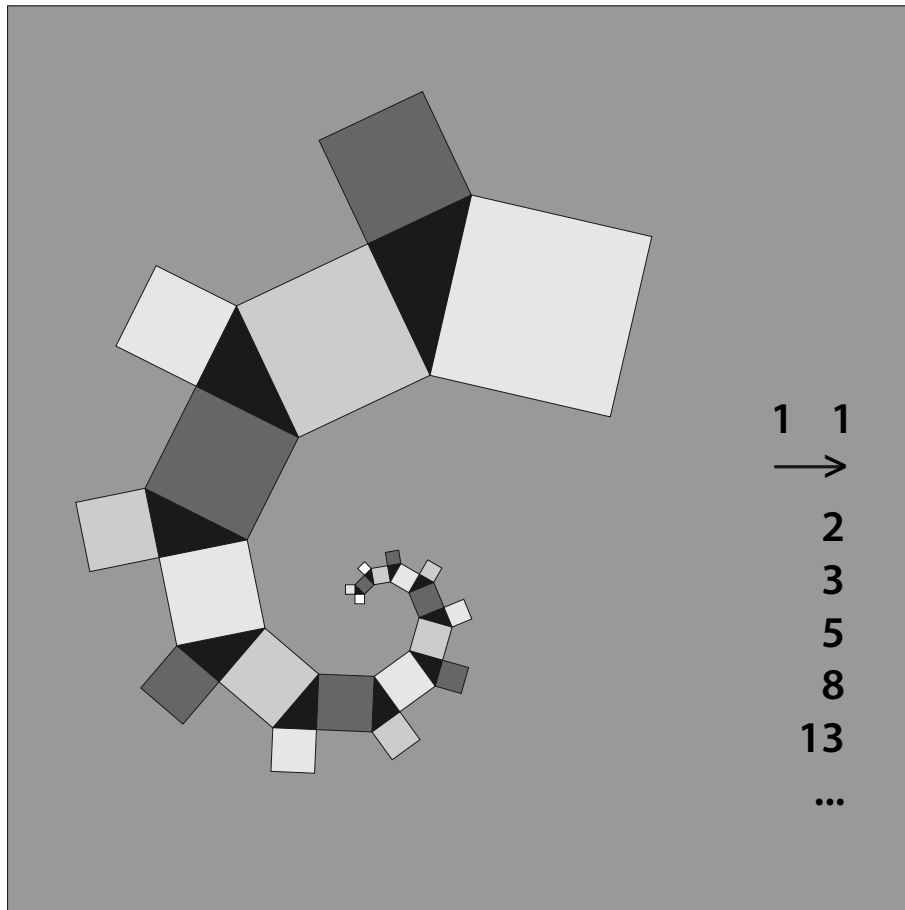




Bulletin

September 2013 – Septembre 2013

N° 123

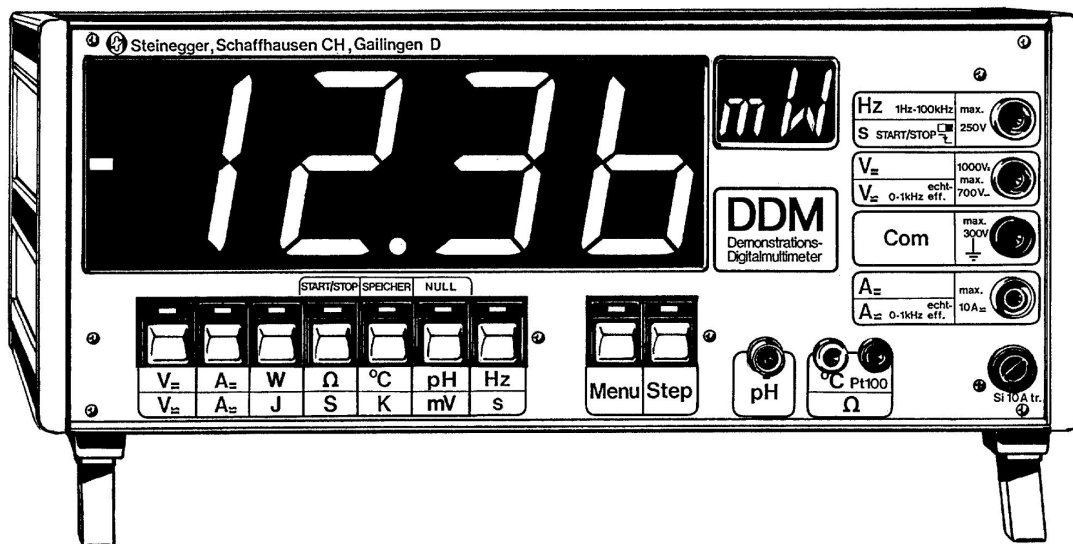


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalmultimeter DDM

Art. Nr. 26



- **Misst: Spannung, Strom, Wirkleistung, Energie, Widerstand, Temperatur, pH-Wert, Zeitintervall und Frequenz**
- **56mm hohe LED-Ziffern und 9999 Messpunkte**
- **Automatische und manuelle Bereichsumschaltung**
- **Mehr als 20 Zusatzgeräte direkt anschließbar**
- **Einfacher Datenaustausch mit PC/Mac im Multitasking über die bidirektionale Serieschnittstelle**
- **2 freiprogrammierbare Analog-Ausgänge**
- **Ausführliche 75-seitige Bedienungsanleitung**

Preis inkl MWSt. Fr 2'350.-

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Demonstrations-Digitalmultimeter DDM Art. Nr. 26" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
8200 Schaffhausen



Fax : 052-625 58 60
☎ : 052-625 58 90
Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Generalversammlung des VSMP - Assemblée générale de la SSPMP 3

Deutschschweizerische Mathematikkommission 4

Peter Gallin

Die Suche nach dem Zentrum der FIBONACCI-Spirale von Eugen Jost 4

Urs Stambach

Aha! Mathematik! – Teil V (Nicht nur Schüler und Schülerinnen, auch grosse Mathematiker können irren) 8



H.R. Schneebeli

S. Sternberg, Dynamical Systems 11

Beat Jaggi

Mittelwerte und Zahlenfolgen 12

Peter Gallin

Eine Aufgabe für den Trigonometrie-Unterricht 21

Ekaterina Gots

Thomas P. Wihler, Mathematik für Naturwissenschaften 22

Deutschschweizerische Physikkommission 24

DPK

Martin Lieberherr

Springende Feder 24

Kurse

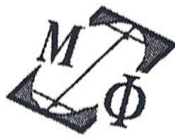
Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2013	28
Die schwere Geburt der Stochastik: Jacob Bernoullis Ars Conjectandi	29
Wallpaper stamps	30
How far is your daily weight from the normal one?	31
Higgs-Entdeckung	31
Impressum	34

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Fibonacci Meets Pythagoras, Computergraphik: Eugen Jost, Thun (cf. page 4).



SSPMP - VSMP - SSIMF
SOCIÉTÉ SUISSE DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE
VEREIN SCHWEIZERISCHER MATHEMATIK- UND PHYSIKLEHRKRÄFTE
SOCIETA DEGLI INSEGNANTI DI MATEMATICA E FISICA

Einladung zur GENERALVERSAMMLUNG des VSMP
Invitation à l'ASSEMBLÉE GÉNÉRALE de la SSPMP
Freitag, 22. November 2013 – *Vendredi 22 novembre 2013*
Gymnase de Beaulieu, Rue du Maupas 50, 1004 Lausanne

I. Rahmenprogramm – *programme cadre*

Individueller Besuch der Didacta im Palais de Beaulieu (www.didacta.lausanne.ch/de-CH.aspx)
– *Visite individuelle de l'exposition Didacta* (www.didacta-lausanne.ch/fr-CH.aspx)

II. Generalversammlung 2013 – *Assemblée générale 2013*

16:45 – 17:45 Uhr

Traktandenliste – *Ordre du jour*

Begrüssung – *Salutations*

1. Traktandenliste 2013, Protokoll 2012 – *Ordre du jour 2013, procès-verbal 2012*
2. Mutationen – *Mutations*
3. Jahresberichte – *Rapports annuels*
4. Jahresrechnungen 2012/13 – *Comptes annuels 2012/13*
5. Budget 2013/14 & Mitgliederbeitrag – *Budget 2013/14 & Cotisations*
6. Wahlen – *Élections*
7. Ergänzung der Statuten – *Complément des statuts*
8. Anträge von Mitgliedern – *Propositions des membres*
9. Varia – *Divers*

Das Protokoll der letzten GV und die Einladung zur diesjährigen GV (inklusive Traktandenliste) sind ab Ende Oktober 2013 auch auf unserer Website www.vsmpp.ch zu finden.
– *Le procès-verbal de la dernière AG et l'invitation à l'AG de cette année (ordre du jour inclus) se trouveront sur notre site internet www.sspmp.ch à partir de fin d'octobre 2013.*

III. Gemeinsames Abendessen – *Repas du soir en commun*

Im Anschluss an die GV werden wir in einem Lausanner Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekannt gegeben. – *Après l'AG nous irons manger ensemble dans un restaurant en ville de Lausanne.*

Wädenswil, Ende Juli 2013, Hj. Stocker, Präsident / *Président*

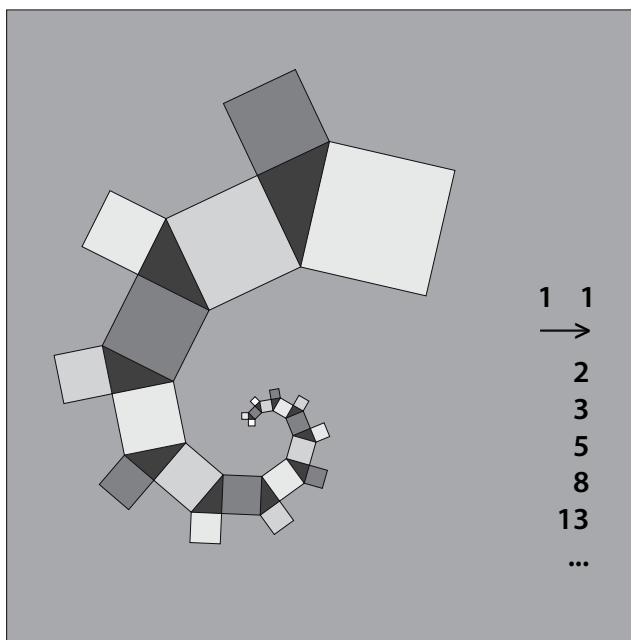
Weitere Auskünfte beim Sekretär – *Informations complémentaires auprès du secrétaire:*
F. Meier, Alpenquai 44, 6005 Luzern (Telefon: 041 / 210 25 58 oder 079 / 79 89 770; E-Mail: franz.e.meier@bluewin.ch).



Die Suche nach dem Zentrum der FIBONACCI-Spirale von Eugen Jost

Peter Gallin

Der Künstler und Primarlehrer Eugen Jost aus Thun hat ein Bild mit dem Titel „Fibonacci trifft Pythagoras“ geschaffen, auf dem eine Spirale aus rechtwinkligen Dreiecken und den Quadraten über ihren Seiten zu sehen ist. Durch die spezielle Färbung der Quadrate wird verdeutlicht, dass jeweils zwei Quadrate gleich gross sind. Dieses Bild diente auch als Leitmotiv für das EU-Projekt FIBONACCI, welches von 2010 bis 2013 im Bereich Mathematik von der Universität Bayreuth unter Prof. Peter Baptist wissenschaftlich begleitet worden ist.



Fibonacci Meets Pythagoras,
Computergraphik © Eugen Jost, Thun

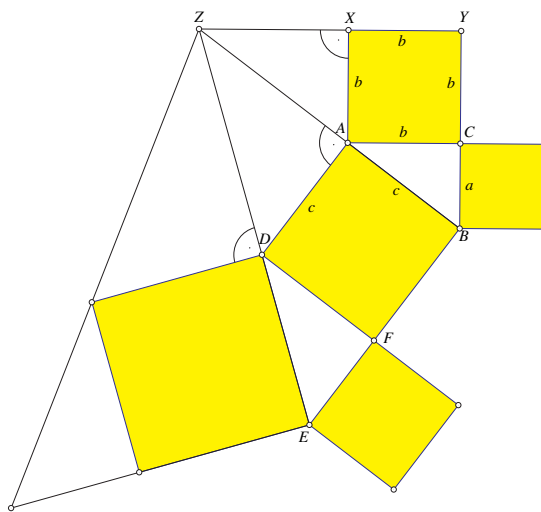
Die FIBONACCI-Spirale von Eugen Jost ist folgendermassen definiert: Man beginne mit einem ganz kleinen rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck mit Kathetenlängen 1 und zeichne die Quadrate über den Seiten. Das Hypotenusenquadrat dieses ersten Dreiecks hat die Fläche 2 und sei das grössere Kathetenquadrat eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks, während dessen kleineres Kathetenquadrat gleich dem Einheitsquadrat sei. Danach wird das neue Hypotenusenquadrat mit Fläche 3 des zweiten Dreiecks zum grösseren Kathetenquadrat eines dritten rechtwinkligen Dreiecks, wobei sein kleineres Kathetenquadrat gleich dem grösseren Kathetenquadrat des zweiten Dreiecks sei. Wenn man so weiter fährt, erhält man die FIBONACCI-Spirale. Die Flächeninhalte der Quadrate sind die FIBONACCI-Zahlen, da man ja wegen des Satzes von Pythagoras jeweils zwei Kathetenquadratflächen zusammenzählt, um die Hypotenusenquadratfläche zu erhalten:

Nummer n	1	2	3	4	5	6	...
FIBONACCI-Zahl f_n	1	1	2	3	5	8	...

Nun stellt sich die Frage, ob diese Spirale ein Zentrum besitzt, so wie man es von der logarithmischen Spirale her kennt. Als elementare Vorübung betrachten wir zuerst eine andere Spirale, die wir „Pythagoras-Spirale“ nennen, welche sehr einfache Eigenschaften hat und offensichtlich ein Zentrum besitzt.

Das Zentrum der Pythagoras-Spirale

Die Pythagoras-Spirale wird folgendermassen definiert: Man beginne mit einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck ABC . In der nachfolgenden Figur haben wir das Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5 gewählt. Man zeichne die beiden Kathetenquadrate und das Hypotenusenquadrat. Sodann wird das Hypotenusenquadrat als Kathetenquadrat eines neuen rechtwinkligen Dreiecks DEF aufgefasst, welches gleichsinnig ähnlich zum ersten Dreieck sein soll. Auch dieses Dreieck erhält sein zweites Katheten- und das Hypotenusenquadrat, welches als Kathetenquadrat eines dritten, gleichsinnig ähnlichen Dreiecks aufgefasst wird. Auf diese Weise kann man nun beliebig weiterfahren und immer neue rechtwinklige Dreiecke bilden, welche zusammen mit den Quadraten eine Spirale, die Pythagoras-Spirale, bilden. Nun wollen wir zeigen, dass sich die Geraden, welche wir durch die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke legen, alle in einem einzigen Punkt Z , dem Zentrum der Spirale, schneiden.



Zunächst schneiden wir die Hypotenuserade AB mit der Geraden durch die Ecken X und Y des grösseren Kathetenquadrats und erhalten so den Punkt Z . Sind a , b und c die Längen der Dreiecksseiten BC , CA und AB , so ergeben sich wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und ZAX die Längen $|ZX| = b \cdot \frac{b}{a}$ und $|ZA| = b \cdot \frac{c}{a}$. Damit gilt:

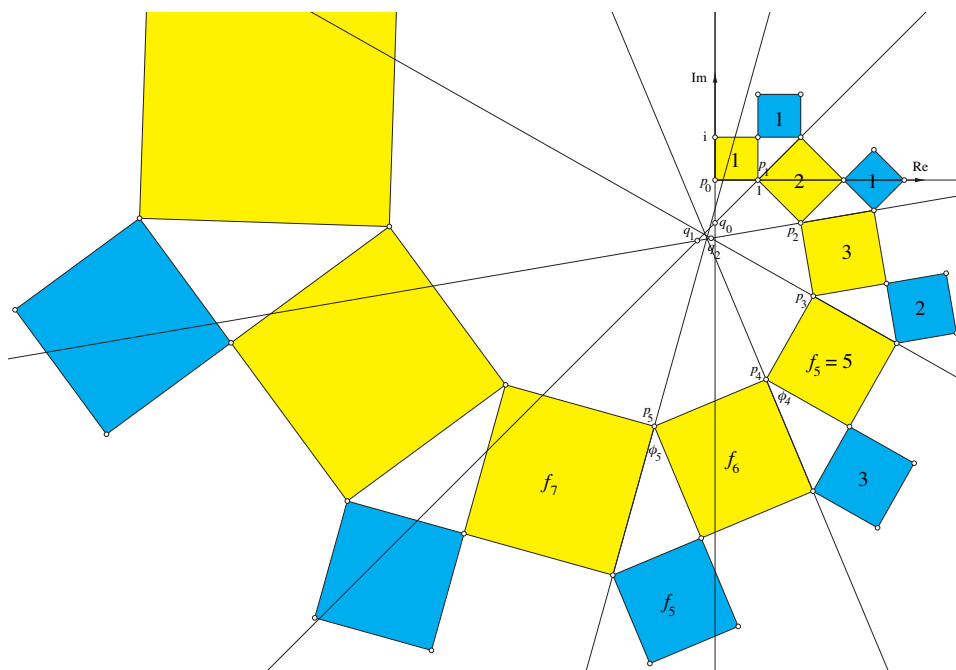
$$\tan(\angle AZX) = \frac{b}{|ZX|} = \frac{b}{b \cdot \frac{b}{a}} = \frac{a}{b} = \frac{c}{b \cdot \frac{c}{a}} = \frac{c}{|ZA|} = \tan(\angle DZA)$$

Da nach Voraussetzung auch $\tan(\angle EDF) = \frac{a}{b}$ gilt, liegen die Punkte Z , D und E in einer Geraden, was zu beweisen war. Der Punkt Z ist also immer Schnittpunkt aller Hypotenusenverlängerungen der rechtwinkligen Dreiecke. Z sichtet alle ihm nahe liegenden Quadratseiten XA , AD usw. unter dem gleichen Winkel $\arctan(\frac{a}{b})$. Damit liegen die Ecken X , A , D usw. dieser Quadrate auf einer logarithmischen Spirale mit Zentrum Z . Mit einer Streckung mit Zentrum Z und Faktor $\frac{a+b}{b}$ geht diese Spirale in eine andere logarithmische Spirale durch die Punkte Y , B , E usw. über, welche aber zur ersten Spirale kongruent ist, denn eine logarithmische Spirale geht durch zentrische Streckung immer in eine kongruente über.

Zurück zur FIBONACCI-Spirale

Nun wollen wir die gemachten Erfahrungen übertragen auf die ursprüngliche Fragestellung: Hat allenfalls auch die FIBONACCI-Spirale ein Zentrum?

Als Instrument der Suche nach dem Zentrum der FIBONACCI-Spirale werden wir mit komplexen Zahlen arbeiten. Dazu betten wir das Bild von Eugen Jost in die Gauss'sche Zahlenebene ein. Das eine der beiden Einheitsquadrate, mit denen Eugen Jost gestartet ist, definiert mit einer Ecke und zwei anliegenden Seiten ein rechtwinkliges Koordinatensystem wie in der folgenden Abbildung gezeigt. Dadurch sei die komplexe Zahlenebene mit der reellen und imaginären Achse festgelegt.



Die angeschriebenen Flächeninhalte der Quadrate sind gemäss unserer Konstruktionsvorschrift die FIBONACCI-Zahlen. Somit sind die Seitenlängen der Quadrate die Wurzeln von FIBONACCI-Zahlen. Da der Quotient von aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen gegen den goldenen Schnitt $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ konvergiert, werden alle rechtwinkligen Dreiecke immer ähnlicher, denn der kleinere spitze Winkel des n -ten Dreiecks beträgt

$$\phi_n = \arccos \sqrt{\frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}}$$

und konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen $\arccos \sqrt{\tau}$. Man überprüft, dass $\phi_1 = \pi/4$, was mit den 45° des ersten Dreiecks übereinstimmt, und stellt fest, dass $\phi_0 = 0$.

Wären die rechtwinkligen Dreiecke tatsächlich ähnlich, so würden sich die Hypotenusenverlängerungen immer in einem festen Punkt, dem Zentrum der Spirale, schneiden. Diese Tatsache haben wir in der obigen Vorübung untersucht. Also verfolgen wir jetzt auch die Schnittpunkte der Hypotenusenverlängerungen.

Wir berechnen also fortlaufend die Schnittpunkte der verlängerten Hypotenusen in der vorliegenden Figur. Sie werden in einem engen Bereich liegen und zu einem Grenzpunkt konvergieren, den wir das Zentrum der

FIBONACCI-Spirale nennen und den wir jetzt berechnen wollen. Zuerst berechnen wir die inneren Eckpunkte p_n der jeweils grösseren Kathetenquadrate. Es geht also um den Streckenzug $p_0p_1p_2 \dots$, den wir erhalten, wenn wir sukzessive die Summe von komplexen Zahlen bilden, welche den einzelnen orientierten Strecken entsprechen. Die Länge der Strecken ist bekannt, nämlich die Wurzeln aus FIBONACCI-Zahlen. Die Argumente der komplexen Zahlen erhält man durch Aufaddieren der spitzen Winkel unserer rechtwinkligen Dreiecke, denn jede Strecke des Streckenzugs wird im Vergleich zur vorangehenden mit einem solchen Winkel weitergedreht. Unter der Verwendung der Polardarstellung komplexer Zahlen mit der Eulerschen Formel $r \cdot e^{i\phi}$ ergibt sich:

$$p_n = \sum_{j=1}^n \sqrt{f_{j+1}} \cdot e^{-i \sum_{k=1}^n \phi_{k-1}}$$

Dabei kontrolliert man, dass $p_1 = 1$ und $p_2 = 2 - i$, was mit der Figur übereinstimmt.

Vom Punkt p_n aus — eine Ecke des n -ten Dreiecks mit den Katheten $\sqrt{f_n}$ und $\sqrt{f_{n+1}}$ und der Hypotenuse $\sqrt{f_{n+2}}$ — muss man nun senkrecht zur Richtung $p_n p_{n+1}$ eine gewisse Länge x Richtung Zentrum bis zum Punkt q_n , dem Schnittpunkt der Hypotenusenverlängerungen des n -ten und des $(n + 1)$ -ten Dreiecks, gehen. Die Strecke x , die Quadratseite $p_n p_{n+1}$ und die Hypotenusenverlängerung des $(n + 1)$ -ten Dreiecks bilden ein rechtwinkliges Dreieck, das ähnlich ist zum $(n + 1)$ -ten Dreieck. Damit erhält man die Ähnlichkeitsbeziehung

$$\sqrt{f_{n+1}} : \sqrt{f_{n+2}} = \sqrt{f_{n+2}} : x .$$

Also ist

$$x = \frac{f_{n+2}}{\sqrt{f_{n+1}}} .$$

Um den Endpunkt q_n der Strecke x zu berechnen, müssen wir also zu p_n noch das $-i$ -fache der mit $\frac{f_{n+2}}{\sqrt{f_{n+1}}}$ gestreckten komplexen Einheit in Richtung $p_n p_{n+1}$ addieren. Damit erhalten wir:

$$q_n = \sum_{j=1}^n \sqrt{f_{j+1}} \cdot e^{-i \sum_{k=1}^n \phi_{k-1}} - i \frac{f_{n+2}}{\sqrt{f_{n+1}}} \cdot e^{-i \sum_{k=1}^{n+1} \phi_{k-1}}$$

Mit Mathematica habe ich folgende numerische Resultate erhalten:

n	0	1	2	3	4
q_n	$-i$	$-0.41421 - 1.4142 i$	$-0.09077 - 1.3587 i$	$-0.21971 - 1.2858 i$	$-0.19119 - 1.3538 i$
n	5	6	10	20	
q_n	$-0.18165 - 1.3196 i$	$-0.1956 - 1.3299 i$	$-0.1895 - 1.3286 i$	$-0.1897611 - 1.328812 i$	
n	30	40			
q_n	$-0.18976130834 - 1.3288116315 i$	$-0.18976130846 - 1.3288116315 i$			

Die Punkte $q_0 = -i$ und $q_1 = (\sqrt{2} - 1) - i\sqrt{2}$ sind die einzigen, die direkt geometrisch kontrollierbar sind. „Offensichtlich“ (einen Beweis müsste man hier anschliessen) konvergieren die Punkte q_n gegen einen Grenzpunkt q . Damit ist immerhin gezeigt, dass ein Zentrum der FIBONACCI-Spirale nur im Limes existiert. Ob eine geschlossene Darstellung dieses Punktes gefunden werden kann, bleibt offen.

Aha! Mathematik! – Teil V.**Nicht nur Schüler und Schülerinnen,
auch grosse Mathematiker können irren.**

Urs Stammbach

Das hier beschriebene Beispiel¹ geht auf Hermann Amandus Schwarz zurück, siehe *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe*. Die kleine Arbeit ist abgedruckt in H.A. Schwarz: Gesammelte Abhandlungen, Band 2, S. 309-311. Es handelt sich dabei eigentlich um einen Brief, den Schwarz an Charles Hermite gerichtet hatte. Hermite reproduzierte den Brief wenig später in der zweiten Auflage seines eigenen Lehrbuches über Differential- und Integralrechnung.

In seinem berühmten und vielbenützten Buch *Cours de calcul différentiel et intégral* von 1868 hatte Joseph A. Serret für den Flächeninhalt eines gekrümmten Flächenstücks die folgende Definition gegeben (siehe Tome second p. 296):

Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C; nous nommerons aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite formée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal Γ ayant pour limite le contour C.

Man soll also das Flächenstück triangulieren, die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke bilden und in einem Grenzprozess die Triangulation immer feiner und feiner werden lassen. Dann definiere der Limes der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke den Flächeninhalt des Flächenstücks.

Zweifellos würden alle Laien und auch viele Mathematikstudierende diese Definition als richtig ansehen. Wie H.A. Schwarz aber an Hand eines Gegenbeispiels zeigte, ist diese Definition nicht gangbar; je nach Wahl der Triangulierungen kann sie nämlich für den Flächeninhalt eines Flächenstücks verschiedene Werte liefern. Schwarz wählt für sein Beispiel eine denkbar einfache gekrümmte Fläche, nämlich einen Kreiszyylinder! Da ein Kreiszyylinder in die Ebene abrollbar ist, lässt sich der Flächeninhalt auch elementar angeben. Aber hier soll das Verfahren von Serret verwendet werden.

Es seien x, y, z die kartesischen Koordinaten eines Punktes, u, v zwei Parameter, r, h zwei Konstanten und m, n, a ganze positive Zahlen. Man setze

$$x = r \cos u, y = r \sin u, z = v$$

mit $0 \leq u \leq 2\pi$ und $0 \leq v \leq h$. Damit wird ein Zylinder vom Flächeninhalt $2\pi rh$ beschrieben. Man beschreibe diesem Zylinder wie folgt ein Polyeder mit $4mn$ Dreiecken ein:

¹Mathematisch stellt dieser Text etwas grössere Anforderungen als die bisherigen. Er ist deshalb eher für Lehrer und Lehrerinnen geeignet als für die Schüler und Schülerinnen.

1. Die Ecken der Dreiecke sind gegeben durch, $\mu = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, n$

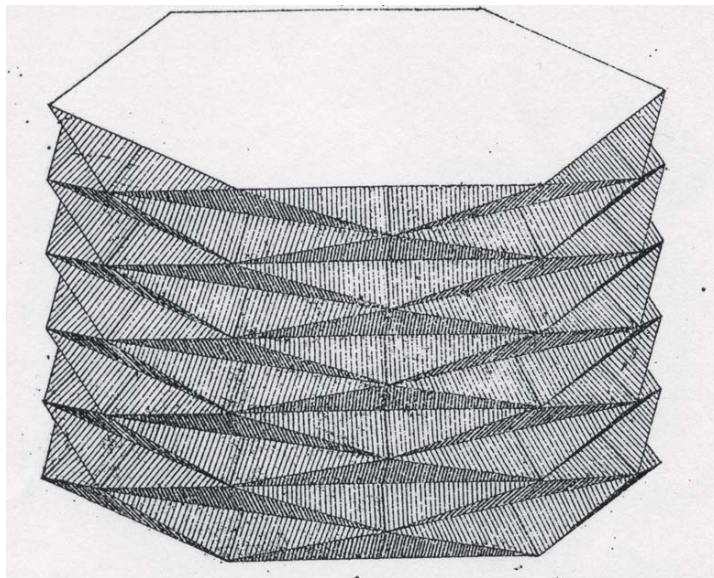
$$u = u' = \frac{2\mu\pi}{m}a, \quad v = v' = \frac{\nu h}{n}$$

und, $\mu = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

$$u = u'' = \frac{(2\mu + 1)\pi}{m}a, \quad v = v'' = \frac{(2\nu + 1)h}{2n}$$

2. Alle Dreiecke sind gleichschenkelig und unter sich kongruent.

3. Die Basislinien der Dreiecke liegen in den Ebenen $z = v'$ und $z = v''$.



Die Basis jedes Dreiecks hat die Länge

$$2r \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

und die Höhe hat die Länge

$$\sqrt{r^2 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]^2 + \left(\frac{h}{2n}\right)^2}.$$

Mit Hilfe der einfachen trigonometrischen Umformung $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2(\alpha/2)$ ergibt sich der Flächeninhalt S des eingeschriebenen Polyeders zu

$$S = (4mnr) \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sqrt{4r^2 \sin^4\left(\frac{\pi}{2m}\right) + \left(\frac{h}{2n}\right)^2}.$$

Daraus schliesst man:

1. Setzt man $n = am$, so hat man als Limes den Wert $S = 2r\pi h$.
2. Setzt man $n = am^2$, so hat man als Limes den Wert $S = 2r\pi\sqrt{a^2r^2\pi^2 + h^2}$. Je nach Wahl von a ist somit dieser Limes beliebig gross.
3. Setzt man $n = am^3$, so stellt man fest, dass das m -te Glied der Folge grösser ist als

$$8r^2m^4 \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right) .$$

Dieser Wert ist für genügend grosses m beliebig gross, so dass in diesem Fall der Limes gar nicht existiert.

Je nach Wahl der Triangulierungen nimmt also der in der Definition von Serret beschriebene Limes verschiedene Werte an. Dies bedeutet, dass der Flächeninhalt einer gekrümmten Oberfläche nicht auf die von Serret vorgeschlagene Art definiert werden kann.

Zu den hier genannten Mathematikern vergleiche man die folgenden Internetseiten:

http://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_Serret

http://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite

http://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Amandus_Schwarz

S. Sternberg: Dynamical Systems, 265 Seiten, 10.-. CHF, Dover Publications Inc, Mineola, New York, 2010, ISBN-13:978-0-486-47705-3.

Dieser Text zeichnet sich aus durch eine besondere Eleganz in der Darstellung eines wichtigen Themas auf knappem Raum und mit einem guten Kompromiss zwischen Breite und Tiefgang. Der Autor versteht es, die Leser gut zu führen und zu motivieren. Durchwegs werden Ideen vor Rechnungen oder formalen Argumenten betont und, wenn immer möglich, Gründe für ein Vorgehen genannt, bevor es angegangen wird. Damit bleiben die Leser gut orientiert. Oft reduziert Sternberg die Komplexität von Gedanken und Notationen durch vereinfachende Normierungen und Konventionen oder er behandelt jenen Sonderfall, von dem aus der Blick auf den allgemeinen Fall frei ist und der die wesentlichen Argumente in grosser Klarheit offenlegt.

Sternberg erhellt Hintergründe zu Themen, die seit einiger Zeit auch den Mathematikunterricht in Gymnasien beschäftigen: Die Iteration von Funktionen, Fixpunkte, Bifurkationen, Chaos, Fraktale, Populationsmodelle mit Leslie Matrizen, Markovketten, Google's PageRank, Differentialgleichungen, Jäger-Beute-Modelle, die didaktische Anwendung von mathematischer Software für Experimente und zur Illustration.

Das Buch bietet vieles mehr an, was weit über den Horizont der gymnasialen Bildung hinausreicht und das einem gründlichen Mathematikstudium vorbehalten sein wird. Einige Stichworte sind: Renormalisierung, Ergodentheorie, hyperbolische Fixpunkte, Hausdorff-Metrik, qualitative Betrachtungen zu Differentialgleichungen, der Satz von Poincaré-Bendixon, symbolische Dynamik, topologische Entropie.

Es gibt leider eine Kritik. Die Anzahl von Druckfehlern in diesem Text liegt jenseits der Schmerzgrenze. Manchmal treten die Fehler an einer Stelle gehäuft auf. Oft ist zu vermuten, dass cut-and-paste-Operationen beim Überarbeiten einer früheren Version unsorgfältig ausgeführt wurden. Die Folgen sind verstümmelte Sätze, fehlende Worte, eingeschränkte Verständlichkeit. Ist dies der wahre Preis für den sensationell tiefen Preis der Publikation?

Die positiven Aspekte überwiegen deutlich. Nachzutragen sind die klare Gestaltung und die guten Illustrationen, sowie die Anwendung von MATLABTM für Experimente und Illustrationen.

Unter http://www.math.harvard.edu/~shlomo/docs/dynamical_systems.pdf finden Sie ein Skript zur Vorlesung *Dynamical Systems* von Sternberg aus dem Jahre 2000. Es wurde offenbar 2009 zum vorliegenden Text überarbeitet. Allerdings enthält der ältere Text weniger Abbildungen, aber auch nicht die bereits bemängelten Verstümmelungen.

H.R. Schneebeli, Wettingen

Mittelwerte und Zahlenfolgen

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch

1 Einleitung

Das Bilden von Mittelwerten ist ein zentrales Konzept in der Mathematik: Lagemasse in der Statistik (Mittelwert, Median, Modus); Mitten, Mittellinien oder Schwerpunkte in geometrischen Figuren; Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Mittelwertsatz der Integralrechnung, etc. Klassische Mittelwerte wie das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel tauchen bereits in der Antike auf.

Zwischen Mittelwerten und Zahlenfolgen besteht ein enger Zusammenhang: So ist bei einer arithmetischen Zahlenfolge jedes Folgeglied (mit Ausnahme des ersten) das arithmetische Mittel seiner Nachbarglieder. Analoges gilt für geometrische und harmonische Zahlenfolgen.

2 Mittelwerte

2.1 Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Für n positive reelle Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n ist:

$$\mathcal{A}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{das arithmetische Mittel;}$$

$$\mathcal{G}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{das geometrische Mittel;}$$

$$\mathcal{H}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \quad \text{das harmonische Mittel.}$$

Beim Spezialfall $n = 2$ wird

$$\mathcal{A}(a, b) = \frac{a+b}{2}; \quad \mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab}; \quad \mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

Bemerkungen:

1. Das arithmetische Mittel ist für beliebige reelle Zahlen definiert, das harmonische Mittel für Zahlen ungleich Null. Beim geometrischen Mittel darf das Produkt $\prod_{i=1}^n a_i$ für gerades n nicht negativ sein. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden ausschliesslich auf positive reelle Zahlen.
2. Das harmonische Mittel hängt mit dem arithmetischen Mittel zusammen:

$$\frac{1}{\mathcal{H}(a, b)} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \mathcal{A}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$$

Der Kehrwert des harmonischen Mittels zweier Zahlen a und b ist gleich dem arithmetischen Mittel der Kehrwerte von a und b .

Behauptung: Es gilt:

$$\mathcal{H}(a, b) \leq \mathcal{G}(a, b) \leq \mathcal{A}(a, b) \text{ mit Gleichheit genau dann, wenn } a = b$$

Beweis: Die beiden Ungleichungen ergeben sich aus elementaren Rechnungen.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (a - b)^2 \\ 0 &\leq a^2 - 2ab + b^2 \\ 4ab &\leq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Daraus folgt einerseits } ab \leq \frac{(a + b)^2}{4} = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \implies \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

$$\text{andererseits } \frac{4ab}{(a + b)^2} \leq 1 \implies \frac{4a^2b^2}{(a + b)^2} \leq ab \implies \left(\frac{2ab}{a + b}\right)^2 \leq ab \implies \frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab}$$

Für $a = b$ wird $\mathcal{A}(a, b) = \mathcal{G}(a, b) = \mathcal{H}(a, b) = a = b$.

Die obigen Rechnungen zeigen umgekehrt, dass aus $\mathcal{A}(a, b) = \mathcal{G}(a, b)$ resp. $\mathcal{G}(a, b) = \mathcal{H}(a, b)$ jeweils $0 = (a - b)^2$ und daher $a = b$ folgt. \square

Für n Zahlen beweist man die Ungleichungen

$\mathcal{H}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathcal{G}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \mathcal{A}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ mit vollständiger Induktion (siehe z.B. [1]).

2.2 Interpretationen des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels von n Zahlen

Die drei Mittelwerte können auf verschiedene Arten gedeutet werden:

$$\text{Arithmetisches Mittel: } \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ Summanden}} = a_1 + a_2 + \dots + a_n \iff m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{Geometrisches Mittel: } \underbrace{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n \text{ Faktoren}} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \iff m = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

$$\text{Harmonisches Mittel: } \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \iff m = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots}$$

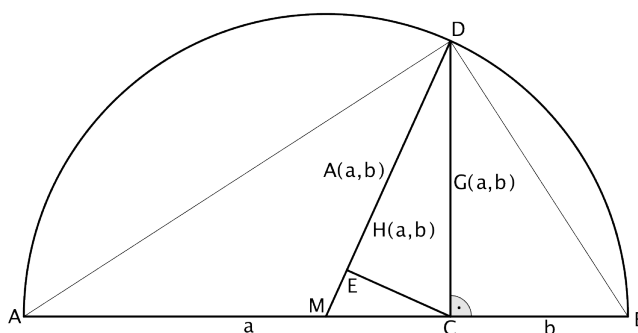
Bemerkung: Beim geometrischen Mittel liefert das Bilden von Kehrwerten nichts Neues:

$$\underbrace{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m} \cdot \dots \cdot \frac{1}{m}}_{n \text{ Faktoren}} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n} \implies m = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Geometrische Interpretationen des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels von zwei Zahlen

Sind zwei Zahlen a und b positiv, dann können sie als Längen von Strecken interpretiert werden, und damit dann auch die Mittelwerte $\mathcal{A}(a, b) = \frac{a+b}{2}$, $\mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab}$ und $\mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$.

1. Art: Über der Strecke AB der Länge $a + b$ wird ein Halbkreis mit Mittelpunkt M gezeichnet. Der Punkt C auf \overline{AB} ist so gewählt, dass $AC = a$ und $CB = b$ gilt. Durch C wird die Senkrechte zu \overline{AB} errichtet; diese schneidet den Halbkreis im Punkt D . Von C aus wird die Senkrechte \overline{CE} zu \overline{MD} errichtet.



$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } \overline{MD} &= \mathcal{A}(a, b) = \frac{a+b}{2} \\ \overline{CD} &= \mathcal{G}(a, b) = \sqrt{ab} \\ \overline{DE} &= \mathcal{H}(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \end{aligned}$$

Beweis:

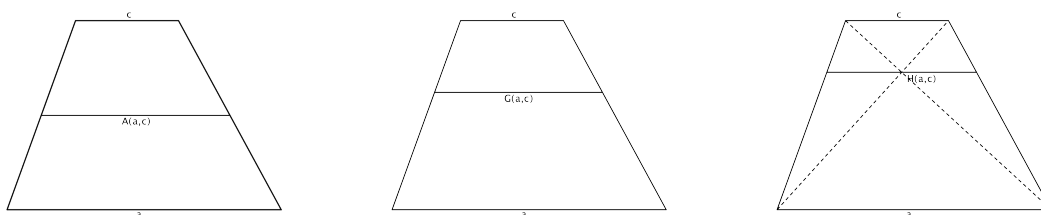
Arithmetisches Mittel: $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MD} = \frac{a+b}{2}$ (= Radius der Halbkreises).

Geometrisches Mittel: Das ist der Höhensatz: Die Dreiecke ACD und DCB sind ähnlich, also gilt $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CB}$ und somit $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB}$, resp. $\overline{CD}^2 = ab$ oder $\overline{CD} = \sqrt{ab}$.

Harmonisches Mittel: Die Dreiecke MCD und CED sind ähnlich, also gilt

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MD}} \text{ resp. } \overline{DE} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{MD}} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}. \quad \square$$

2. Art: Die drei oben beschriebenen Mittelwerte können auch in einem Trapez dargestellt werden. Dazu wird das Trapez mit einer Strecke parallel zu den beiden parallelen Seiten des Trapezes in zwei Teiltrapeze geteilt.



Behauptung: Wird das Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die beiden Teiltrapeze gleich hoch sind, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem arithmetischen Mittel von a und c .

Beweis: Das ist eine wohlbekannte Tatsache für die Mittelparallele eines Trapezes.

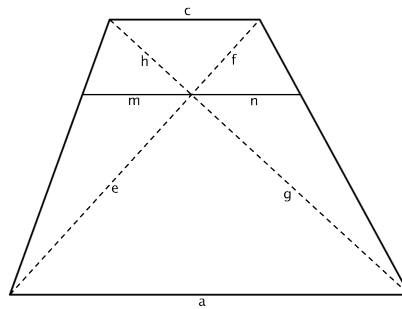
Behauptung: Wird das Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die beiden Teiltrapeze ähnlich sind, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem geometrischen Mittel von a und c .

Beweis: Sind die beiden Trapeze ähnlich, dann muss $\frac{a}{\mathcal{G}(a,c)} = \frac{\mathcal{G}(a,c)}{c}$ gelten, also

$$\mathcal{G}(a, c) = \sqrt{ac}$$

Behauptung: Wird das Trapez mit den parallelen Seiten a und c so geteilt, dass die "Mittellinie" durch den Diagonalschnittpunkt geht, dann ist die Länge der "Trennlinie" gleich dem harmonischen Mittel von a und c .

Beweis: Mit den nachfolgenden Bezeichnungen und den Strahlensätzen gilt:



$$\frac{c}{m} = \frac{e+f}{e} = 1 + \frac{f}{e} = 1 + \frac{c}{a} \quad \text{und} \quad \frac{c}{n} = \frac{g+h}{g} = 1 + \frac{h}{g} = 1 + \frac{c}{a}$$

Also ist $\frac{c}{m} = \frac{c}{n}$ und folglich $m = n$.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{c}{m} = 1 + \frac{c}{a} = \frac{a+c}{a} \implies ac = m(a+c) \implies m = \frac{ac}{a+c}$$

Die gesuchte Länge hängt also nur von a und c ab und beträgt

$$m + n = \frac{2ac}{a+c} = \mathcal{H}(a, c) \quad \square$$

Bemerkung: Das arithmetische Mittel ist unter anderem wichtig in der Statistik (Mittelwert), das geometrische zum Beispiel beim Höhensatz. Auch das harmonische Mittel taucht in erstaunlich vielen Kontexten auf (siehe [3]).

3 Zahlenfolgen

Wie in der Einleitung erwähnt, besteht zwischen den oben beschriebenen Mittelwerten und gewissen Zahlenfolgen ein naheliegender Zusammenhang.

3.1 Definition von Zahlenfolgen durch Mittelwerte

Definition: Eine Zahlenfolge a_1, a_2, a_3, \dots heisst

$$\begin{aligned} \text{arithmetisch, wenn} \quad & a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ gilt für } n \geq 2 \\ \text{geometrisch, wenn} \quad & a_n = \sqrt{a_{n-1}a_{n+1}} \text{ gilt für } n \geq 2 \\ \text{harmonisch, wenn} \quad & a_n = \frac{2a_{n-1}a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}} \text{ gilt für } n \geq 2 \end{aligned}$$

Bei einer arithmetischen, geometrischen resp. harmonischen Folge ist also jedes Folglied (mit Ausnahme des ersten) das arithmetische, geometrische resp. harmonische Mittel seiner Nachbarglieder.

Auflösen der obigen Formeln nach a_{n+1} liefert zuerst rekursive Beschreibungen dieser Folgen. Daraus lassen sich schliesslich auch explizite Beschreibungen ableiten.

Folge	rekursive Beschreibung	explizite Beschreibung
arithmetisch	$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$	$a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) = (n-1)a_2 - (n-2)a_1$
geometrisch	$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$	$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{n-1} = \frac{a_2^{n-1}}{a_1^{n-2}}$
harmonisch	$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}a_n}{2a_{n-1} - a_n}$	$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)} = \frac{a_1a_2}{(n-1)a_1 - (n-2)a_2}$

a_1 und a_2 sind jeweils vorzugeben.

Bemerkungen:

- Setzen wir bei der arithmetischen Folge $a_2 - a_1 = d$ und bei der geometrischen Folge $\frac{a_2}{a_1} = q$, so erhalten wir die wohlbekanntesten expliziten Beschreibungen $a_n = a_1 + (n-1)d$ resp. $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
- Zur expliziten Beschreibung der harmonischen Zahlenfolge: Für $n = 1$ und für $n = 2$ liefert die angegebene Formel $a_n = \frac{a_1a_2}{(n-1)a_1 - (n-2)a_2}$ gerade a_1 resp. a_2 .
Eine ziemlich aufwändige Rechnung zeigt ferner, dass $a_n = \frac{a_1a_2}{(n-1)a_1 - (n-2)a_2}$ gleich dem harmonischen Mittel von $a_{n-1} = \frac{a_1a_2}{(n-2)a_1 - (n-3)a_2}$ und $a_{n+1} = \frac{a_1a_2}{na_1 - (n-1)a_2}$ ist.
- Bei einer harmonischen Zahlenfolge sind a_1 und a_2 so vorzugeben, dass der Nenner des Bruches $\frac{a_1a_2}{(n-1)a_1 - (n-2)a_2}$ nicht gleich Null wird:

$$\begin{aligned} (n-1)a_1 - (n-2)a_2 &\neq 0 \\ 2a_2 - a_1 &\neq n(a_2 - a_1) \\ \frac{2a_2 - a_1}{a_2 - a_1} &\neq n \end{aligned}$$

Die Anfangsglieder a_1 und a_2 sind also so vorzugeben, dass der Bruch $\frac{2a_2-a_1}{a_2-a_1}$ keine natürliche Zahl ist.

4. Die Verwandtschaft von arithmetischem und harmonischem Mittel überträgt sich auch auf die Zahlenfolgen:

Eine Zahlenfolge a_1, a_2, a_3, \dots mit $a_i \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots$ ist genau dann harmonisch, wenn die Folge der Kehrwerte $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$ arithmetisch ist.

Beweis:

$$a_n = \frac{1}{\frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)} \iff \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right)$$

Rechts steht die explizite Beschreibung einer arithmetischen Folge mit den Anfangsgliedern $\frac{1}{a_1}$ und $\frac{1}{a_2}$. □

3.2 Beispiele harmonischer Folgen

Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen werden in vielen Schulbüchern ausführlich behandelt; harmonische eher selten. Deshalb betrachten wir drei Beispiele.

Beispiel 1: Das berühmteste Beispiel einer harmonischen Folge ist $a_n = \frac{1}{n}$, also $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

In der allgemeinen Formel der expliziten Darstellung einer harmonischen Folge setzen wir $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{1}{2}$ und bekommen

$$a_n = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{(n-1) \cdot 1 - (n-2) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2(n-1) - (n-2)} = \frac{1}{2n-2-n+2} = \frac{1}{n}$$

Das harmonische Mittel von $\frac{1}{n-1}$ und $\frac{1}{n+1}$ ist tatsächlich

$$\frac{2 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}} = \frac{2}{n-1+n+1} = \frac{1}{n}$$

Beispiel 2: Perspektivisches Sehen



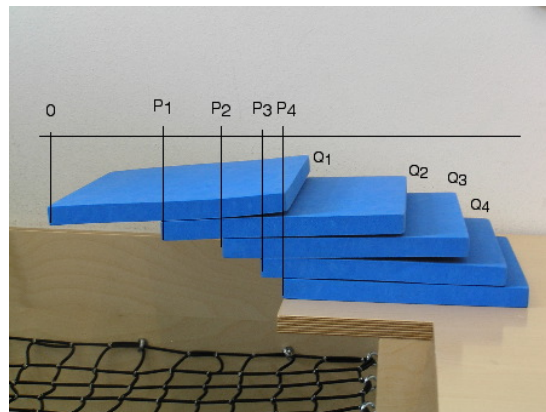
Behauptung: Die Längen der Bäume resp. der Holzschwellen bei den Geleisen bilden bei perspektivischer Abbildung eine harmonische Folge.

Begründung: Betrachte drei aufeinander folgende Bäume und das von ihnen aufgespannte Trapez.



Die Länge jeden Baumes (mit Ausnahme des ersten) ist gleich dem harmonischen Mittel der Längen der Nachbarbäume (siehe am Ende von Abschnitt 2.2).

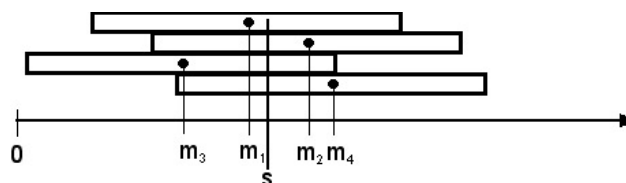
Beispiel 3: Die "Brücke"



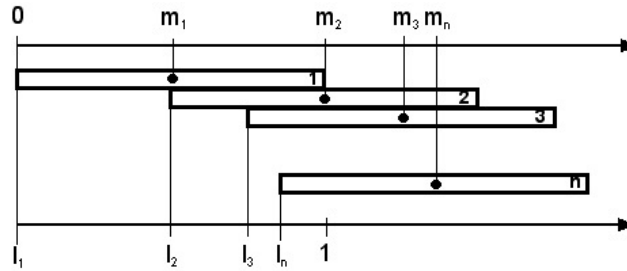
Die (kongruenten) Quader $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots, Q_n$ sind so angeordnet, dass sie gerade nicht herunterfallen.

Behauptung: Die Strecken $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$ bilden eine harmonische Zahlenfolge. (Wir nehmen an, dass theoretisch unendlich viele Quader aufgestapelt sind.)

Begründung: Zuerst etwas Physik: Sind homogene Quader zu einem Stapel aufgeschichtet, dann ist die x -Koordinate des Schwerpunktes des Stapels gleich dem arithmetischen Mittel der x -Koordinaten der Schwerpunkte (=Mittelpunkte) m_1, m_2, \dots, m_n der einzelnen Quader.



Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Länge der Quader gleich 1 ist.



Die Quader seien aufgestapelt wie in der obigen Zeichnung: l_i ist der linke Rand, m_i der Schwerpunkt des i -ten Quaders. Folglich ist $l_i = m_i + \frac{1}{2}$. Wir wählen den Zahlenstrahl so, dass $l_1 = 0$ und damit $m_1 = \frac{1}{2}$ ist.

Damit der Stapel nicht herunterfällt, muss sich der linke Rand des $(i + 1)$ -ten Quaders beim Schwerpunkt des Stapels der ersten i Quader befinden, also ist

$$l_{i+1} = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_i}{i} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_i}{i} + \frac{1}{2}$$

(Da $l_i = m_i + \frac{1}{2}$ für jeden einzelnen Quader gilt, gilt die entsprechende Gleichung auch für den ganzen Stapel.)

Behauptung: Es ist $l_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2(i-1)}$ mit $i = 2, 3, 4, \dots$

Begründung: Mit vollständiger Induktion: Für $i = 2$ stimmt die Behauptung: $l_2 = \frac{l_1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Die Behauptung stimme für $1, 2, 3, \dots, i$. Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_i}{i} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{i} \left[0 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2(i-1)}\right) \right] + \\ &= \frac{1}{i} \left[(i-1)\frac{1}{2} + (i-2)\frac{1}{4} + \dots + (i-(i-1))\frac{1}{2(i-1)} \right] + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{i} \left[\frac{i}{2} + \frac{i}{4} + \dots + \frac{i}{2(i-1)} - \frac{1}{2} - \frac{2}{4} - \dots - \frac{i-1}{2(i-1)} \right] + \frac{1}{2} \\ &= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2(i-1)} \right] - \frac{1}{i} \cdot \frac{i-1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2(i-1)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2i} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2(i-1)} + \frac{1}{2i} = l_{i+1} \quad \square \end{aligned}$$

Die Strecken $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$ (siehe Bild auf Seite 7) bilden tatsächlich eine harmonische Zahlenfolge, nämlich $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$

4 Verallgemeinerter Mittelwert und verallgemeinerte Zahlenfolge

Die oben beschriebenen Mittelwerte lassen sich zu einem allgemeinen Mittelwert zusammenfassen. (siehe z.B. [1])

Definition: Für zwei positive reelle Zahlen a und b und eine reelle Zahl r definieren wir

$$m_r = \left(\frac{a^r + b^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass m_1 das arithmetische und m_{-1} das harmonische Mittel von a und b ist.

Der Fall $r = 0$ ist besonders interessant: Mit der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital kann man zeigen, dass m_0 das geometrische Mittel ist! (Siehe [2] oder [4]).

Gleich wie im Abschnitt 3.1 können wir mit dem allgemeinen Mittelwert Zahlenfolgen definieren. Jedes Folgeglied soll gleich dem verallgemeinerten Mittelwert seiner Nachbarglieder sein:

$$a_n = \left(\frac{a_{n-1}^r + a_{n+1}^r}{2} \right)^{\frac{1}{r}}$$

a_n hängt jetzt von r ab, aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir aber auf eine Anpassung der Notation.

Auflösen der Gleichung nach a_{n+1} liefert die rekursive Beschreibung $a_{n+1} = (2a_n^r - a_{n-1}^r)^{\frac{1}{r}}$. Daraus lässt sich ebenfalls eine explizite Darstellung gewinnen:

$$a_n = [(n-1)a_2^r - (n-2)a_1^r]^{\frac{1}{r}} = [2a_1^r - a_2^r + n(a_2^r - a_1^r)]^{\frac{1}{r}}$$

Ausgehend von zwei Anfangsgliedern a_1 und a_2 liefert diese Formel im Prinzip für jede reelle Zahl eine Zahlenfolge: Für $r = 1$ eine arithmetische, für $r = -1$ eine harmonische und für $r = 0$ eine geometrische. Diese Folge(n) und eine daraus abgeleitete "ziemlich" allgemeine Funktion ist in [2] genauer beschrieben.

Der Autor dieses Artikels führt in seinem Mathematikunterricht am Gymnasium Zahlenfolgen wie oben beschrieben ein und thematisiert vor allem harmonische Zahlenfolgen und das harmonische Mittel.

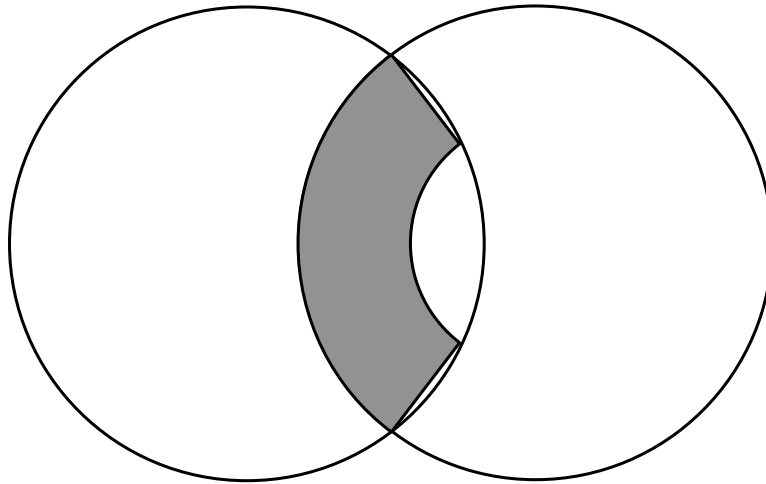
Literatur

- [1] Hardy G., J.E. Littlewood J.E., Polyá G., *Inequalities*, Second edition, Cambridge Mathematical Library, 1952
- [2] Jaggi Beat, *Über eine ziemlich allgemeine Zahlenfolge und eine ziemlich allgemeine Funktion*, Bulletin der Schweizerischen Mathematik- und Physiklehrkräfte, Juni 2012
- [3] Jaggi Beat, *Plädoyer für das harmonische Mittel*, Bulletin der Schweizerischen Mathematik- und Physiklehrkräfte, Januar 2013
- [4] Von Mangold und Knopp, *Höhere Mathematik 1*, Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft Stuttgart, 1990

Eine Aufgabe für den Trigonometrie-Unterricht

Peter Gallin

Aus dem Problem, die Schnittmenge zweier gleich grosser Kreise in einem wenig luxuriösen Graphikprogramm zu färben, ist folgende gut lösbare Aufgabe für den Trigonometrie-Unterricht entstanden: Gegeben sind zwei Einheitskreise, die sich schneiden und deren Zentren den Abstand x aufweisen. Sie seien z. B. in Word oder in Powerpoint gezeichnet. Nun möchte man die Schnittmenge färben lassen, verfügt aber kein Werkzeug, mit welchem man diese Punktmenge zu einer einzigen färbaren Figur zusammenfügen kann. Die wohl einfachste Möglichkeit für diese Färbung besteht darin, dass man färbare Kreisring-Sektoren mit variablem Zentriwinkel und variabler Ringdicke verwendet, welche das Programm zur Verfügung stellt. Legt man nun einen ersten solchen Ringsektor geeignet in die Schnittmenge (siehe Abbildung) und spiegelt ihn dann am Symmetriezentrum der beiden Kreise, so kann man die beiden Ringsektoren in der gleichen Farbe und ohne Rande färben, so dass die Schnittmenge eine sauber berandete Färbung erhält, bei der die Ringsektoren nicht mehr einzeln zu sehen sind.



Nun stellt sich folgende Frage: In welchem Bereich kann x variieren, so dass die Färbung der gesamten Schnittmenge der beiden Kreise mittels genau zweier Ringsektoren möglich ist?

Thomas P. Wihler, Mathematik für Naturwissenschaften: Einführung in die Analysis.
Haupt Verlag, 2012, UTB-Band-Nr.: 3635, ISBN 978-3-8252-3635-9

Der Name des Buches spricht für sich selbst. Das Buch wendet sich tatsächlich zunächst an Studierende der Natur- und Ingenieurwissenschaften und ist aus einer einsemestrigen Mathematikvorlesung an der Universität Bern entstanden. Aber auch GymnasiallehrerInnen werden das Buch sicher nützlich finden. Einerseits weil es eine Vielzahl von interessanten und praktischen Übungsaufgaben enthält, die sich teilweise auch für den gymnasialen Analysisunterricht eignen und der Text gut strukturiert und didaktisch ist. Andererseits vermittelt es einen guten Einblick in die von den aktuellen mathematischen Grundvorlesungen in Analysis an der Hochschule gestellten Ansprüche.

Das Werk besteht aus sieben Kapiteln, die alle wichtigen Grundthemen der Analysis umfassen. Jedes Kapitel enthält einen Theorieteil und eine Reihe von Übungsaufgaben am Schluss (leider ohne Lösungen). Auf allgemeine Beweise und Herleitungen wird verzichtet, und die Theorie wird zumeist anhand von Beispielen entwickelt und erläutert. Im allgemeinen wird grosser Wert auf die Anwendung gelegt. Theorie wird auch aus dieser Sicht betrachtet und mathematischen Techniken wird vor abstrakten Beweisen der Vorzug gegeben. Zum Beispiel wird das Integrieren zuerst geometrisch und numerisch behandelt und erst dann werden die Integrationsregeln kurz besprochen.

Die Numerik zieht sich durch das ganze Buch, wohl nicht zuletzt deswegen, weil der Autor an der Universität Bern als Leiter der Arbeitsgruppe „Angewandte und Numerische Mathematik“ tätig ist. Fast alle Kapitel befassen sich mit numerischen Methoden und der Einbindung von Rechnerprogrammen (Softwarepaket Octave). Die numerische Behandlung der mathematischen Probleme steht in diesem Werk eindeutig im Vordergrund.

Besonderes Augenmerk verdienen die Kapitel über Differentialgleichungen. Die Differentialgleichungen sind im Buch sehr gut eingeführt und präsentiert. Der Schwerpunkt liegt auch hier nicht auf allgemeiner Theorie, die man auch in anderen Büchern finden kann, sondern auf angewandten Beispielen und Naturphänomenen, welche mittels Differentialgleichungen modelliert werden. Der Text liefert interessante Beispiele, die sich auch in den Mathematikunterricht im Gymnasium übertragen lassen. So könnte zum Beispiel das Kapitel 5 „Differentialgleichungen: Modellieren“, als Ausgangspunkt für das Thema „Einführung in Differentialgleichungen“ dienen, oder die angeführten Beispiele könnten als Anwendungen der Differential- und Integralrechnung behandelt werden.

Laut Vorwort soll das Buch „einen kleinen Einblick gewähren, wie Mathematik als Werkzeug in den Naturwissenschaften bedeutend zum Einsatz kommen kann“. Diesem Anspruch wird es gerecht und darüber hinaus ist das Werk reich an interessanten Anregungen für den Analysisunterricht im Gymnasium und wird von der Rezensentin auch deswegen gerne zur Lektüre weiterempfohlen.

Ekaterina Gots
MNG Rämibühl, Zürich

Annual Congress 2013 of the Swiss Academy of Sciences
Winterthur, November 21-22, 2013

The Quantum Atom at 100 – Niels Bohr's Legacy

The Annual Congress 2013 of SCNAT is dedicated to commemorate Bohr's strike of genius 100 years ago and to pay tribute to its impact on parts of the development of physics and its applications that followed from it. Nobel Laureate Serge Haroche and other distinguished speakers will cover a selection of different topics. A public evening lecture, given in German, will address some particular characteristics of quantum mechanics.

For more information and registration: www.congress13.scnat.ch

sc | nat 

Swiss Academy of Sciences
Akademie der Naturwissenschaften
Accademia di scienze naturali
Académie des sciences naturelles



Springende Feder

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Der Wettbewerb SYPT [1] ist bei unseren Schülerinnen und Schülern sehr beliebt. Sie müssen offene Aufgaben experimentell untersuchen und ihre Resultate verteidigen. Einmal wurde ich wegen folgender Aufgabe um Hilfe gebeten, worauf ich leichtfertig einen vermeintlichen Tipp gab.

“16. Hoops

An elastic hoop is pressed against a hard surface and then suddenly released. The hoop can jump high in the air. Investigate how the height of the jump depends on the relevant parameters.” [2]

Ich sagte, der Reifen sei doch eine Art Feder, die gespannt und losgelassen wird. Sie sollen doch schnell mal das Analogon einer Hookeschen (linearen) Schraubenfeder durchrechnen und schauen, welcher Anteil der Federenergie in Translationsenergie umgesetzt wird. Für eine erste Abschätzung könne man ja die Schwerkraft weglassen.

1. Modell

Eine masselose Feder mit Federkonstante D verbinde zwei gleiche Körper mit Masse m (entsprechend den zwei Hälften des Reifens, siehe Abbildung 1). Die Feder werde um y komprimiert und losgelassen. Dann stösst sie sich von der Oberfläche ab.

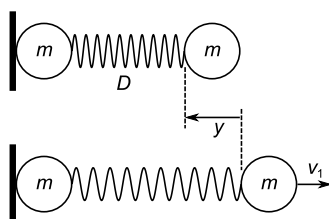


Abbildung 1: Wenn sich die um y komprimierte Feder streckt, verleiht sie dem freien Körper die Geschwindigkeit v_1 . Wenn sich die Feder entspannt hat, löst sich der anliegende Körper von der Oberfläche, denn ab diesem Moment zieht die Feder an ihm.

Die zwei durch die Feder verbundenen Körper werden sich von der Oberfläche lösen, wenn sich die ganze Spannungsenergie E_F der Feder in kinetische Energie E_{k1} des freien Körpers umgewandelt hat. Dann hat die Geschwindigkeit v_1 ihr Maximum erreicht. Wegen des Schwerpunktsatzes (Impulserhaltung) bewegt sich danach der gemeinsame Schwerpunkt mit $v_2 = v_1/2$; das freie System hat die Translationsenergie E_{k2} des Schwerpunkts, der Rest ist Vibrationsenergie.

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}Dy^2 = E_F \quad \text{Energiesatz} \quad (1)$$

$$mv_1 = 2m \cdot v_2 \quad \text{Impussatz / Schwerpunktsatz} \quad (2)$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot (v_1/2)^2 = \frac{1}{2}E_{k1} = \frac{1}{2}E_F \quad (3)$$

In diesem Modell wird nur die Hälfte der Spannungsenergie in Translationsenergie verwandelt (und später in Lageenergie, wenn man die Schwerkraft wieder berücksichtigt und die Sprunghöhe viel grösser als y ist).

2. Modell

Die Feder wird als elastischer Stab der Länge l , Querschnittsfläche A , Dichte $\rho = m/(Al)$ und Elastizitätsmodul E modelliert, siehe Abbildung 2. Die Bewegung ist eine Überlagerung elastischer Wellen und kann mit der Elastizitätstheorie berechnet werden. [3]

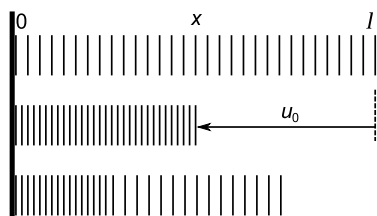


Abbildung 2: Der entspannte Stab (oben) habe Länge l . Er werde um u_0 komprimiert (Mitte). Die Kompression verteilt sich gleichmässig über den Stab. Lässt man ihn los, so entspannt er sich vom freien gegen das anliegende Ende (unten).

Wird der komprimierte Stab losgelassen, so ist die folgende Bewegung eine longitudinale Welle $u(x, t)$, die als Überlagerung harmonischer Wellen dargestellt werden kann. Die Welle muss die Randbedingungen $u(x, t) = 0$ bei $x = 0$ (anliegendes Ende, links) und $\partial u/\partial x = 0$ bei $x = l$ (freies Ende, rechts) und $t > 0$ erfüllen. Zur Zeit $t = 0$ muss die Welle folgende Form haben: $u(x, 0) = -x \cdot u_0/l$, d.h. jedes Element des Stabes ist nach links versetzt und die Versetzung u ist proportional zur Koordinate x . Die Welle $u(x, t)$ kann damit in folgender Weise als Fourierreihe dargestellt werden:

$$u(x, t) = -\frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin((2n-1)kx) \cdot \cos((2n-1)\omega t) \quad (4)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2l} \quad \text{Kreiswellenzahl der Grundwelle mit Wellenlänge } \lambda = 4l \quad (5)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = ck \quad \text{Kreisfrequenz der Grundschwingung mit Periode } T \quad (6)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{Geschwindigkeit longitudinaler Schallwellen im Stab} \quad (7)$$

Wie bei der gedackten Orgelpfeife kommen nur die ungeraden Harmonischen der Grundfrequenz vor.

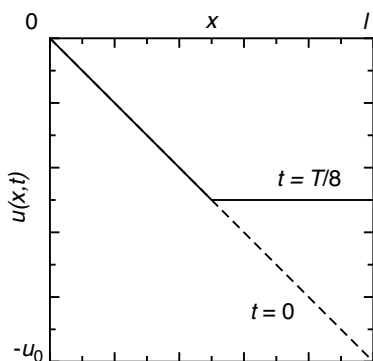


Abbildung 3: Zu Beginn ($t = 0$) ist die Auslenkung $u(x, t)$ proportional zur Position x . Zu späteren Zeitpunkten ($0 < t < T/4$) ist der Stab auf der rechten Seite ($x \rightarrow l$) entspannt und auf der linken Seite ($x \rightarrow 0$) so komprimiert wie am Anfang. Die Stelle, wo die Entspannung stattfindet, wandert mit konstanter Geschwindigkeit von rechts nach links durch den Stab. Die zwei Graphen $u(x, 0)$ und $u(x, T/8)$ entsprechen den unteren zwei Darstellungen in Abbildung 2. Wenn der Stab links befestigt wäre, würde er eine elastische Schwingung mit Periodendauer T ausführen.

Die Welle für $u(x, 0)$ entspricht dem ersten Viertel der Fourierreihe einer Dreieckschwingung. Stellt man die Welle (4) zu einigen Zeitpunkten dar, so ergibt sich ein überraschendes Bild (Abb. 3). Die Welle ist von gleicher Art wie die Bewegung einer in der Mitte gezupften Saite! (Abbildung 4)

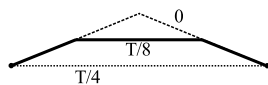


Abbildung 4: Die longitudinale Welle, welche die Entspannung eines komprimierten Stabes beschreibt, ist von ähnlicher Art wie die Bewegung einer in der Mitte gezupften, idealen Saite.

Nach der Zeit $t = \pi/(2\omega) = T/4$ ist der Stab vollkommen entspannt und alle seine Teile bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit v von der Wand weg

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\omega t = \pi/2}^{kx = \pi/2} = \frac{8u_0\omega}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{8u_0\omega}{\pi^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = \frac{8u_0\omega}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{4} \quad (8)$$

$$= \frac{2u_0\omega}{\pi} = \frac{2u_0}{\pi} \cdot kc = \frac{2u_0}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{\pi}{2l} = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9)$$

Durch Vergleich mit dem Federgesetz $F = Dy$ und dem Gesetz für die elastische Dehnung/Kompression eines Stabes $F = EAu_0/l$ folgt $D = EA/l$. Die Geschwindigkeit v , mit der sich der Stab von der Oberfläche löst, ist somit

$$v = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{EIA}{m}} = \frac{u_0}{l} \sqrt{\frac{Dl^2}{m}} = u_0 \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (10)$$

Die kinetische Energie der Feder beim Abstoß ist also

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \left(u_0 \sqrt{\frac{D}{m}}\right)^2 = \frac{1}{2}Du_0^2 \quad (11)$$

Dies bedeutet, dass die *gesamte* Federenergie in kinetische Energie umgesetzt wird. (Was auch zu erwarten ist, wenn man gesehen hat, wie die Bewegung abläuft.)

Wie ist es nun beim IYPT-Problem? In [4] wird gezeigt, dass etwa 57 % der Spannungsenergie des Reifens in Translationsenergie des Schwerpunkts verwandelt wird. Das einfachere, 1. Modell liegt also näher an der Wirklichkeit als das 2. Modell.

Experiment

Abbildung 3 war für mich eine Überraschung, die erst nach einigem Nachdenken plausibel wurde. Die Bewegung wollte ich natürlich sofort mit eigenen Augen sehen. In der Sammlung fand ich eine geeignete Schraubenfeder: Länge 50 cm, Masse 28 g, Federkonstante 20 N/m. Die Windungen der entspannten Feder berührten sich nicht, d.h. die Feder könnte bei geeigneter Führung komprimiert werden. Die Feder wurde auf einer Seite befestigt. Das freie Ende dehnte ich mit der Hand horizontal um ca. 50 cm und liess los. Die Bewegung wurde mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommen und der Film anschliessend mit LoggerPro analysiert. Man kann tatsächlich auf der Feder zwei Bereiche erkennen: auf der Seite der Hand entspannt sich die Feder, auf der Seite der Befestigung bleibt sie gespannt, ähnlich wie in Abb. 2 gezeichnet. Die Grenze zwischen den zwei Bereichen wandert. Sowohl diese Grenze als auch das freie Ende bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, siehe Abbildung 5. Leider ist der Film zu kontrastarm um hier ein Standbild wiederzugeben. Stimmt

die gemessene Geschwindigkeit des freien Endes mit Gleichung (10) überein?

$$v = u_0 \sqrt{\frac{D}{m}} \approx 0.50 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{0.028 \text{ g}}} = 13 \text{ m/s} \quad (12)$$

Die Theorie liefert einen Wert, der zwischen den beiden Messwerten liegt ($v_1 \approx 12.5 \text{ m/s}$ und $v_3 \approx 14.9 \text{ m/s}$ in Abb. 5). Die Theorie stimmt also im Rahmen dieses einfachen Experiments. Ausserdem wandert, wie zu erwarten, die Grenze ungefähr mit doppelter Geschwindigkeit wie das freie Ende.

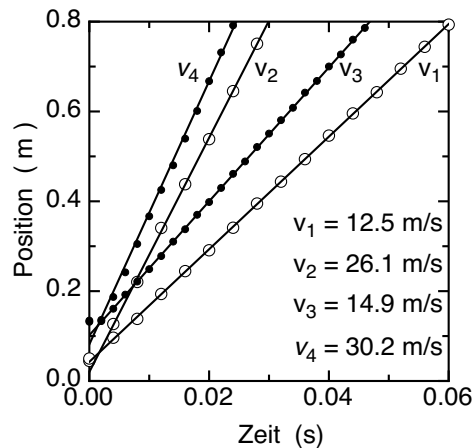


Abbildung 5: Wird eine gespannte Feder losgelassen, so bewegt sich das freie Ende mit konstanter Geschwindigkeit (v_1, v_3) und ebenso die Stelle, wo sich die Feder entspannt (v_2, v_4). Im Diagramm sind die Daten aus einem Film mit 250 Bildern pro Minute (offene Kreise) und aus einem Film mit 500 Bildern pro Sekunde (schwarze Punkte) dargestellt. Das freie Ende der Feder bewegt sich etwa mit halber Geschwindigkeit wie die Grenze zwischen entspanntem/gespanntem Federabschnitt ($v_1 \approx v_2/2, v_3 \approx v_4/2$).

Literatur

- [1] Swiss Young Physicists' Tournament, siehe <http://www.sypt.ch>
- [2] International Young Physicists' Tournament, siehe <http://www.iypt.org>, Problems 2013
- [3] 'Hütte – Des Ingenieurs Taschenbuch', Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1955
- [4] E. Yang, H.-Y. Kim, 'Jumping hoops', Am. J. Phys. 80, 19-23 (2012)

18. Juli 2013, M. Lieberherr



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2013

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem **Apéro im HG G 69** (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 24. Oktober 2013

An diesem Tag fällt das Kolloquium aufgrund des gleichzeitig stattfindenden Kongresses Science-Cuisine (23. - 26. Oktober in Sitten) aus. Weitere Informationen finden Sie auf der Seite de.VSMP www.vsmtp.ch

Donnerstag, 7. November 2013

Martin Mattmüller, Bernoulli-Euler-Zentrum der Universität Basel

Die schwere Geburt der Stochastik: Jacob Bernoullis Ars Conjectandi (Basel 1713)

Vor 300 Jahren erschien in Basel eines jener raren Bücher, die die Weltsicht einer ganzen Wissenschaft verändern können: In seiner "Kunst des Mutmassens" (Ars Conjectandi) entwickelte Jacob Bernoulli (1654–1705) aus verstreuten Tipps und Tricks für Glücksspieler eine systematische Theorie der Untersuchung, Berechnung und Bewertung von Wahrscheinlichkeiten.

Bernoulli hat darin einen der zentralen Sätze auf diesem Gebiet formuliert und bewiesen – das "Gesetz der grossen Zahl" – und dem ganzen Fachgebiet Stochastik den Namen gegeben. Der Kolloquiumsvortrag will die schwierige Entstehungs- und Publikationsgeschichte dieses epochemachenden Werks nachzeichnen.

Donnerstag, 21. November 2013

Dr. Ana Cannas da Silva, ETH Zürich, Department Mathematik

Wallpaper stamps



Shell 1 and shell 2

We can have exactly 17 different wallpapers in terms of types of symmetry patterns and no more. This was established at the end of the 19th century by the Russian mathematician and mineralogist Fyodorov.

Much more recently Murray Macbeath, Bill Thurston and John H. Conway discovered and publicised a new geometric perspective, together with a felicitous notation,

which is more inviting and informative than the classical crystallographic perspective.

The modern perspective relies on the notion of (2-dim) orbifold - a kind of surface with singular points - and a corresponding Euler characteristic. We will discuss how these surfaces can be seen as exotic stamps for printing patterns.

Donnerstag, 5. Dezember 2013

Prof. Dr. Gregor Dolinar, Faculty of Electrical Engineering, University of Ljubljana, Slovenia

How far is your daily weight from the normal one?

If we want to know how far we need to walk to the best coffee bar in town, or if the number that we are dictating is recognized by our mobile phone, or if the distribution of our daily weight is the normal one, then we can find the answers to these questions with a help of various kinds of distances.

In our talk we will first recall the definition of the general concept of a distance, that is the concept of a metric space. Then examples of different distances, such as Manhattan distance, L^2 distance, Kolmogorov-Smirnov distance, and there applications in voice and image recognition, statistics, etc. will be presented.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2013

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im **Hörsaal HG G 3** des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem **Apéro im HG G 69** (D-MATH
Common Room).

Donnerstag, 7. November 2013

Martin Mattmüller, Bernoulli-Euler-Zentrum der Universität Basel

Die schwere Geburt der Stochastik: Jacob Bernoullis *Ars Conjectandi*

Abstract:

Vor 300 Jahren erschien in Basel eines jener raren Bücher, die die Weltsicht einer ganzen Wissenschaft verändern können: In seiner "Kunst des Mutmassens" (*Ars Conjectandi*) entwickelte Jacob Bernoulli (1654–1705) aus verstreuten Tipps und Tricks für Glücksspieler eine systematische Theorie der Untersuchung, Berechnung und Bewertung von Wahrscheinlichkeiten.

Bernoulli hat darin einen der zentralen Sätze auf diesem Gebiet formuliert und bewiesen – das "Gesetz der grossen Zahl" – und dem ganzen Fachgebiet Stochastik den Namen gegeben. Der Kolloquiumsvortrag will die schwierige Entstehungs- und Publikationsgeschichte dieses epochemachenden Werks nachzeichnen.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2013

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im **Hörsaal HG G 3** des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem **Apéro im HG G 69** (D-MATH
Common Room).

Donnerstag, 21. November 2013

**Dr. Ana Cannas da Silva, ETH Zürich, Department Mathematik,
Switzerland**

Wallpaper stamps

We can have exactly 17 different wallpapers in terms of types of symmetry patterns and no more. This was established at the end of the 19th century by the Russian mathematician and mineralogist Yevgraf Fyodorov.

Much more recently Murray Macbeath, Bill Thurston and John H. Conway discovered and publicised a new geometric perspective, together with a felicitous notation, which is more inviting and informative than the classical crystallographic perspective.

The modern perspective relies on the notion of (2-dimensional) orbifold - a kind of surface with singular points - and a corresponding Euler characteristic. We will discuss how these surfaces can be seen as exotic stamps for printing patterns.



shell 1 and shell 2

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2013

Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
im **Hörsaal HG G 3** des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem **Apéro im HG G 69** (D-MATH
Common Room).

Donnerstag, 5. Dezember 2013

**Prof. Dr. Gregor Dolinar, Faculty of Electrical Engineering, University of
Ljubljana, Slovenia**

How far is your daily weight from the normal one?

Abstract:

If we want to know how far we need to walk to the best coffee bar in town, or if the number that we are dictating is recognized by our mobile phone, or if the distribution of our daily weight is the normal one, then we can find the answers to these questions with a help of various kinds of distances.

In our talk we will first recall the definition of the general concept of a distance, that is the concept of a metric space. Then examples of different distances, such as Manhattan distance, L^2 distance, Kolmogorov-Smirnov distance, and there applications in voice and image recognition, statistics, etc. will be presented.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, M. Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>



Sehr geehrte Leserinnen und Leser

In diesem Jahr wird aus aktuellem Anlass der „Higgs-Entdeckung“ eine Lehrerfortbildung in moderner Physik mit Thema Teilchenphysik angeboten, die in Zusammenarbeit mit teilchenphysik.ch und dem Forschungszentrum CERN veranstaltet wird. Eine erste Veranstaltung mit eintägiger Fortbildung, sowie eintägigem CERN Besuch, fand bereits im Frühjahr 2013 statt. Ein Bericht über die ausnehmend positive Aufnahme ist in den „SPG Mitteilungen“ Nr. 40 auf Seite 58 publiziert (siehe hierzu <http://www.sps.ch/uploads/media/Mitteilungen.40.pdf>).

Auf Grund des großen Interesses wird nun am 8.-9. November 2013 noch eine zweite Lehrerfortbildungsveranstaltung auf Deutsch zu diesem Thema angeboten, welche allen Schweizer Lehrern offen steht.

Gerne nehmen wir Ihre Anmeldung unter <http://indico.cern.ch/event/swissteachers> entgegen.

Die Fortbildung wird von der SPG und dem CERN gesponsert und ist daher kostenfrei. Wir würden uns freuen, Sie bei der Fortbildung und dem CERN Besuch kennenzulernen.

Mit besten Grüßen

A. Schopper, SPG-Präsident
H. P. Beck, Teilchenphysik.ch

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: aktiv/actif/attivo passiv/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout – *Mise en page*

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Inserateverwaltung – *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

Ganzseitige Fr. 500.–
Halbseitige Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–
über 20 g Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :

VSG – SSPES – SSISS

Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)

3000 Bern

Tel. 056 443 14 54 / Fax 056 443 06 04

E-Mail: information@vsg-sspes.ch

Abonnenten, die nicht Mitglieder des VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch

Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770

6005 Luzern

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Präsident VSMP – SSPMP – SSIMF

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutscheschweizerische Mathematikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz

Deutscheschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
3005 Bern

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Gordana Gerber gordana.gerber@bluewin.ch
Route du Bisse 8 Tél. 027 207 12 00
1992 Les Mayens-de-Sion

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 124	30.11.2013 (20.01.2014)
Nr. 125	31.03.2014 (20.05.2014)
Nr. 126	31.07.2014 (20.09.2014)

Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>