 40 years later. This is a beautiful example of inspiring and *vivid* mathematics that is perfectly accessible and readily appreciated by interested high school students.

I had spent a total of 3 weeks on geometric illustrations in the spirit of the above problems, including a number of further problems solved by the subtle idea from Problem 5 above, so that students can

become comfortable with it. After each class, I compose a list of problems as optional homework, for the students who can afford the time to try them before the next class.

Next, I devoted a session to the Extreme Principle in *non-geometric* settings. It will prominently reappear later in number-theoretic settings.

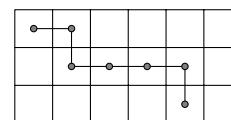
Problem 6. A positive integer has been written down in each square of an infinite square grid, so that each entry is the average of its four neighbors (sharing a side). Prove that all numbers written down are equal.

Solution. Any set of positive integers contains a smallest element. Let a be the *smallest* number written anywhere in the grid.

Consider any cell that contains the number a , and let b_1, \dots, b_4 be its four neighbors. Since a is the average of the b 's and $a \leq b_i$ for each i , then $a = b_i$ for each i .

\dots	b_1	\dots
b_2	a	b_4
\dots	b_3	\dots

So, any square adjacent to one containing a also contains a . Any cell in the grid can be reached from a cell containing a by a zig-zag path consisting of horizontal or vertical segments. Repeatedly applying our conclusion along such a path, we deduce that the number in each cell of the grid is a .



Problem 7. Each member of the Parliament has at most 3 enemies. Prove that the members can be split into two Houses, so that everyone has at most one enemy in their own House.

Solution. Among all possible splittings of the members into two Houses, take one for which the total number of pairs of enemies within the same House is *smallest*. We claim that this (extreme) splitting satisfies the required property. Suppose, for the sake of contradiction, that a member X of House A has at least 2 enemies in House A . Therefore, X has at most 1 enemy in House B . Move X to House B . The number of enemy pairs in House A will decrease by at least 2, while the number of enemy pairs in House B will increase by at most 1. Hence, the total number of enemy pairs within a house will *decrease* — a contradiction. Compare with Problem 4.

Notice the modest background required for any of the above problems. Any high school student who likes mathematics and is comfortable with the school material would be able to participate in, understand, and appreciate these classes.

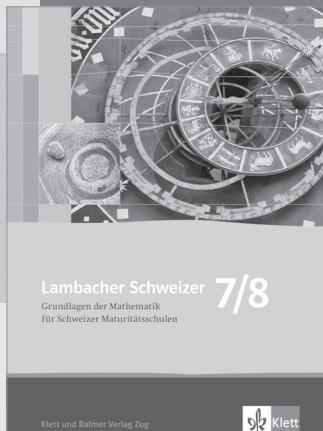
In the first months, the emphasis in the main class has been on combinatorics (elementary graph theory, invariants, mathematical colorings, mathematical games, the Pigeonhole principle). Towards the end of the academic year, the shift will move to number theory. I will start developing it completely from scratch, by introducing systematically basic congruences, Euclid's algorithm for division with remainder, properties of the prime numbers, existence of infinitely many primes, unique factorization, Fermat's Little Theorem. These sessions will be more theoretical in nature and will be building upon one another to a higher degree. However, the theory will be continuously illustrated by numerous concrete examples and applications, such as cryptography and Diophantine equations (describing all Pythagorean triples, for example).

References

- [1] A. Engel, *Problem-solving strategies*, 1998, Springer-Verlag NY.
- [2] D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg, *Mathematical circles (Russian experience)*, 1996, AMS.
- [3] <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm>
- [4] www.problems.ru (in Russian)

Lambacher Schweizer

Grundlagen der Mathematik für Schweizer Maturitätsschulen



Lambacher Schweizer 7/8
7. und 8. Schuljahr | Schulbuch
978-3-264-83981-4 | Fr. 28.50 ●

Lambacher Schweizer 9/10
9. und 10. Schuljahr | Schulbuch
978-3-264-83982-1 | Fr. 35.50 ●

Lambacher Schweizer 11/12
11. und 12. Schuljahr | Schulbuch
978-3-264-83983-8 | Fr. 35.50 ●

eBooks
zu «Lambacher Schweizer»
sind in Planung.

Das passende Lehrwerk für den Unterricht im Grundlagenfach

- Die Schweizer Ausgabe des bekannten Mathematiklehrwerks.
- Abgestimmt auf die Gymnasiallehrpläne sowie die Empfehlungen der Schweizerischen Maturitätskommission und der Arbeitsgruppe HSGYM.
- Das komplette Stoffprogramm vom Untergymnasium bis zur Matura in anregender, altersgerechter und attraktiver Form.
- Neben reinen Rechenfertigkeiten vermittelt der Unterricht mit «Lambacher Schweizer» weitere Fähigkeiten, die für die Allgemeinbildung grundlegend sind.

Weitere Informationen und Bestellmöglichkeiten finden Sie unter:
www.lambacher-schweizer.ch

Klett und Balmer Verlag



Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2A

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

“... , genügen lineare Modelle nicht mehr zur Erklärung. Das menschliche Gehirn kann jedoch nichtlineare Prozesse schlecht oder überhaupt nicht nachvollziehen, deshalb kommt die Mathematik ins Spiel.”¹

Dagmar Iber, Professorin für Computational Biology an der ETH Zürich

1

Die Differentialgleichung (Dgl) des *harmonischen Oszillators*

$$\ddot{y} + y = 0 \quad (1)$$

ist eine der einfachsten und eine Art *Grundgleichung der Schwingungslehre*. Mit

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \quad (2)$$

sind ihre sämtlichen Lösungen erfasst. Dabei bezeichnen c_1, c_2 beliebig wählbare Konstanten/Zahlen.

Im Spezialfall $c_1 = c_2 = 0$ gilt:

$$y(t) = 0 \text{ für alle } t \quad (3)$$

Das bedeutet: Der Schwinger befindet sich in Ruhe. Für jede andere Wahl von c_1, c_2 führt der Schwinger, wie es seinem Namen gebührt, Schwingungen aus. Dabei ist die Periode T der Schwingung unabhängig von der Wahl von c_1, c_2 immer gleich gross:

$$T = 2\pi$$

Die Schwingungen (2) werden als *harmonisch* bezeichnet. Die Dgl (1) beschreibt ein einfaches aber sehr grundlegendes schwingungsfähiges System.

2

Interessant kann es werden wenn man etwas von der einfachen Situation abweicht, die durch Gleichung (1) beschrieben wird und den harmonischen Oszillator *stört*, wie man sagt. Das Wort “stören” soll zum Ausdruck bringen, dass Gleichung (1) nur *geringfügig verändert* werden soll. Um die Stärke der Abweichung von (1) steuern zu können führt man häufig einen sogenannten

kleinen Parameter ϵ

ein und betrachtet an Stelle von (1) eine *Familie* von Differentialgleichungen

$$\ddot{y} + y = \epsilon g \quad (4)$$

Der Parameter ϵ wird dabei als *positiv*, aber *hinreichend klein* gedacht. Das heisst er “lebt” im Intervall

$$(0, \epsilon_0)$$

¹In: “Frau Iber, lässt sich das Leben mit Mathematik erklären?”, Zürcher Wirtschaftsmagazin 2/2014, p. 10-13.

wobei ϵ_0 so klein wie nötig gewählt wird.

Je nach der *Wahl der Funktion* g , die die *Störung* bestimmt, variiert der Schwierigkeitsgrad des Problems (4). Im einfachsten Fall ist g lediglich eine Funktion von y :

$$g = g(y) \quad (5)$$

Im nächst schwierigeren Fall ist g eine Funktion von y und \dot{y} :

$$g = g(y, \dot{y}) \quad (6)$$

Schliesslich erhält man den schwierigsten Fall, wenn g zusätzlich von der unabhängigen Variablen t abhängt:

$$g = g(t, y, \dot{y}) \quad (7)$$

Es soll ein für allemal die *Voraussetzung* gemacht werden, dass g eine *hinreichend reguläre Funktion* ihrer drei Argumente t, y, v ist. Dabei habe ich zur grösseren Klarheit v an Stelle von \dot{y} geschrieben, also $g(t, y, v)$ statt $g(t, y, \dot{y})$. Je nach Wahl von g erhält man berühmte Gleichungen:

$$\begin{aligned} g(t, y, v) &= ay + by^3, \quad a, b \text{ Konstante} \\ g(t, y, v) &= (1 - y^2)v \\ g(t, y, v) &= 2\nu y - 2\delta v + \gamma y^3 + 2 \cos(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Mit der ersten Wahl (8) wird eine *schwach nichtlineare Feder* modelliert, die zweite Wahl (8) ergibt die sogenannte *van der Pol-Gleichung*, siehe “*Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*”, dort Gleichung (1), und die dritte Wahl (8) die *Duffing-Gleichung*, siehe “*Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*”, Gleichung (30).

Eine Lösung der Dgl (4) ist eine (mindestens zweimal stetig differenzierbare) Funktion $y(t)$, für die

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \epsilon g(t, y(t), \dot{y}(t), \epsilon) \quad (9)$$

im Definitionsbereich von $y(t)$ gilt.

Typischerweise ist es *nicht möglich*, Lösungen von (4) mit Hilfe von bekannten Funktionen zu beschreiben. Man versucht daher (4) *approximativ* zu lösen und auf diese Weise Information über die Lösungen von (4) zu gewinnen.

Naheliegender ist, das Problem mit Hilfe eines *numerischen Solvers* anzugehen. Das ist aber in dieser Situation aus verschiedenen Gründen oft kein guter Weg. Bei einem numerischen Vorgehen muss man *Anfangsbedingungen* (in unserem Fall also die Werte für $y(0)$ und $\dot{y}(0)$) festlegen. Wie die Wahlen 1 und 3 in (8) für g zeigen, hängt die Dgl (4) nicht nur vom Parameter ϵ , sondern unter Umständen noch von mehreren weiteren Parametern ab, die man für eine numerische Integration samt und sonders festlegen muss. Und schliesslich gibt es eine weitere gewichtige Schwierigkeit, die damit zusammenhängt, dass das *Ziel* hier sein soll, quasi den Grenzfall

$$\epsilon \longrightarrow 0$$

zu studieren.

3

Lösungen von Differenzialgleichungen hängen unter sehr wenig einschränkenden Bedingungen *regulär* von den *Anfangsbedingungen* und allfällig vorhandenen *Parametern* ab². Bezogen auf (4) heisst das folgendes.

Betrachten wie eine *Familie von Lösungen*

$$y(t, \epsilon)$$

von (4) (zum Beispiel indem wir die Anfangsbedingungen spezifizieren, etwa $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$ setzen, und allenfalls in der Dgl vorkommende Parameter fixieren). Denken wir uns eine positive Zahl T (beliebig gross, aber fest³) gewählt. Dann gilt auf Grund des EER-Satzes:

$$\max_{t \in [0, T]} |y(t, \epsilon) - y(t, 0)| \rightarrow 0 \text{ für } \epsilon \rightarrow 0 \quad (10)$$

Das bedeutet: Auf dem Zeitintervall

$$t \in [0, T] \quad (11)$$

kann sich die Störung ϵg für $\epsilon > 0$, hinreichend klein, *gar nicht richtig auswirken* – sie hat sozusagen gar nicht genug Zeit Wirkung aufzubauen, um die zu Grunde liegende harmonische Schwingung nachhaltig zu beeinflussen.

Um das zu bewirken, muss man die Störung sich “länger einmischen lassen”. Wie lange?

Klar – wenn man an Stelle von (11) das Intervall

$$t \in [0, \infty) \quad (12)$$

ins Auge fasst, dann sollte sich der Einfluss der Störung auswirken können. Nur – das ist eine *sehr* lange Zeit, sodass leider eine *sehr schwierige* Aufgabe resultiert.

Zum Glück gibt es etwas dazwischen. Die Kleinheit der Störung in (4) wird ja mit Hilfe des Parameters ϵ “gemessen”. Da ist es verlockend auch das Zeitintervall, während dessen man die Störung sich auf den harmonischen Oszillator einwirken lässt, mit dem Parameter ϵ in Verbindung zu bringen. Wir wünschen daher ein *Zeitintervall* das *wächst*, wenn ϵ *abnimmt*. Sei $L > 0$ (beliebig gross, aber fest gewählt) und fassen wir das Zeitintervall

$$t \in [0, \frac{L}{\epsilon}] \quad (13)$$

ins Auge. Es wird als *expandierend* bezeichnet, weil es umso grösser ist, je kleiner ϵ ist.

Das (Wunsch-)Ziel ist, Aussagen über das Verhalten der Lösungen von (4) zu machen, die (mindestens) für das Zeitintervall (13) gelten, und zwar für alle positiven Werte von ϵ , die kleiner als eine geeignet gewählte Schranke ϵ_0 sind.

Die Hoffnung ist, dass diese Fragestellung *interessant*, aber *nicht zu schwierig* ist.

4

Ein bewährter Lösungsansatz in der Mathematik ist, ein Problem durch *Transformation* in eine möglichst einfache Form zu bringen ehe man es endgültig zu knacken versucht. Das gilt auch und gerade für den Umgang mit Differenzialgleichungen.

²Das ist der *Regularitätsteil* des Satzes über die Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Lösungen von Differenzialgleichungen, kurz: EER-Satz.

³Gemeint ist: *unabhängig* von ϵ , siehe unten.

Betrachten Sie eine Dgl 1. Ordnung, oder allgemeiner, ein System⁴ von Differenzialgleichungen (kurz: Dgl-System) 1. Ordnung

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{14}$$

Eine *Transformation* ist eine *Beziehung* zwischen den (alten) Variablen y von (14) und neuen Variablen x der Form

$$y = h(t, x) \tag{15}$$

wobei die Voraussetzung ist, dass man die Beziehung (15) nach x auflösen kann.

Dann gibt es zu einer Lösung $y(t)$ von (14) eine Funktion $x(t)$, sodass

$$y(t) = h(t, x(t)) \tag{16}$$

gilt und man kann fragen, *welche* Dgl $x(t)$ dann erfüllen muss. Differenziation von (16) nach t unter Beachtung der Kettenregel liefert⁵

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) \tag{17}$$

Da $y(t)$ nach Annahme Lösung von (14) ist, gilt mit (16)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) = f(t, h(t, x(t))) \tag{18}$$

Der Vergleich von (17) und (18) liefert:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) = f(t, h(t, x(t))) \tag{19}$$

Indem man (19) nach $\dot{x}(t)$ auflöst und wieder x statt $x(t)$ und \dot{x} statt $\dot{x}(t)$ schreibt, (weil die durchgeführte Rechnung ja für jede beliebige Lösung von (14) gilt), folgt:

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) \right]^{-1} \left[-\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + f(t, h(t, x)) \right] \tag{20}$$

Obwohl die Formel (20) furchterregend aussieht kann sie potentiell genutzt werden, um die Dgl (14), die studiert werden soll, durch eine einfachere, (20), zu ersetzen, wie Sie gleich sehen werden.

5

Damit die im letzten Abschnitt vorgestellte Transformationstechnik für die Gleichung (4) des gestörten harmonischen Oszillators genutzt werden kann, schreibt man die Gleichung als System von zwei Differenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= & y_2 \\ \dot{y}_2 &= & -y_1 + \epsilon g(t, y_1, y_2) \end{cases} \tag{21}$$

⁴Ich benutze im Folgenden die Begriffe “Differenzialgleichung” und “System von Differenzialgleichungen” synonymisch. Dank der Vektornotation braucht man die beiden Objekte nicht gross zu unterscheiden. Was gemeint ist, wenn der Unterschied einmal relevant sein sollte, ergibt sich mühelos aus dem Zusammenhang.

⁵Wenn y, x skalare Variable sind, $h(t, x)$ dementsprechend eine skalare Funktion, ist $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x)$ einfach die (partielle) Ableitung von $h(t, x)$ nach x . Meinen y, x hingegen Vektoren (gleicher Dimension), $h(t, x)$ entsprechend eine Vektorfunktion, dann bedeutet $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x)$ die *Jacobische Matrix*. Im Fall der Dimension 2 ist das die folgende 2×2 -Matrix der vier partiellen Ableitungen von h_1, h_2 nach x_1, x_2 :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(t, x) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(t, x) \end{pmatrix}$$

Die jetzt zu definierende Transformation macht sich zu Nutze, dass man die Lösungen des (ungestörten) harmonischen Oszillators (1) kennt. Ausgehend von (21) für (14) wählen wir als Transformation (15)

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t) \\ y_2 &= -x_1 \sin(t) - x_2 \cos(t) \end{cases} \quad (22)$$

Die Durchführung der Rechnung, die durch Gleichung (20) beschrieben wird, liefert:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -\epsilon g^* \sin(t) \\ \dot{y}_2 &= -\epsilon g^* \cos(t) \end{cases} \quad (23)$$

Dabei ist g^* diejenige Funktion, die man erhält, wenn man die Transformation (22) in $g(t, y_1, y_2)$ einsetzt, also

$$g^*(t, x_1, x_2) = g(t, x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t), -x_1 \sin(t) - x_2 \cos(t)) \quad (24)$$

Der *Gewinn*: Für $\epsilon = 0$ reduziert sich die Dgl (23) auf das triviale System

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= 0 \\ \dot{y}_2 &= 0 \end{cases} \quad (25)$$

Einfacher geht's nicht mehr! Ob (23) somit ein guter Ausgangspunkt ist, um Informationen über die Lösungen des Dgl-Systems (23) für kleine positive Werte des Störparameters ϵ zu gewinnen? Das Dgl-System (25) ist jedenfalls sehr *speziell*: Seine *sämtlichen Lösungen* sind sogenannte *Gleichgewichtslösungen*⁶:

$$y_1(t) = c_1, \quad y_2(t) = c_2 \quad (26)$$

mit c_1, c_2 beliebige Zahlen. Weil der Begriff so wichtig ist: Eine Lösung eines Dgl-Systems ist also eine Gleichgewichtslösung, wenn sie sich *im Laufe der Zeit t nicht ändert*. Alternativ ausgedrückt: Wenn sie durch *konstante Funktionen* beschrieben wird.

(25) ist insofern *kein* guter Ausgangspunkt, als sich die Lösungen von (23) von denjenigen des Systems (25) ganz fundamental unterscheiden können, wie sich zeigen wird. Anders herum betrachtet bedeutet das, dass die *Störung*, in (23) beschrieben durch die Terme $-\epsilon g^* \sin(t)$ und $-\epsilon g^* \cos(t)$, die Dynamik des Schwingers (4) *wesentlich beeinflusst*, obwohl die Störung ja (wegen des Parameters ϵ) "nur klein" – eben "nur" eine Störung ist. Wir haben also eine interessante Fragestellung, aber auch ein Problem!

Das System (23) direkt anzupacken, ist zu schwierig. Der Aussagegehalt des Systems (25) als Annäherung an das System (23) ist zu gering. Was tun? Der *Wunsch* liegt auf der Hand: *Man hätte gern ein approximierendes System, das einfacher ist als (23), und doch viel über (23) aussagt*, jedenfalls mehr als (25)! Ein solch *vermittelndes System* gibt es.

6

Losgelöst von Details ist (23) ein Dgl-System von folgendem Typ

$$\dot{x} = \epsilon q(t, x) \quad (27)$$

Dabei ist q oft, und jedenfalls im Fall der hier vorallem interessierenden Duffing-Gleichung in t 2π -*periodisch*, das heisst, es gilt:

$$q(t + 2\pi, x) = q(t, x) \quad (28)$$

⁶Man sagt auch *Gleichgewichtspunkte*, *Gleichgewichte*, *stationäre Lösungen*, *stationäre Punkte*, und sogar *Fixpunkte*.

für *alle* t und *alle* x . Das ist im Fall der Duffing-Gleichung einerseits deshalb so, weil die Funktion $g(t, y, v)$ in (8) 3. Beispiel, bezüglich t (also bei festen Werten der übrigen Variablen) 2π -periodisch in t ist⁷ und andererseits, weil auch die Transformation (22) (bei festen Werten von x_1, x_2) 2π -periodisch in t ist.

Aus der Periodizitätseigenschaft (28) von q folgt (unter schwachen Voraussetzungen über die Regularität von q , die in der Praxis üblicherweise erfüllt sind), dass sich $q(t, x)$ in eine *Fourier-Reihe* nach t (mit Koeffizienten, die Funktionen von x sind) entwickeln lässt. Häufig handelt es sich bei den Beispielen, auch bei der Duffing-Gleichung, sogar lediglich um ein *Fourier-Polynom*, das heisst um eine Fourier-Reihe mit nur endlich vielen Termen.

Es hat eine lange Geschichte⁸, dass man dem Dgl-System (27) das sogenannte *gemittelte* Dgl-System⁹

$$\dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{q}(\bar{x}) \quad \text{mit: } \bar{q}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t, \bar{x}) dt \quad (29)$$

zur Seite stellt und hofft, dass die Information, die das System (29) liefert, auch Aufschlüsse gibt über das eigentlich interessierende System (27).

Es ist ein (zumindest *prima vista*) etwas irritierendes Vorgehen: Beim Übergang vom System (27) zum gemittelten System (29) wird in der Fourier-Entwicklung von $q(t, x)$ nach t *nur* der *konstante*, also der von t *unabhängige* Term *zurück behalten*. Alle übrigen Terme der Fourier-Entwicklung hingegen werden weggelassen! Allein – das Vorgehen lässt sich (bis zu einem gewissen Grad) rechtfertigen, siehe dazu Abschnitt 7.

Bildet man \bar{q} für die Duffing-Gleichung, siehe (8) Beispiel 3 im Verein mit (23), erhält man das folgende *gemittelte System* für die *Duffing-Gleichung*:

$$\begin{cases} \bar{x}'_1 &= -\delta \bar{x}_1 + \nu \bar{x}_2 - \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_2 \\ \bar{x}'_2 &= -\nu \bar{x}_1 - \delta \bar{x}_2 + \kappa (\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2) \bar{x}_1 - 1 \end{cases} \quad (30)$$

Dabei wird an Stelle der Zeit t die

$$\text{“skalierte Zeit” } \tau = \epsilon t$$

als unabhängige Variable verwendet und der Akzent ' bezeichnet entsprechend die Ableitung nach τ . Überdies wurde

$$\kappa := -\frac{3}{8} \gamma \quad (31)$$

eingeführt.

Es stellen sich an dieser Stelle (mindestens) *zwei Fragen*:

- (A) Was ist die *Rechtfertigung*, dass man (27) durch (29) *approximiert*, also nur den Mittelwert der Funktion q ihrer Fourier-Entwicklung berücksichtigt?

⁷Wenn, wie im Moment, t, y und v als unabhängige Variable betrachtet werden, dann geht t ja nur via den Term $2 \cos(t)$ ein und der ist natürlich in t 2π -periodisch.

⁸Mit vielen Vätern (und auch ein paar Müttern!) Einige wenige Hinweise enthält der Teil “*Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*” dieser Reihe im dortigen Abschnitt 4. Eine Aufarbeitung der Geschichte dieses manchmal als *Mittelwertprinzip* bezeichneten Vorgehens mit seinen vielfältigen Bezügen, wäre ein eigenes Projekt.

⁹Bei der Mittelwertbildung zur Berechnung von $\bar{q}(\bar{x})$ wird \bar{x} als *konstant* (als Parameter) betrachtet, und nur über t integriert.

- (B) Was ist der *Vorteil* des gemittelten Dgl-Systems im Allgemeinen und des gemittelten Systems (30) zur Duffing-Gleichung im Speziellen, wenn man sie mit der Duffing-Gleichung

$$\ddot{y} + y = \epsilon [2\nu y - 2\delta \dot{y} + \gamma y^3 + 2 \cos(t)] \quad (32)$$

beziehungsweise¹⁰ mit

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = & y_2 \\ \dot{y}_2 = & -y_1 + \epsilon [2\nu y_1 - 2\delta y_2 + \gamma y_1^3 + 2 \cos(t)] \end{cases} \quad (33)$$

vergleicht? Wie erhält man Information allgemein über die Lösungen des gemittelten Systems (29), bzw. speziell über das gemittelte System (30) zur Duffing-Gleichung?

Frage (A) ist von allgemeinerer Natur, das heisst sie betrifft die sogenannte *Mittelwertmethode*¹¹ (*method of averaging*) grundsätzlich. Frage (B) ist teils ebenfalls allgemeiner Natur, muss teils aber auch zugeschnitten auf das jeweils interessierende Beispiel, hier also die Duffing-Gleichung, angegangen werden.

7

Ich wende mich zuerst der Frage (A) zu und zeige, dass der Schritt vom Dgl-System (27) zum Dgl-System (29) weder so willkürlich ist, wie er vielleicht zunächst erscheint, noch so überraschend. Die Pointe ist: Man kann das Dgl-System (27) durch eine sogenannte *fast-identische Transformation* in ein Dgl-System transformieren, das sich vom Dgl-System (29) nur *um Terme höherer Ordnung in ϵ* , nämlich um quadratische und/oder Terme noch höherer Ordnung in ϵ unterscheidet. Folglich kann der Schritt vom Dgl-System (27) zum Dgl-System (29) so erklärt werden, dass Terme höherer Ordnung im kleinen Parameter ϵ gegenüber dem linearen Term in ϵ weggelassen werden – was immerhin nicht einer gewissen Plausibilität entbehrt. Die Transformationstechnik aus Abschnitt 4 kommt also nochmals zum Einsatz und erweist sich als wichtiges Hilfsmittel, um das Mittelwertprinzip auf eine gute mathematische Grundlage zu stellen.

Die Transformation, die das Gewünschte leistet, ist wie folgt definiert. Man geht von den “alten” Variablen x zu “neuen” Variablen \bar{x} über, gemäss der folgenden Vorschrift:

$$x = h(t, \bar{x}) := \bar{x} + \epsilon s(t, \bar{x}) \quad (34)$$

Dabei ist die Funktion s wie folgt definiert

$$s(t, \bar{x}) = \int_0^t [q(t, \bar{x}) - \bar{q}(\bar{x})] dt \quad (35)$$

Beachten Sie: Da im Integranden der Mittelwert \bar{q} von q subtrahiert wird, ist die Funktion $s(t, \bar{x})$ 2π -periodisch in t . Warum das wichtig ist wird in der *Anmerkung* weiter unten erläutert.

Man nennt die Transformation (34) deshalb “fast-identisch”, weil sie sich für $\epsilon = 0$ auf die identische Transformation $x = \bar{x}$ reduziert.

Wendet man (34) auf die interessierende Gleichung (27), also auf

$$\dot{x} = \epsilon q(t, x) \quad (36)$$

¹⁰Falls man die Duffing-Gleichung als System 1. Ordnung schreibt.

¹¹So nennt man den Übergang von (27) zu (29) und Verallgemeinerungen davon.

an, erhält man (zum Beispiel unter Benutzung von (20))

$$\dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{q}(\bar{x}) + \epsilon^2 \hat{q}(t, \bar{x}, \epsilon) \tag{37}$$

mit einer regulären und bezüglich t 2π -periodischen Funktion \hat{q} .

Dazu folgende *Anmerkung*. Würde man im Integranden (35) den Mittelwert \bar{q} *nicht* subtrahieren, wäre die Funktion s im Allgemeinen in t *nicht* 2π -periodisch, sondern *unbeschränkt*. Das will man aus (mindestens) zwei Gründen auf gar keinen Fall: Erstens wäre dann typischerweise die Funktion \hat{q} in t unbeschränkt und man hätte wenig Anlass (37) durch das gemittelte System

$$\dot{\bar{x}} = \epsilon \bar{q}(\bar{x}) \tag{38}$$

zu approximieren. Zweitens ist die 2π -Periodizität des interessierenden Systems (36) ein charakteristisches *Strukturelement* des Problems. Dieses durch eine Transformation quasi zu “verstecken”, wäre bestimmt keine gute Strategie!

Mindestens heuristisch ist damit begründet, dass es schon gerechtfertigt zu sein scheint, anstelle von (36) das gemittelte System (38) zu untersuchen. Mathematisch orientierte Leserinnen und Leser wollen sich jedoch vielleicht mit einem nur plausiblen Argument nicht zufrieden geben. In der Tat gibt es eine umfangreiche Literatur, die sich mit den Beziehungen zwischen den Systemen (36) (beziehungsweise (37)) und (38) auseinandersetzt. Ich begnüge mich hier damit, *zwei* einfache Ergebnisse zu zitieren.

Unter schwachen Voraussetzungen kann man *erstens* folgendes beweisen. Sei $\tilde{x}(t)$ eine Lösung von (37), $\bar{x}(t)$ die Lösung von (38) zur gleichen Anfangsbedingung (es gelte also: $\tilde{x}(0) = \bar{x}(0)$) und es sei $L > 0$ beliebig vorgegeben. *Dann gibt es positive Zahlen ϵ_0 und c , sodass für $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ gilt: Der Abstand¹² zwischen den beiden Lösungen ist für Zeiten t im Intervall*

$$\left[0, \frac{L}{\epsilon}\right]$$

nicht grösser als

$$c\epsilon$$

Der Beweis ergibt sich recht einfach mit dem sogenannten *Gronwall-Lemma*, das ebenfalls nicht schwer zu beweisen ist. Dieses Resultat entspricht der in Abschnitt 3 formulierten Wunschvorstellung.

Das *zweite* Ergebnis, das ich zitieren möchte, nimmt Bezug auf *Gleichgewichtslösungen*¹³ des gemittelten Systems (38)¹⁴. Man erhält sie als *Nullstellen* der Funktion $\bar{q}(\bar{x})$. Sei X ein solche Nullstelle, das heisst es gelte

$$\bar{q}(X) = 0 \tag{39}$$

Dann ist

$$\bar{x}(t) = X \quad \text{für alle } t$$

Lösung von (38), denn es gilt

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{cases} (X)' = 0 \\ \bar{q}(\bar{x}(t)) = \bar{q}(X) = 0 \end{cases}$$

Eine Gleichgewichtslösung bedeutet (wie wir schon früher bemerkt haben, siehe Abschnitt 5): Der Zustand¹⁵ des Systems ändert sich im Laufe der Zeit nicht.

¹²Gemessen z. B. in der Euklidischen Norm, wenn das Problem mehrdimensional ist.

¹³Hinsichtlich verschiedener gleichwertiger Bezeichnungen des Begriffs, siehe Fussnote 6.

¹⁴Und hat somit auch etwas mit Frage (B) in Abschnitt 6 zu tun.

¹⁵Der Hintergrund der Terminologie ist folgender. Eine Dgl ist ein *System*, das einen *Vorgang* oder *Prozess* definiert. Eine Lösung beschreibt einen möglichen *Prozessverlauf*. Unter dem *Zustand des Systems*, kurz: dem (*System-*)*Zustand*, zu einem gewissen Zeitpunkt, versteht man den Wert der Lösung zu diesem Zeitpunkt.

Das Gleichgewicht X wird als *nicht-ausgeartet* bezeichnet, wenn die Jacobische Matrix

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}}(X) \quad \text{regulär} \quad (40)$$

ist, das heisst ihre Determinante ungleich 0 ist.

Die *Pointe*: *Nicht-ausgeartete Gleichgewichtslösungen des gemittelten Systems* (38) generieren 2π -periodische Lösungen des Dgl-Systems (37) und damit auch des Dgl-Systems (36).

Das heisst genauer folgendes: Zu einer nicht-ausgearteten Gleichgewichtslösung X von (38) gibt es für alle hinreichend kleinen, positiven Werte von ϵ eine in t 2π -periodische Funktion $X(t, \epsilon)$, die Lösung von Gleichung (37) ist und es gilt

$$X(t, \epsilon) \longrightarrow X \quad \text{für} \quad \epsilon \rightarrow 0$$

Zum Beweis betrachtet man die "Poincaré-" oder "Perioden-Abbildung" zum Dgl-System (37) und wendet das Implizite-Funktionen-Theorem aus der Analysis an¹⁶.

Überdies gilt: Ist die Jacobi-Matrix in (40) sogar *hyperbolisch*, das heisst keiner ihrer Eigenwerte liegt auf der imaginären Achse¹⁷, dann zeigen die Lösungen von (37) in der Nähe der periodischen Lösung $X(t, \epsilon)$ das *analoge Verhalten* wie die Lösungen von (38) in der Nähe der Gleichgewichtslösung X .

Insbesondere gilt: Liegen die Eigenwerte der Jacobi-Matrix in (40) in der *linken komplexen Halbebene*¹⁸, dann streben die Lösungen von (37) gegen die periodische Lösung $X(t, \epsilon)$, sofern sie ausreichend nahe bei ihr starten.

Diese letzten beiden Aussagen ergeben sich aus einer Variante des sogenannten *Satzes von Grobman-Hartman*.

Damit haben wir nun einigen Hintergrund um uns mit dem konkreten Beispiel der Duffing-Gleichung zu befassen. Dies geschieht im nächsten Heft dieses Bulletins im Teil: *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2B*. Dort wird das gemittelte System (30) zur Duffing-Gleichung untersucht und es werden einige Folgerungen über die Duffing-Gleichungen gezogen. Im letzten (nur noch kurzen!) Teil: *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2C*, wird anhand der Duffing-Gleichung ein (auch erkenntnistheoretisch) hoch interessantes Phänomen erläutert.

Literatur

- [1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
- [2] U. Kirchgraber: *Schwingungen I oder wenn der Vater mit dem Sohn*, VSMP-Bulletin Nr. 128, Mai 2015, p. 24-30, *Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*, VSMP-Bulletin Nr. 129, September 2015, p. 10-19, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1*, VSMP-Bulletin Nr. 130, Januar 2016, p. 24- 31.
- [3] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.

¹⁶Die Perioden-Abbildung ist mit Hilfe des Dgl-Systems (37) wie folgt definiert. Zu einem Punkt \bar{x}_0 des \bar{x} -Raumes sei $\bar{x}(t, \bar{x}_0, \epsilon)$ die Lösung für die $\bar{x}(0, \bar{x}_0, \epsilon) = \bar{x}_0$ gilt. Die Perioden- oder Poincaré-Abbildung P_ϵ ordnet dem Punkt \bar{x}_0 den Wert der Lösung $\bar{x}(t, \bar{x}_0, \epsilon)$ zur Zeit 2π zu, also

$$\bar{x}_0 \longrightarrow P_\epsilon(\bar{x}_0) := \bar{x}(2\pi, \bar{x}_0, \epsilon)$$

Die *Pointe*: *Fixpunkte* von P_ϵ erzeugen 2π -periodische Lösungen. Ist \bar{x}_0^ϵ ein Fixpunkt von P_ϵ , dann ist $\bar{x}(t, \bar{x}_0^\epsilon, \epsilon)$ eine 2π -periodische Lösung von (37). Es ist offensichtlich, dass die Nullstellen von \bar{q} , siehe (39), Fixpunkte von P_0 sind. Unter der Bedingung (40) können sie mit Hilfe des Impliziten-Funktionen-Theorems aus der Analysis für $\epsilon > 0$, hinreichend klein, fortgesetzt werden. Die Überlegungen in dieser Fussnote sind eng verwandt mit denjenigen im Teil "*Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*", Abschnitte 7, 8, dieser Artikel-Reihe.

¹⁷Noch einmal anders formuliert: Die Matrix in (40) hat *keine* rein-imaginären Eigenwerte.

¹⁸Anders formuliert: Alle Eigenwerte haben nicht-verschwindende negative Realteile.

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF - SSPMP - VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber — Éditeur

VSMP – SSPMP–SSIMF

Korrespondenz — Correspondance

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout — Mise en page

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — Publicité

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— Tarifs pour les annonces et les annexes

Inserate:
ganzseitig Fr. 500.–
halbseitig Fr. 300.–
Beilagen:
bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — Changement d'adresse

VSMP Mitglieder — *Membres de la SSPMP:*
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax. 056 443 06 04
information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — *autres abonnées:*
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage — Tirage

900 Exemplare
erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Domenico Galli 44
6600 Locarno-Solduno Tel. 091 751 14 47

Deutschschweizerische Mathemattikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Pestalozzistrasse 17 Tel. 034 423 46 43
3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gfbienne.ch
rue Louis-de-Meuron 4 Tél. 032 544 47 53
2074 Marin-Epagnier

Commission Romande de Physique

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Luca Rovelli lucarovelli@ticino.com
Via Pedmunt 10 Tel. 091 825 76 69
6513 Monte Carasso

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— Délais de rédaction (de parution)

Nr. 132	31.07.2016 (20.09.2016)
Nr. 133	30.11.2016 (20.01.2017)
Nr. 134	31.03.2017 (20.05.2017)

Druck und Versand — Imprimerie

Niedermann Druck AG
Letzistrasse 37
9015 St. Gallen
www.niedermanndruck.ch

Internet-Adressen — Adresses Internet

www.vsmf.ch — www.sspmp.ch — www.ssimf.ch