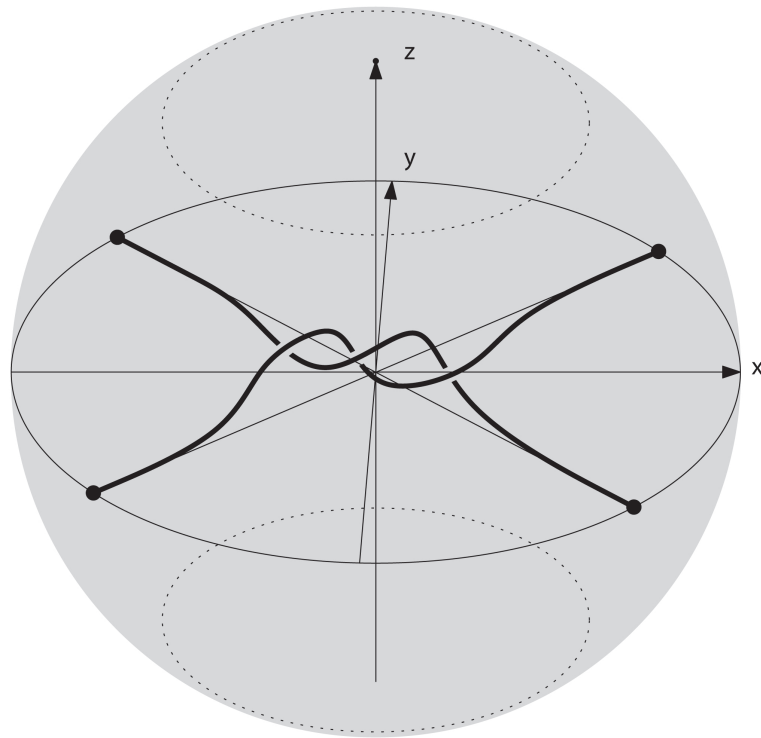




Bulletin

September 2012 – Septembre 2012

N° 120

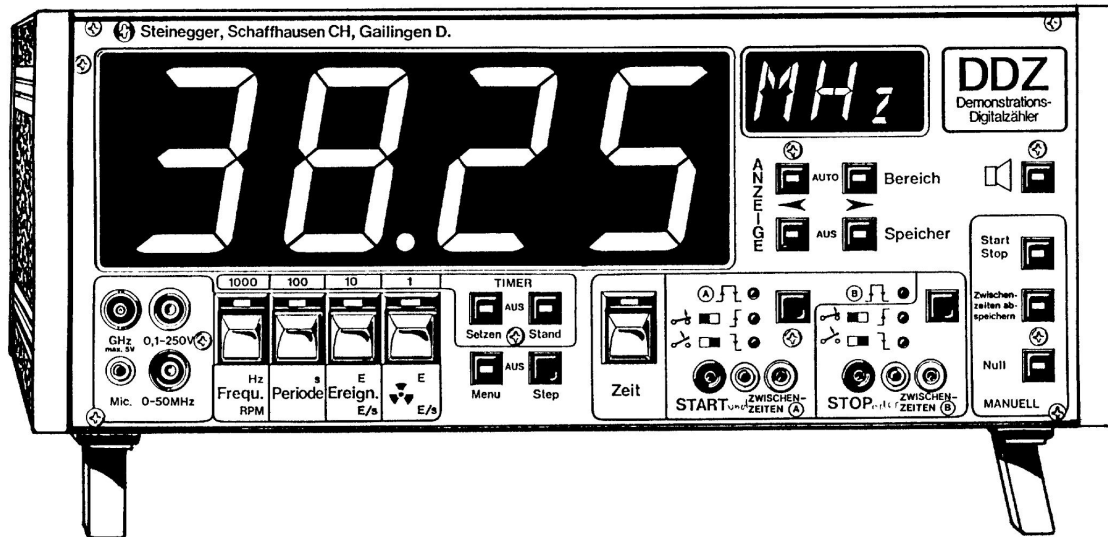


VSMP – SSPMP – SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

Demonstrations-Digitalzähler DDZ

Art. Nr. 51



Preis inkl. MWSt nur SFr 2'330.-

Kompakt-Multifunktionszähler der Spitzenklasse!

- 56 mm hohe helle Ziffern- und 3-stellige Einheitenanzeige
- Breitestes Anwendungsspektrum und selbsterklärende Bedienung
- Misst Zeitintervalle, Frequenzen, Perioden, RPM usw.
- Timerfunktion, Ereigniszählung, Zählrohranschluss, akustische Rückmeldung, 50 Messwertspeicher, bidirektionale serielle Schnittstelle, Hilfsspeisungen für Zusatzgeräte
- Auflösung von bis zu 10 Ziffern durch Ziffernschiebung
- Automatische und manuelle Bereichsumschaltung, vollautomatische Signalanpassung dank Triggerautomatik
- Hervorragendes Preis-/Leistungsverhältnis

Die kostenlose Kurzbeschreibung "Der neue Demonstrations-Digitalzähler DDZ" erhalten Sie direkt vom Hersteller:

Steinegger & Co.
Rosenbergstrasse 23
CH-8200 Schaffhausen



☎ : 052-625 58 90
Fax : 052-625 58 60
Internet: www.steinegger.de

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Generalversammlung des VSMP - Assemblée générale de la SSPMP 3

Eduard Kaeser

Von der Quantenphysik zur Quantenreligion 4

Commission Romande de Mathématiques 6

Didier Müller

Une application des graphes : les échelles de mots 6



Marie-Pierre Falissard

Théorie des ensembles appliquée au sudoku et algorithmique associée 10

Jean Piquerez

A propos du volume d'un segment sphérique 14

Jean-Claude Pont

La balade de la médiane et le théorème de Pythagoron 16

Deutschschweizerische Mathematikkommission 18

Armin P. Barth

Das MINT-Lernzentrum an der ETH Zürich 18

Tobias Christ

Rationale Gewirre 23

Kristine Barro-Bergflödt

Facettenreiche Mathematik 29



Peter Gallin

Ein Einblick ins EU-Projekt FIBONACCI 30

H. R. Schneebeli

Stedall Jacqueline: "The History of Mathematics, A Very Short Introduction" 34

Hansjürg Stocker

Dreiländerwettbewerb "DATCH – Das Känguru" 36

Urs Stambach

Aha! Mathematik! – Teil II 39

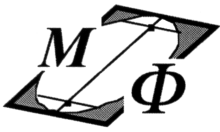
	Deutschscheizerische Physikkommission	41
DPK	<i>Werner Volken</i> Der Mond der sich von uns entfernt	41
	<i>Dr Benedikt Vogel</i> Das Higgs-Teilchen zum Anfassen	46
	<i>Martin Lieberherr</i> Auf die schiefe Bahn geraten	47
	<hr/>	
Kurse	31. Basler Kolloquium für Mathematiklehrpersonen	51
	Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2012	53
	3. Tagung Ausserschulische Lernorte der PHZ Luzern	55
	Impressum	57

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>

Page de titre

Wie ein Gewirr im Raum liegt (cf. page 23).



Einladung zur GENERALVERSAMMLUNG des VSMP
Invitation à l'ASSEMBLÉE GÉNÉRALE de la SSPMP

Freitag, 23. November 2012 – *Vendredi, 23 novembre 2012*

Luzern, Wasserturm, 16.30 Uhr

I. Rahmenprogramm

16:20 Uhr Besammlung beim Eingang der Kappellbrücke und Besichtigung der Rüst-
kammer mit Wissenswertem zur Turmgeschichte. - Daran anschließend:
Rendez-vous à l'entrée du "Kapellbrücke" et visite de l'armurerie. - Et puis:

II. Generalversammlung 2012 – Assemblée générale 2012

Traktandenliste - *Ordre du jour*

Begrüssung – *Salutations*

1. Traktandenliste 2012, Protokoll 2011 – *Ordre du jour 2012, procès verbal 2011*
2. Mutationen – *Mutations*
3. Jahresberichte – *Rapports annuels*
4. Jahresrechnungen 2011/12 – *Comptes annuels 2011/12*
5. Mitgliederbeitrag – *Cotisations*
6. Budget 2012/13 – *Budget 2012/13*
7. Anträge von Mitgliedern – *Propositions ou motions des membres*
8. Varia – *Divers*

Das Protokoll der letzten GV und die Einladung zur diesjährigen GV sind auch auf unserer Homepage www.vsmpp.ch zu finden. – *Le procès verbal de la dernière AG et l'invitation à l'AG de cette année se trouvent sur notre site internet www.sspmp.ch.*

III. Gemeinsames Abendessen – *Repas du soir en commun*

Im Anschluss an die GV werden wir in einem nahegelegenen Restaurant ein gemeinsames Nachtessen einnehmen. Der Ort wird an der GV bekannt gegeben.
Après l'AG nous irons manger ensemble dans un restaurant près du lycée.

Wädenswil, Ende Juli 2012, Hj. Stocker, Vizepräsident / *Viceprésident*

| Weitere Auskünfte beim Sekretär - *plus d'informations auprès du secrétaire:*

F. Meier, Alpenquai 44, 6005 Luzern; 041 / 210 25 58 oder 079 / 79 89 770; franz.e.meier@bluewin.ch .

Von der Quantenphysik zur Quantenreligion

Wie mit einer mysteriösen Theorie alles Mysteriöse erklärt wird. Von Eduard Kaeser

Seit einiger Zeit erstreckt sich der Erklärungsanspruch der Quantentheorie über die naturwissenschaftlichen Grenzen hinaus: Sie nimmt den menschlichen Geist ins Visier. Versuch einer Zeitdiagnose.

Die Quantentheorie – weiss man mittlerweile – ist paradox: Einerseits ist sie das bisher erfolgreichste Instrument zur Erklärung der Natur; andererseits ist sie unverständlich, wenn man sie aus der Sicht des gesunden Menschenverstands interpretieren möchte. In dieser Notlage riet der Physiker David Mermin seinen Kollegen: «Mund halten und rechnen!»

Es lockt das Bewusstsein

Diesen Rat schlagen die Physiker in den Wind. Sie rechnen zwar fleissig, halten den Mund aber immer weniger zu Fragen, mit denen sich traditionell eher die Philosophen abmühen. Zum Beispiel hat es ihnen das Bewusstsein angetan. Das zeigte sich kürzlich an der Tagung «Das Grosse, das Kleine und der menschliche Geist» im Verkehrshaus Luzern, organisiert von der Neuen Galerie Luzern. Anlässlich der 9. Schweizer Biennale zu Technik, Wissenschaft und Ästhetik diskutierten Physiker, Neurowissenschaftler und Molekularbiologen über die Frage nach der «mysteriösen Brücke» zwischen Quantenwelt und unserer klassischen Alltagswelt.

Spezialgast war der Mathematiker und Physiker Sir Roger Penrose von der Oxford University. Penrose sorgt seit zwanzig Jahren innerhalb und ausserhalb der Fachkreise für Aufsehen mit seinen Ideen über die Entstehung von Bewusstsein aus quantenphysikalischen Prozessen. Er setzt damit eine Tradition fort, die mit den Spekulationen der Pioniere der Quantenphysik in den 1930er Jahren anhob.

Anders als die Physiker damals kann sich Penrose heute auf eine entwickelte Neurophysiologie stützen, speziell auf Studien des amerikanischen Arztes Stuart Hameroff über sogenannte Mikrotubuli. Das sind winzige Proteinröhrchen, die in allen Zellkernen vorkommen und als molekulare Computer fungieren. Das Entscheidende: Sie weisen die typische Grössenordnung für Quan-

teneffekte wie Kohärenz auf. Kohärenz bedeutet, dass Quantenobjekte – Elektronen, Photonen, Atome oder eben auch Mikrotubuli – auf eine Weise zusammenhängen, für die die klassische Physik keine Beschreibung hat.

Effekte, die aus einem solchen Zusammenhang – der «Verschränkung» – resultieren, sind zum Teil höchst sonderbar. Hier eine Analogie zur Veranschaulichung: Spielte man im Basler St.-Jakob-Stadion und im Aztekenstadion in Mexiko-Stadt zeitgleich mit zwei identischen, quantenverschränkten Fussbällen, dann würde die Beobachtung eines Baslers, dass der Ball einen Linksdrall hat, augenblicklich den entsprechenden Drall des Zwillingballs in Mexiko-Stadt festlegen. Ein aus klassischer Sicht völlig unverständliches, ein – wie Einstein es nannte – spukhaftes Phänomen.

Diesen «Spuk» weisen die Physiker seit den 1980er Jahren experimentell nach – bei Mikroobjekten, die man möglichst störungsfrei von ihrer Umgebung isoliert. Normalerweise vermischt dieser verschränkte Quantenzustand bei Makroobjekten wie Fussbällen innert kürzester Zeit infolge Wechselwirkung mit der Umgebung – er «kollabiert» und ist nicht nachweisbar. In ihren Fundamenten tickt die Welt zwar quantenmechanisch, aber dieses Ticken vernehmen wir im Bereich von gewöhnlichen Dingen wie Fussbällen, Uhren und Kühlschränken nicht. Viele Physiker sehen deshalb im Kollaps von verschränkten Quantenzuständen die Ursache für das Auftreten von klassischen Eigenschaften.

Penrose und Hameroff begnügen sich nicht damit und nehmen nun das Bewusstsein ins Visier, genauer: die neurophysiologische Vorstufe bewusster Prozesse. Sie vermuten, dass sich gigantisch viele Mikrotubuli quasi zu einem einzigen selbstorchestrierten Quantenzustand verschränken können und dass dessen Kollaps dann als ein «Bing» registriert wird: als ein Elementarereignis in Hirnzellen, das, mit vielen gleichen Ereignissen zusammenschaltet, unser bewusstes Handeln steuert. Penrose ist dabei der Meinung, dass die herkömmliche Quantentheorie nicht hinreicht als Erklärung. Sie müsse mit der Gravitation in einer neuen Quantengravitationstheorie aufgehoben werden.

Natürlich gibt es fachliche Kritik zuhauf: Die Physiker monieren, dass diese

Theorie bis jetzt noch gar nicht existiert und dass das Kollaps-Konzept selbst strittig ist. Die Neurowissenschaftler stört, dass Penrose und Hameroff die Standardmodelle der Hirnphysiologie umgehen, die mit Dendriten und Synapsen operieren.

Es gibt grundsätzlichere Einwände. Die Vermutung ist so abwegig nicht, dass eine Quantenphysik des Bewusstseins an dem vorbeisteuert, was der Philosoph David Chalmers das «harte Problem» genannt hat: Bewusste Erfahrung ist immer die Erfahrung aus jemandes Perspektive. Aber wie soll man dieses Faktum in einem physikalischen Weltbild unterbringen, das keinen Platz für solche Jemande bereithält? Gewiss, Bewusstsein hat ein physiologisches oder physikalisches Korrelat, aber dieses Korrelat ist eben gerade nicht das Bewusstsein. Vielleicht gibt es ja eine Physik, die den Geist erklären kann, allerdings wäre sie – dies als These geäussert – so beschaffen, dass wir sie nicht verstehen.

Paranormale Spinnerei

Auch wenn es sich bei der Quantentheorie des Bewusstseins um einen spekulativen Hochseilakt handelt, so bleiben Penrose und Hameroff in den Gemarkungen seriöser Wissenschaftlichkeit: Es handelt sich quasi um «normale» Spinnerei. Seit einiger Zeit schon grassiert nun freilich noch eine ganz andere Quantentheorie. Man werfe einen Blick in die Regale populärwissenschaftlicher Literatur. Es wimmelt nur so von «Quantentheoretikern». Deren Umkehrschluss ist von entwaffnender Simplizität: Quantenphysikalische Phänomene sind seltsam, also ist alles Seltsame quantenphysikalisch erklärbar. Weil eigentlich niemand diese Theorie versteht, lässt sich mit ihr alles verstehen. Das ist natürlich ein Denkfehler, aber seine Ausbeutung feiert Hochkonjunktur. Alles ist mit allem verschränkt kraft eines mysteriösen Quantenallzusammenhangs.

Begonnen hatte der ganze Zirkus im Übrigen mit den westöstlichen Weltumarmern der 1970er Jahre. Der Physiker Fritjof Capra schrieb damals das Buch «Das Tao der Physik», in dem er postulierte, dass die alte Hindumystik im Grunde Quantentheorie in metaphysischer Verpackung sei. Das Buch wurde zum Bestseller, um nicht zu sagen zur

neuen Bibel all jener Hippies, die danach dürsteten, die durch wissenschaftliche Rationalität entzauberte Weltsicht wieder spirituell aufzufüllen. «Quant» liess diese Leute wie die heilige hinduistische Silbe «om» erzittern, aus deren Vibrationen das Universum entstand. Und das Wort vibriert bis heute in der Alternativ- und Esoterik-Szene.

Unisono tönt das Mantra der Quantenphilosophen, -mediziner und -magier um den ganzen Globus: Bewusstsein (Bing!) ist überall! Bewusstsein und Universum bilden ein einziges «verschränktes» Ganzes! 2008 titelte eine grosse deutsche Zeitung – wohlgermerkt im Wissen-Teil: «Die Seele existiert auch nach dem Tod.» Im Artikel heisst der Autor das Jenseits in der grossen Kohärenz willkommen und lässt dadurch den alten Konflikt zwischen Wissenschaft und Religion elegant hinter sich.

Dem staunenden Publikum wird so ziemlich alles aus dem Zylinderhut der grossen Kohärenz gezaubert: Abnehmen, Homöopathie, geheimes Leben der Pflanzen, Ferien in Parallelwelten, Gespräche mit Toten, Glück, Geld, Unternehmenserfolg, Benzinsparen usw. Eine Schweizer Technikfirma beruft sich im Marketing ihrer Produkte explizit auf das Penrose-Hameroff-Modell, als ob es sich dabei bereits um rundum getestetes Wissen handelte. Wenig erstaunt stellt man dabei fest, dass die «Quantentheoretiker» immun sind gegen Kritik. Sie halten sich in ihrer Bewirtschaftung der Gutgläubigkeit schadlos an der Wissenschaft, spielen aber das Spiel Wissenschaft nicht mit. Ihre «Quantentheorie» verhält sich zur Quantentheorie – um hier Bertrand Russell zu paraphrasieren – wie Diebstahl zu ehrlicher Arbeit.

Die neue Königs-Wissenschaft

Woher diese Beschwörung der grossen Quantenkohärenz? Warum haben auf einmal alle ein tiefes Vertrauen in die Physik? Adelt es unsere Meinungen über die Welt, wenn wir sie im Namen der Quanten äussern? Ich wage mich an eine Zeitdiagnose. Hier offenbart sich ein Symptom der Post-Postmoderne: das rückfällige Bedürfnis nach einer universalen verbindlichen Weltsicht, offenkundig genug im erstarkenden religiösen Fundamentalismus. Mit ihrer Aura des Fundamentalen, Paradoxen, Mysteriösen erscheint die Quantentheorie wie geschaffen, dieses Bedürfnis auch von wissenschaftlicher Seite her zu stillen. Nachdem Vordenker der Postmoderne wie Paul Feyerabend, Jean-François Lyotard oder Richard Rorty der Wissenschaft ihre «absolutistische» Position in der Weltklärung abgesprochen hatten, hielt ein fröhlicher Markt von Weltdeutungen ohne Letztbegründungen Einzug: die Zeit des «schwachen Denkens».

Heute finden wir Evolutionsbiologie

neben Kreationismus, Quantenmechanik neben Hindumystik, Biomedizin neben Ayurveda, Astrophysik neben Ufologie, Computerprognostik neben Teeblattlesen und was auch immer angeboten wird im unüberschaubaren Konsumtempel der Weltanschauungen, die alle ihre Geltungsansprüche erheben und gerade dadurch jegliche verbindliche Geltung unterhöheln. Es mutet wie die tiefe Ironie einer Dialektik an, wenn in diesem Kuddelmuddel nun doch wieder eine «Königs»-Wissenschaft als heimliche Führerin Profil gewinnt, die Quantentheorie, die «es letztlich weiss». Die Alchemisten redeten früher vom Alkahest, von einem Elixier, das alles auflösen kann. Es scheint fast, als böte sich in der Quantentheorie ein moderner Alkahest an, ein universelles Lösungsmittel für alle Fragen.

.....
Eduard Kaeser ist Gymnasiallehrer für Physik und Philosophie an der Kantonsschule Olten und als freier Publizist tätig.



Une application des graphes : les échelles de mots

Didier Müller
Lycée cantonal de Porrentruy

La théorie des graphes est très intéressante, et on peut l'aborder au lycée déjà. J'ai d'ailleurs écrit un cahier de la CRM sur le sujet cette année [7]. Un souci est que les exercices sont souvent soit trop simples (et l'on ne voit pas forcément l'utilité d'utiliser cette théorie), soit trop longs (et les élèves se découragent). Or, voici que je suis tombé par hasard au début de l'année sur un article de Jon McLoone : *The Longest Word Ladder Puzzle Ever* [5]. Un superbe problème, où la théorie des graphes n'apparaît pas immédiatement, et qui n'est résoluble qu'avec un ordinateur, moyennant des programmes assez simples à écrire.

Un **doublet**, ou **échelle de mots** (*Word Ladder Puzzle* en anglais) est un jeu inventé par Lewis Carroll [1]. La première mention de ce jeu apparaît dans son journal le 12 mars 1878. Le jeu est publié pour la première fois le 29 mars 1879 dans le magazine britannique *Vanity Fair*. Il s'agit de trouver une chaîne de mots reliant deux mots donnés, où à chaque étape les mots ne diffèrent que d'une seule lettre, sans changer la place des lettres. Par exemple, pour relier EXOS à MATH, on peut créer une chaîne de 8 échelons :

EXOS, EROS, GROS, GRIS, GAIS, MAIS, MATS, MATH.

Ce que nous allons chercher ici, ce sont les chaînes les plus courtes qui relient deux mots. Dans la suite de cet article, pour alléger le texte, nous appellerons la chaîne la plus courte une « échelle ».

Donald Knuth, le précurseur

Donald Knuth, le célèbre informaticien de l'université de Stanford, inventeur entre autres de LaTeX, s'est intéressé à ce jeu avec les mots anglais de cinq lettres. Il a construit un graphe dans lequel 5757 mots étaient représentés par des sommets. Deux sommets étaient reliés par une arête s'ils ne différaient que d'une lettre, selon la règle établie par Lewis Carroll. Ce graphe comprenait 14'135 arêtes. Il a ensuite écrit un programme permettant de trouver les échelles entre deux mots donnés en entrée [2].

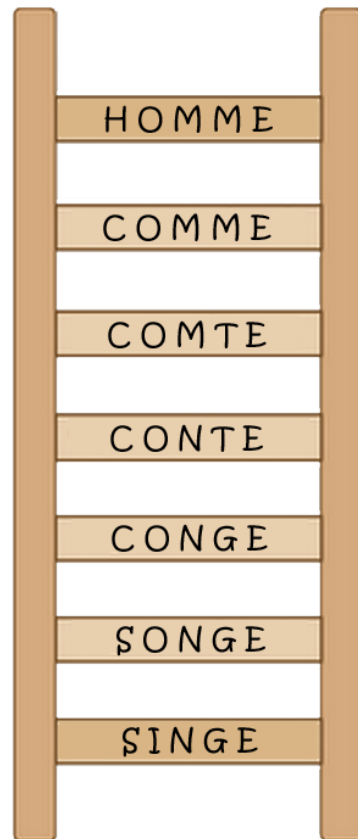
Nous allons refaire le travail de Knuth, mais avec des mots français, et nous ne nous contenterons pas des mots de cinq lettres...

Mots français de quatre lettres

Commençons notre étude avec les mots de quatre lettres. J'ai utilisé la liste des 2441 mots autorisés au Scrabble®, qui est disponible sur le web [3].

Il faut maintenant représenter le graphe dans le programme : les sommets seront bien évidemment les mots et deux sommets seront reliés par une arête si ces mots ne diffèrent que d'une lettre. Un programme en Python assez facile à écrire (disponible sur [6]) a généré les listes d'adjacences : pour chaque mot on donne la liste des mots voisins :

ABAT : [ABOT, AFAT, AXAT, EBAT]
 ABBE : [ABEE, ABLE, AUBE]
 ABEE : [ABBE, ABER, ABLE, AGEE, ANEE, AXEE]



ZOOS: [ZOBS,ZOES,ZOOM]
 ZOUC: [SOUC]
 ZUPS: [OUPS,ZIPS]

En analysant cette liste, on voit vite que le graphe n'est pas *connexe*, ce qui veut dire que l'on ne peut pas forcément trouver une chaîne entre deux mots quelconques. Il existe en effet 94 mots sans voisins :

ACUL AFRO AGHA AIGU AMOK ARUM AZUR BAHT BODY CIAO CLUB COSY DAHU DAUW DESK EDEN ENOL ENVI
 EPAR ETOC EVOE EXPO FIOH FISC FOLK FUGU GIRL GLEY GOAL GOLF GOTH GUNZ GYMS HADJ HOPI INFO
 INOX INTI INUK ITOU IVRE IXIA JAZZ JEEP KEPI KERN KHOL KICK LABO LAKH LEHM LULU LYNX MAAR
 MAMY MUON NOEL OEIL OGAM OHMS ORAL OUAH OUED OUZO OVNI PRAO RUMB SIKH SMOG SNOB SUMO THUG
 THYM UBAC UGNI ULNA ULVE UMMA UNAU VOEU VOMI WASP WATT WITZ WURM YAWL YEYE YORK YUAN YUKO
 ZARB ZINC ZIZI ZOZO

Il existe aussi seize petits groupes de mots qui ne sont pas reliés au plus grand nombre :

quatorze couples

TAEL-TAAL, NECK-TECK, ORYX-ONYX, DIBI-BIBI, SLOW-SHOW, SOAP-SWAP, INCH-INCA, YOGA-YOGI,
 AFIN-ASIN, JUDO-JUDD, ORDI-ORDO, OBEL-OBEI, EDAM-EXAM, APEX-APAX.

et deux triplets

AMUI-AGUI-AMMI, BIRR-GRRR-BRRR.

Le reste des mots non isolés forme une seule composante connexe de 2313 mots, ce qui signifie que depuis n'importe quel mot de ce groupe, on peut trouver une chaîne allant jusqu'à un autre mot de ce groupe. En tout, il y a 10'226 arêtes dans ce graphe.

Pour compter le nombre de composantes connexe, nous avons utilisé l'algorithme de marquage récursif suivant (c'est en fait un parcours en profondeur d'un arbre) :

```

PROCEDURE marquer(s,m):
    # marque le sommet s et ses voisins avec la marque m
    marque de s := m
    POUR tous les voisins v de s FAIRE
        SI v n'est pas marqué ALORS
            marquer(v,m)

marque = 0
POUR tous les mots s FAIRE
    SI s n'est pas marqué ALORS
        marque := marque + 1
        marquer(s,marque)
    
```

Il suffit ensuite de regarder les marques des mots pour dénombrer facilement les composantes du graphe.

Le mot ayant le plus de voisins est PAIS ; il en a 29 : BAIS DAIS FAIS GAIS HAIS JAIS LAIS MAIS NAIS
 PACS PAFS PAIE PAIN PAIR PAIT PAIX PALS PANS PARS PATS PAYS PLIS POIS PRIS PUIS RAIS SAIS
 TAIS VAIS

Voici la répartition du nombre N de voisins des mots, pour N compris entre 0 et 29 :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
94	142	131	183	170	185	160	170	152	140	137	115	107	71	82
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
89	60	55	50	34	34	25	20	7	16	7	1	2	1	1

Pour trouver une échelle entre deux sommets, il faut implémenter *l'algorithme de Dijkstra*. C'est un algorithme classique de la théorie des graphes [7], que je ne décrirai pas ici. On peut le trouver déjà implémenté sur le web, et l'adapter à nos besoins particuliers. Dans le cas qui nous intéresse, toutes les arêtes

ont un poids de 1, ce qui simplifie (un peu) les choses.

Avec les mots de quatre lettres du Scrabble®, la plus longue échelle compte 20 échelons et relie les mots ISBA et GNOU (en théorie des graphes, on dit que le *diamètre* du graphe est 20). Voici une des 46 possibilités pour cette échelle (on peut facilement créer les 45 autres possibilités sur [4]) :

ISBA, ISSA, ISSU, INSU, INDU, INDE, IODE, RODE, RIDE, AIDE, AIDS, AIES, AGES, AGAS, ADAS, ADOS, ADON, ANON, GNON, **GNOU**.

Il n'y a pas d'autres échelles à 20 échelons que celles reliant GNOU à ISBA.

Pour trouver le diamètre du graphe, nous avons utilisé l'algorithme de *Dijkstra* légèrement modifié. On pourrait naïvement penser qu'il suffit d'appliquer cet algorithme entre toutes les paires de sommets pour ne retenir que la plus longue échelle. C'est possible, mais sera très long en temps de calcul, puisque l'on devra appliquer *Dijkstra* $n^2/2$ fois, où n est le nombre de sommets du graphe. On ira beaucoup plus vite en se rappelant que l'algorithme de *Dijkstra* ne trouve pas seulement le plus court chemin d'un sommet s vers un sommet t , mais tous les plus courts chemins entre le sommet s et les sommets atteignables depuis s . Il suffit donc d'appliquer *Dijkstra* n fois.

De ZERO à CENT

Voici un petit exercice amusant. Partir de ZERO pour arriver à CENT en passant par DEUX, CINQ, SEPT, HUIT, NEUF et ONZE, selon les règles des doublets de Carroll.

La solution la plus courte (40 échelons) :

ZERO, HERO, HERE, HELE, FELE, FEUE, FEUX, **DEUX**, FEUX, FEUE, FEDE, CEDE, CENE, CINE, **CINQ**, CINE, CENE, CENT, SENT, **SEPT**, SERT, SERF, NERF, **NEUF**, NERF, NERE, GERE, GORE, GODE, IODE, INDE, ONDE, **ONZE**, ONDE, INDE, IODE, CODE, CEDE, CENE, **CENT**.

Remarquons au passage que l'échelle de ZERO à CENT n'a que 7 échelons :

ZERO, HERO, HERE, GERE, GENE, CENE, **CENT**.

À la recherche de la plus longue échelle

À notre connaissance, c'est la première fois que l'on recherche la plus longue échelle dans la langue française. Une telle étude a été faite en anglais [5], à l'aide du logiciel *Mathematica*. Selon cet article, il semblerait que la plus longue échelle dans la langue de Shakespeare comporte 46 échelons, avec des mots de 7 lettres, en allant de GIMLETS à THEEING.

Qu'en est-il en français ?

Une fois les programmes écrits pour les mots de quatre lettres, il n'y a pas beaucoup de travail à faire en plus pour analyser les graphes des mots plus longs. Je me suis arrêté à onze lettres, car, d'après le tableau obtenu ci-après, il est fort probable que nous ne trouverons pas d'échelles plus longues au-delà.

Après quelques heures de calcul, il ressort que l'une des plus longues échelles en français (il y en a plusieurs) comporte 66 échelons et relie SERVANTE à FRESSURE :

SERVANTE, SERRANTE, SERRANTS, FERRANTS, FERMANTS, FERMENTS, SERMENTS, SERGENTS, SERGENTE, SERGETTE, SERRETTE, SARRETTE, BARRETTE, BARBETTE, BARBOTTE, BARBOTEE, BARBOTES, BARBATES, BARDATES, BORDATES, CORDATES, CORSATES, CORSETES, CORSETAS, CORSERAS, CORDERAS, COUDERAS, COUTERAS, CONTERAS, CONFERAS, CONFIRAS, CONFINAS, CONFINES, CONFIEES, CONVIEES, CONVIENS, CONTIENS, CONTIONS, COITIONS, CUITIONS, CUISIONS, CRISIONS, CRISSONS, CRESSONS, PRESSONS, PRESSENS, PRESSEES, DRESSEES, DROSSEES, CROSSEES, CRASSEES, CLASSEES, CLISSEES, CLIPSEES, CLIPPEES, CLIPPERS, CLIPPERA, CLIPSEES, CLISSERA, CRISSEES, TRISSEES, TRESSEES, PRESSERA, PRESSURA, PRESSURE, **FRESSURE**

Le tableau ci-après résume l'analyse des graphes obtenus en fonction de la longueur des mots.

	Mots (tirés de [3])	Mots isolés	Composantes connexes*	Arêtes	Nombre max d'échelons	Doublets « optimaux »
4 lettres	2'441	94	1 cardinalité max: 2'313	10'226	20	ISBA GNOU
5 lettres	7'483	594	107 cardinalité max: 6'625	23'638	25	ISBAS SMOLT
6 lettres	17'035	1'914	623 cardinalité max: 12'988	39'720	50	UREIDE TCHANS
7 lettres	30'633	4'604	2'015 cardinalité max: 17'248	52'936	49	GOBEURS UREIDES
8 lettres	45'642	9'086	4'557 cardinalité max: 15'096	60'627	66	SERVANTE FRESSURE
9 lettres	56'573	14'828	7'438 cardinalité max: 3'999	57'408	61	EVASASSES SERINAMES**
10 lettres	59'526	19'129	9'405 cardinalité max: 1'699	45'952	39	REPORTIONS SERINERAI
11 lettres	54'442	20'761	9'591 cardinalité max: 605	31'832	33	EVASASSIONS GIVRASSIONS

* sans compter les mots isolés

** à noter que ces deux mots ne font pas partie de la plus grande composante connexe, mais de la deuxième en taille, qui contient 2684 mots.

Conclusion

Ces graphes créés à partir de mots sont un terrain de jeux idéal pour la théorie des graphes : ils nécessitent d'utiliser l'ordinateur pour résoudre des problèmes qui ne sont ni trop simples, ni trop compliqués.

On pourrait facilement trouver des variantes du jeu inventé par Lewis Carroll : par exemple permettre de modifier la place des lettres, changer deux lettres au lieu d'une, etc. Nul doute que l'on tomberait sur d'autres problèmes intéressants.

Références

- [1] Lewis Carroll, *Doublets, a word-puzzle*, (1879),
<<http://www.archive.org/details/doubletsawordpu00dodggoog>>
- [2] Ces informations proviennent du premier chapitre du livre de Knuth *The Stanford GraphBase : A Platform for Combinatorial Computing* (Addison Wesley, 1993).
- [3] « Mots du Scrabble », <www.motsduscrabble.com>
- [4] Nicolas Graner, « Doublets de Carroll », <<http://graner.net/nicolas/divers/doublets.php>>, mars 2011
- [5] Jon McLoone, « The Longest Word Ladder Puzzle Ever »,
<<http://blog.wolfram.com/2012/01/11/the-longest-word-ladder-puzzle-ever>>
- [6] « Les doublets de Lewis Carroll », <www.nymphomath.ch/graphes/doublets/>, 2012
- [7] Didier Müller, « Introduction à la théorie des graphes », Cahier de la CRM no 6, 2012.
Aussi disponible en ligne sur <www.nymphomath.ch/graphes/>

Théorie des ensembles appliquée au sudoku et algorithmique associée

Marie-Pierre Falissard, professeure de mathématiques à Pully-Lausanne (collège Champittet)

1. Description ensembliste du sudoku

Une grille de sudoku peut se caractériser par 3 types d'ensembles, qui sont des données de base propres à chaque variante du jeu de sudoku :

a. Un ensemble de symboles S , par exemple le plus courant est $S = \{1, 2, \dots, 9\}$. Ces symboles seront utilisés pour remplir la grille. On trouve parfois des ensembles plus petits (à 4 symboles) ou plus grands (à 12 ou 16 symboles). On y adjointra par commodité un symbole particulier : 0, qui correspondra à une case vide. On notera alors : $S' = S \cup \{0\}$.

b. Un ensemble ordonné C de cases c_i . On peut désigner chaque case par un numéro, qui ira ainsi de 1 à 81 pour le sudoku usuel : $C = \{1, 2, \dots, 81\}$. On utilise aussi une notation positionnelle, par exemple L_iC_j désigne la case intersection de la ligne i et de la colonne j ; on aurait alors $C = \{L_1C_1, L_1C_2, \dots, L_9C_8, L_9C_9\}$ pour le sudoku classique à 81 cases, décrit ligne à ligne, de gauche à droite et de haut en bas.

c. Un certain nombre d'ensembles E_j donnés, qui sont des sous-ensembles particuliers de C ("régions"). Chacun de ces ensembles, *a priori* quelconque, est caractérisé par la propriété suivante :

$$\text{card}(E_j) = \text{card}(S),$$

car chacun est destiné à contenir la totalité des symboles de S : il faut donc qu'il y ait autant de cases dans cet ensemble que de symboles possibles.

Par exemple, pour des sudokus 9 x 9 :

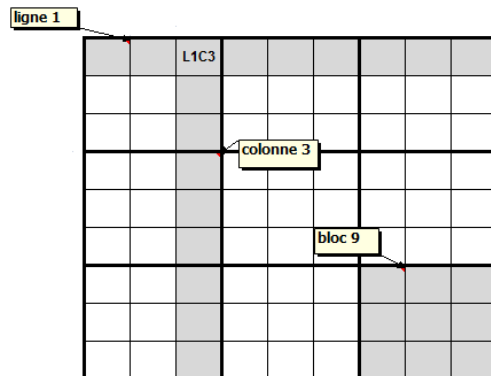
$$L_1 = \{L_1C_1, L_1C_2, \dots, L_1C_9\} \text{ (première ligne)}$$

$$C_3 = \{L_1C_3, L_2C_3, \dots, L_9C_3\} \text{ (troisième colonne)}$$

$$B_1 = \{L_1C_1, L_1C_2, L_1C_3, L_2C_1, \dots, L_3C_3\} \text{ (premier bloc)}$$

$$D_1 = \{L_1C_1, L_2C_2, \dots, L_9C_9\} \text{ (diagonale descendante)}$$

Le but du jeu consiste à « remplir les cases » en se conformant aux règles du sudoku, c'est-à-dire à définir complètement une application f de C vers S' qui soit une surjection de C vers S vérifiant les propriétés suivantes :



propriété	commentaire
$f(C) \neq \{0\}$	Avant la résolution, certaines cases sont déjà remplies : pour certains c de C , $f(c) \neq 0$, pour tous les autres, $f(c) = 0$ (case vide).
$\forall j, f(E_j) = S$	Après la résolution, il y a non-répétition des symboles dans chaque région (ligne, colonne, bloc, diagonale). La fonction f est donc une bijection de chaque E_j vers S .

2. Algorithme de résolution de grille par force brute

L'algorithme cherche à compléter une grille préalablement initialisée en remplissant chaque case vide l'une après l'autre. Les valeurs initiales sont évidemment supposées constituer une grille valide (pour s'en assurer, on peut faire précéder la routine de résolution d'une étape de vérification qui invoquerait pour chaque case non vide la routine **Validation** indiquée ci-dessous).

La routine de résolution principale peut être de la forme suivante :

Résolution		
En entrée : S ensemble de symboles, C ensemble de cases, (E_j) régions de C vérifiant $\text{card}(E_j) = \text{card}(S)$.		
	instruction	commentaire
1	Pour toute case c_i de C	Passer en revue successivement chaque case c_i de la grille
2	Si $f(c_i) = 0$, alors $f(c_i) \leftarrow \text{Remplissage}(c_i)$	Si la case est vide, chercher à la remplir
3	Si $f(c_i) = 0$, alors afficher "Impossible"	Si l'on ne peut remplir une case, la grille est impossible

Pour remplir chaque case, la routine **Remplissage** ci-dessous est invoquée. Cette routine a la particularité d'être **récursive** (elle s'invoque elle-même en ligne 5). Cette récursivité permet de remplir progressivement la grille jusqu'à ce qu'une impossibilité oblige à faire marche arrière (instruction " $f(c_i) \leftarrow 0$ " en ligne 5) d'un ou plusieurs niveaux pour tester d'autres valeurs possibles ("*backtracking*"). La ligne 1 (remplissage terminé) donne une condition d'arrêt pour éviter une boucle sans fin.

Quand la dernière case vide est remplie, la grille est constituée. Si l'une des cases ne peut être remplie après avoir essayé toutes les valeurs permises et qu'il est impossible de revenir en arrière, la grille est déclarée impossible.

Remplissage		
En entrée : case c_i (case vide de C à remplir)		
En sortie : s (valeur proposée $f(c_i)$ pour remplir la case c_i) ; 0 si la case ne peut être remplie		
	instruction	commentaire
1	Si $i > \text{card}(C)$ alors retour (on renvoie une valeur quelconque non nulle)	Si l'on a atteint la dernière case de la grille, la recherche est terminée.
2	Pour tout élément s de S	s désigne un symbole candidat pour être affecté à la case c_i .
3	Si Validation (c_i, s) = OK, alors :	Si la valeur s placée dans la case c_i respecte les règles du sudoku,
4	$f(c_i) \leftarrow s$	elle est candidate pour être affectée à cette case,
5	si Remplissage (casevidesuivante (c_i))=0 alors $f(c_i) \leftarrow 0$	sauf s'il est impossible de remplir alors la case vide suivante.
6	Si $f(c_i) = 0$, tester le symbole s suivant, sinon retour de $f(c_i)$	Si la valeur s ne convient pas, essayer une valeur suivante, sinon garder cette valeur pour la case.
7	Si tous les s de S ont été testés et $f(c_i) = 0$, on renvoie 0	Impossible d'affecter une valeur à la case c_i (toutes les valeurs possibles de S ont été essayées) .

La ligne 2 n'indique pas de quelle façon la valeur s est choisie dans S : en première approche, on peut procéder séquentiellement, dans l'ordre des symboles (par exemple 1, 2, ...9).

La routine **Validation** est destinée à vérifier que la valeur candidate ne contrevient pas aux règles du sudoku :

Validation		
En entrée : case c (case vide de C à remplir), valeur s		
En sortie : OK si la valeur s convient pour la case c ; KO sinon		
	instruction	commentaire
1	Pour tout ensemble E_j	Passer en revue chaque ensemble (ligne, colonne, bloc, diagonale...)
2	Si $c \in E_j$ et $s \in f(E_j - \{c\})$, alors retourner KO	Si une autre case de l'ensemble E_j a la même valeur s, cette valeur ne convient pas pour c
3	retourner OK	Aucune case de l'ensemble E_j n'a la valeur s

La routine **casevidesuivante** donne la case vide qui suit immédiatement une case donnée :

casevidesuivante
En entrée : case c_i (case en cours)
En sortie : c_j : la case vide qui suit la case c_i (dans l'ordre adopté pour C), sinon une valeur quelconque supérieure à $\text{card}(C)$

En pratique, les données de base (S, C et les E_j), caractéristiques du sudoku, ne sont pas définies dans le programme, mais sont "externalisées" dans un module séparé, qui décrit la variante de sudoku à laquelle on a affaire. Cela permet d'utiliser le même algorithme pour différentes variantes du sudoku (sudoku à symboles différents, à grille plus grande ou "multi-grilles", à régions différentes dans la grille). Ci-dessous, générés par l'algorithme, un sudoku à deux diagonales et un sudoku à 13 blocs (4 blocs en grisé auxquels s'ajoutent les 9 blocs du sudoku courant) ; ces deux grilles inédites¹ sont considérées l'une comme facile, car résoluble par des stratégies élémentaires, l'autre comme de niveau moyen, car résoluble par des stratégies de difficulté moyenne (détection de "paires nues"²), moins abordables cependant pour le débutant.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	9								4
2			7				8		
3		4			6			5	
4				2		6			
5			8				9		
6				8		4			
7		5			2			3	
8			1				5		
9	3								7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2			9				1		
3		1	2	4		5	6	7	
4			6				2		
5					6				
6			4				7		
7		6	8	5		1	4	9	
8			1				8		
9									

3. Unicité de la solution

L'algorithme de résolution ne s'assure pas de l'unicité de la solution, il s'assure seulement de son existence.

Pour vérifier l'unicité, on va chercher une deuxième solution et vérifier si elle coïncide avec la première. On effectue cela en réexécutant l'algorithme de résolution en modifiant la ligne 2 de la routine de remplissage pour "choisir différemment" la valeur à tester. Une possibilité, pour trouver une éventuelle "deuxième solution" aussi différente de la première que possible, consiste à tester pour une case donnée le symbole qui suit immédiatement la valeur trouvée pour cette case lors du calcul de la première solution (si "2" était la première solution pour cette case, on va tester, dans l'ordre : 3, 4, ..., 9, 1 et 2 au second passage).

4. Algorithme de génération de grille

La génération d'une grille consiste à remplir une grille vide sans autre règle que le respect des contraintes du sudoku. La génération d'une grille peut être considérée comme un cas particulier de résolution : c'est en fait la résolution d'une grille initialement vide ($f(C) = \{0\}$).

¹ Solutions détaillées sur <http://tinyurl.com/2sudokus>

² Par exemple, on constatera, au cours de la résolution du sudoku de droite, que $f(\{L_6C_4, L_6C_6\}) = \{2,3\}$, ce qui détermine une "paire nue" $\{2,3\}$. On en déduira alors que $f(L_6C_2) = 9$, seule valeur possible pour la case L_6C_2 .

Mais si l'on applique l'algorithme de résolution ci-dessus sans changement, on va générer systématiquement la même grille triviale (ci-contre), remplie ligne à ligne de gauche à droite et de haut en bas, où l'on met dans chaque case la plus petite valeur possible.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	1	4	3	6	5	8	9	7
3	6	5	8	9	7	2	1	4
8	9	7	2	1	4	3	6	5
5	3	1	6	4	2	9	7	8
6	4	2	9	7	8	5	3	1
9	7	8	5	3	1	6	4	2

Pour que la grille soit différente à chaque génération, le choix de s dans S doit être aléatoire au lieu d'être séquentiel. Cela se réalise aisément par emploi, dans la ligne 2 de la routine de remplissage, d'une fonction aléatoire (choix d'un entier au hasard entre 1 et 9 pour le sudoku classique). Il faut seulement veiller à ce que la boucle de test (lignes 2 à 6) ne réutilise pas plusieurs fois un symbole déjà testé auparavant dans cette même boucle.

Une fois une grille générée (et donc remplie), on supprime des chiffres jusqu'à parvenir à une grille ayant un certain nombre de cases remplies (au moins 17 pour le sudoku courant), les autres cases étant vides. On s'assure enfin de l'unicité de la solution.

On peut aussi, par souci d'esthétique, créer une grille ayant un motif prédéfini (ainsi les deux exemples donnés plus haut ont un pré-remplissage de valeurs respectant une symétrie centrale). Il suffit, soit de choisir parmi un grand nombre de grilles générées aléatoirement celles qui répondent au motif concerné, soit de construire la grille à partir de cette contrainte initiale.

5. Algorithmes de résolution "intelligente"

L'algorithme de résolution par force brute vient très rapidement à bout de toutes les grilles valides, mais le joueur "humain" ne procède jamais ainsi (sauf quand il a épuisé tous les procédés "humains" à sa disposition). En effet, le joueur utilise différentes stratégies plus ou moins simples, qui reposent sur les propriétés de bijection de f restreinte aux régions E_j :

- certaines sont élémentaires : chercher où placer un symbole donné dans une ligne, une colonne, un bloc... (étant donné E_j et $s \in S$, chercher $c \in E_j$ tel que $f(c)=s$) ; vérifier si une case donnée à la croisée de plusieurs régions pourrait être remplie par un seul symbole candidat (étant donné c , chercher s tel que $f(c)=s$, en considérant tous les E_j qui contiennent c) ;

- d'autres sont plus élaborées : détecter dans certaines régions des "paires" ou des "triplets" de façon à restreindre les valeurs candidates ; ainsi, dans l'exemple ci-contre, on peut éliminer la possibilité d'une valeur 3 pour L_8C_4 et L_9C_4 parce que les cases en L_8C_5 et L_9C_6 ne peuvent contenir que les valeurs 1 et 3 ("exclusion pour cause de paire nue") ;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	7			9				4
2		2		7		4		9	
3			3	5	6	8	1	2	7
4			7	1	4		9		
5			2	6	8	7	3	4	
6			4		5	9	7		
7	2		5	9	7	6	4		
8		6		3		5	2	7	9
9	7		9	3	2				6

- d'autres sont très élaborées (dans le pire des cas, on se rapproche du procédé de force brute : on élimine une valeur possible en l'affectant virtuellement à une case et en continuant à remplir la grille jusqu'à tomber sur une impossibilité).

Un des rôles du créateur de grille de sudoku est d'évaluer le niveau de la grille proposée selon la difficulté des stratégies à mettre en œuvre pour sa résolution. Cette difficulté, contrairement à ce qu'on pourrait penser, n'est pas liée au nombre de cases initialement remplies, ni à leur disposition dans la grille. Il semble par chance qu'une grille générée de façon aléatoire soit le plus souvent "facile"...

6. Bibliographie

- *Les Maths au Carré - Algorithmes & spéculations diverses*, Marie-Pierre Falissard (Ellipses, 2011)
- *Précis de sudoku*, Narendra Jussien (Lavoisier, 2006)

A propos du volume d'un segment sphérique

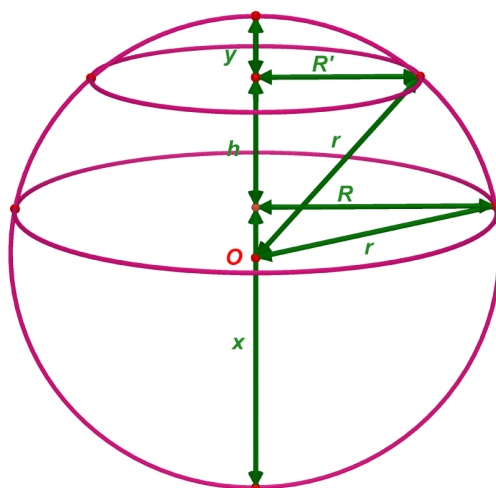
Jean Piquerez

Un de mes ex-collègues m'a récemment fait part de son embarras à démontrer la formule du volume d'un segment sphérique proposée par André Delessert à l'exercice 335, page 245, de son ouvrage intitulé « Introduction à la géométrie de l'espace » aux Editions Loisirs et Pédagogie ». Je me suis donc attelé à cette tâche, un peu délicate, mais loin d'être insurmontable.

Il s'agit de démontrer la formule $V = \frac{\pi}{6}h(3R^2 + 3R'^2 + h^2)$ où h représente la hauteur du segment, R et R' étant les rayons des deux bases circulaires.

Par intégration, on obtient : $V = \pi \int_{\sqrt{r^2 - R'^2}}^{\sqrt{r^2 - R^2}} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \frac{\pi}{3}(2r^2h + R'^2\sqrt{r^2 - R'^2} - R^2\sqrt{r^2 - R^2})$ (1)

r étant le rayon de la sphère.



Or, on a les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad R^2 = x(2r - x) \\ (3) \quad R'^2 = y(2r - y) \\ (4) \quad x + y + h = 2r \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 - 2rx + R^2 = 0 \\ y^2 - 2ry + R'^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (5) = (2) - (3) \quad (x - y)(x + y - 2r) + R^2 - R'^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(6) \quad (x - y)h = R^2 - R'^2 \Rightarrow x - y = \frac{R^2 - R'^2}{h}$$

$$\left. \begin{array}{l} (6) \quad x + y = 2r - h \\ (4) \quad x - y = \frac{R^2 - R'^2}{h} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (7) \quad x = r - \frac{h}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2h} \\ (8) \quad y = r - \frac{h}{2} - \frac{R^2 - R'^2}{2h} \end{array} \right\}$$

En supposant $x \geq r$ et $y \leq r$, on peut écrire : (9) $x = r + \sqrt{r^2 - R^2}$ et (10) $y = r - \sqrt{r^2 - R'^2}$

$$(9) \text{ et } (10) \text{ dans } (1) : V = \frac{\pi}{3} [2r^2h + R'^2(r - y) - R^2(x - r)] = \frac{\pi}{3} [2r^2h + r(R^2 + R'^2) - R^2x - R'^2y]$$

En tenant compte de (7) et (8), il vient :

$$V = \frac{\pi}{3} \left[2r^2h + r(R^2 + R'^2) - R^2 \left(r - \frac{h}{2} + \frac{R^2 - R'^2}{2h} \right) - R'^2 \left(r - \frac{h}{2} - \frac{R^2 - R'^2}{2h} \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$(11) \quad V = \frac{\pi}{3} \left[2r^2h + \frac{(R^2 + R'^2)h}{2} - \frac{(R^2 - R'^2)^2}{2h} \right]$$

Or, si l'on s'est débarrassé des racines, il n'en subsiste pas moins r dans cette formule.

Cependant, on a : (12) $h = \sqrt{r^2 - R'^2} - \sqrt{r^2 - R^2} \Rightarrow h^2 = 2r^2 - (R^2 + R'^2) - 2\sqrt{r^2 - R'^2}\sqrt{r^2 - R^2} \Rightarrow$
 $[2r^2 - (R^2 + R'^2) - h^2]^2 = 4(r^2 - R^2)(r^2 - R'^2) \Leftrightarrow$

$$\cancel{4r^4} + (R^2 + R'^2)^2 + h^4 - \cancel{4r^2(R^2 + R'^2)} - 4r^2h^2 + 2h^2(R^2 + R'^2) = \cancel{4r^4} - \cancel{4r^2(R^2 + R'^2)} + 4R^2R'^2$$

$$(13) \quad \underbrace{(R^2 + R'^2)^2 - 4R^2R'^2}_{(R^2 - R'^2)^2} = -h^4 + 4r^2h^2 - 2h^2(R^2 + R'^2)$$

(13) dans (11) : $V = \frac{\pi}{3} \left[2r^2h + \frac{(R^2 + R'^2)h}{2} + \frac{h^3 - 4r^2h + 2h(R^2 + R'^2)}{2} \right] =$
 $\frac{\pi}{6} h \left[\cancel{4r^2} + (R^2 + R'^2) + h^2 - \cancel{4r^2} + 2(R^2 + R'^2) \right] = \frac{\pi}{6} h (3R^2 + 3R'^2 + h^2) \quad \text{Ouf !!}$

Remarques : 1) $x = r - \sqrt{r^2 - R^2}$, on sépare le segment sphérique en deux segments, l'un, de bases R', r et de hauteur h_1 , l'autre, de bases R, r et de hauteur h_2 , de part et d'autre de l'équateur, et on additionne leurs volumes à l'aide de la formule précédente. On obtient alors :

$$\frac{\pi}{6} h_1 (3r^2 + 3R'^2 + h_1^2) + \frac{\pi}{6} h_2 (3r^2 + 3R^2 + h_2^2) = \frac{\pi}{6} [3(h_1 + h_2)r^2 + 3(h_1R'^2 + h_2R^2) + (h_1^3 + h_2^3)] =$$

$$\frac{\pi}{6} \left\{ 3(h_1 + h_2)r^2 + 3h(R'^2 + R^2) - 3(h_2R'^2 + h_1R^2) + \underbrace{(h_1 + h_2)}_h [(h_1 + h_2)^2 - 3h_1h_2] \right\} =$$

$$\frac{\pi}{6} \left[3h_1 \underbrace{(r^2 - R'^2)}_{h_2^2} + 3h_2 \underbrace{(r^2 - R^2)}_{h_1^2} + 3h(R'^2 + R^2) + h^3 - 3(h_1 + h_2)h_1h_2 \right] = \frac{\pi}{6} h (3R^2 + 3R'^2 + h^2)$$

2) La formule étant vraie en toute généralité, si l'on pose :

a) $R' = 0$, il vient : $\frac{\pi}{6} h (3R^2 + h^2)$ volume d'une calotte sphérique de hauteur h et de rayon R

b) $R = R' = 0 \Rightarrow h = 2r$, il vient : $\frac{\pi}{6} h^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$ volume de la sphère de rayon r .

La balade de la médiane et le théorème de Pythagoron

Jean-Claude Pont

C'est un ouvrage court et sans prétention. Mais son histoire est cocasse. Il faut dire pour commencer qu'il est né au confluent de plusieurs de mes centres d'intérêt, qui sont autant de passions :

- Les éblouissements que j'ai éprouvés pour la géométrie élémentaire du bon père Euclide, complétée par les studieuses veilles de générations de chercheurs.
- Un intérêt pour l'histoire des mathématiques, qui s'est manifesté dès mes premières années d'étude et qui ne s'est jamais démenti.
- Des réflexions sur la philosophie des mathématiques, éparses et non structurées, qui m'interpellèrent par penchant ou par nécessité ; et qui constitueront par la suite les éléments de base de ce qui allait devenir l'une des mes activités principales, comme chercheur en histoire et philosophie des sciences.
- Des préoccupations didactiques du côté de l'enseignement, qui fut mon vrai métier et que j'ai exercé sur pratiquement tout le spectre des âges.

En réalité et à la réflexion, tous ces courants de pensée et d'intérêt s'interpénètrent et interfèrent en permanence et leur présence est immanente à ce petit ouvrage.

Comme je l'explique en détail dans l'introduction, ayant la charge d'un cours à option pour des élèves de ce que l'on appelait alors la « section classique », mais qui envisageaient des études scientifiques, je m'étais mis en quête d'un sujet de recherche élémentaire, encore inexploré – ce qui donnerait au travail le goût du neuf, en quelque sorte une aventure – et qui soit, au moins par certains aspects, ludique. La présence de ce dernier aspect apparaît déjà dans le titre. Le *Goron* est un vin du Valais, et il intervient à sa façon directement dans la première genèse de ce travail. Je souhaitais aussi que ce travail mobilise, en permettant de les répéter, un ensemble varié de connaissances acquises dans les dernières années du collège (gymnase). Mais je réalisais assez vite que mes élèves avaient besoin d'autre chose. Je me mis donc « à temps perdu » et sporadiquement depuis 1974 à explorer moi-même ce champ.

Tout un bestiaire d'animaux exotiques en sortirent : triangle, cercle, hyperbole, coefficient rituels, ou pararituels, isopotes et autre mésopotes, une terminologie née en partie des éléments d'histoire des mathématiques qui figurent en bonne place à l'origine de cette recherche. En son centre, les médianes d'un triangle et le triangle que l'on peut constituer à partir d'elles. Le théorème emblématique, que j'ai appelé le *théorème de Pythagoron* pour des raisons ludiques détaillées dans le livre, s'énonce ainsi (la terminologie de l'ouvrage l'exprime un peu différemment) : le triangle de côtés a , b , c est semblable au triangle de ses médianes si et seulement si : $a^2 + b^2 = 2c^2$. De là l'idée naturelle d'étendre l'étude aux triangles dans lesquels on a : $a^2 + b^2 = nc^2$ (n entier), triangles que j'ai qualifiés de « rituels » également pour des raisons qui tiennent à l'histoire des mathématiques ; pareil avec $a^2 - b^2 = nc^2$. Cette étude m'a amené à considérer, d'une part le triangle rectangle comme un triangle rituel d'ordre 1 et, d'autre part, à déterminer si – et comment – les propriétés les plus connues du triangle rectangle se transformeraient en fonction du *coefficient rituel*. Si l'on veut, le triangle rectangle devient une espèce dans un genre. J'ai assorti ces éléments géométriques de commentaires mathématiques, historiques, épistémologiques ou didactiques qui sont dispersés dans le texte. Pour ce qui concerne le style de l'ouvrage, je l'ai évidemment adapté au niveau auquel se situent les élèves à qui il s'adressait primitivement.

L'ouvrage se termine sur deux courtes fables traitant de l'espace et du cercle ; je les avais écrites à la demande d'un groupe de danseurs qui souhaitaient placer leurs évolutions sur des textes parlant de l'espace et de la figure.

Après une si longue gestation ça aurait pu être un éléphant. Arrivé à terme, ce n'est qu'un drôle d'oiseau.

Pour commander l'ouvrage :

Editions du Tricorne www.tricorne.org

14 rue Lissignol

CH 1201 Genève

96 pages, ISBN 978-2-940450-03-9,

18 francs suisses / 14 euros (+ port) l'exemplaire

Handy Technik

Beiliegend zum aktuellen Bulletin erhalten Sie das neue Lehrmittel "HandyTechnik" mit den folgenden Themen:

- Geschichte der Telekommunikation
- Mobiltelefonie und Digitalelektronik
- Funktionsweise eines Mobilfunknetzes
- Strahlenbelastung und sonstige Risiken

Wie funktioniert Mobilkommunikation?

Das Lehrmittel richtet sich an Schüler und Schülerinnen der Oberstufe und der Sekundarstufe II. Der ansprechende Text wird ergänzt mit Verständnisfragen, technischen Illustrationen und zahlreichen Anregungen für Experimente.

Klassensätze des Lehrmittels können unter www.swisscom.com/handytechnik kostenlos bestellt werden. Auch das Enhanced E-Book (multimedial angereicherte Online Version) lässt sich über diese Adresse aufrufen. Das Lehrmittel existiert in deutscher und französischer Sprache.

Autor: Hans Kammer, Physiklehrkraft
Didaktisches Konzept und Umsetzung: Lernetz AG
Herausgeberin: Swisscom AG





Nachhaltiges Lernen

- Das MINT-Lernzentrum an der ETH Zürich

Armin P. Barth

Das MINT-Lernzentrum der ETH Zürich erarbeitet Materialien für besonders lernwirksamen Unterricht und engagiert sich an breiter Front für eine Stärkung der MINT-Fächer (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik). Worum geht es genau? Welche Angebote bestehen schon? Und auf welchen Erkenntnissen der Lehr- und Lernforschung basieren sie?

- Wie viele Stellen hat die Zahl 2012^{2012} ? Welche Darstellung dieser Zahl wäre erstrebenswert, um die Frage beantworten zu können?
- Wenn wir von einem zweigelenkigen Roboterarm (Abb. 1) die Längen a und b von Ober- und Unterarm sowie die Winkel α und β kennen, können wir dann die Koordinaten x, y des Greifers berechnen? Welche unter Umständen neuen Werkzeuge müssen dafür entwickelt werden?
- Warum heissen elliptische Integrale *elliptisch*? Was haben sie denn mit Ellipsen zu tun?
- Wenn wir in der (rechts beliebig fortgesetzten) Mauer (Abb. 2) oben links starten und immer nur in Richtung Ost, Nordost oder Südost gehen dürfen, wie viele verschiedene Wege gibt es dann zu einem beliebigen Feld? Können wir die Zahlfolgen, die sich in den drei Zeilen ergeben, geeignet formal beschreiben? Welche Art der Beschreibung ist dabei besonders nützlich?
- Wir lösen die Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$ einmal auf sehr unkonventionelle Weise (Methode von Eduard Lill, Abb. 3): Wir stellen ein Spielzeugauto auf den Ursprung und lassen es nun 1 Einheit (der Koeffizient von x^2) in positiver x-Richtung fahren. Danach soll es 90° im Gegenuhrzeigersinn drehen und 3 Einheiten (der Koeffizient von x) weiter fahren. Zum Schluss soll es wieder 90° gegen den Uhrzeigersinn drehen und -4 Einheiten weiterfahren bis zum Endpunkt T. Nun schießen wir vom Ursprung aus auf das Auto, aber so, dass die Kugel an der Geraden des mittleren Koeffizienten einmal reflektiert wird. Zudem herrscht hier ein sehr spezielles Reflexionsgesetz: Die Kugel reflektiert nämlich immer unter 90° . Der Winkel, unter dem wir die Kugel abschießen, ist -45° . Und $-\tan(-45^\circ) = 1$. Dies ist eine Lösung der Gleichung (was ja auch zutrifft). – Ist das ein Zufall? Lässt sich diese Methode verallgemeinern? Stimmt sie für jede Polynomgleichung 2. Grades? Und was ist mit anderen Graden?

Das sind mathematische Beispiele sogenannter kognitiv aktivierender Einstiegsfragen. Mit ihnen will man die Lernenden an die Grenzen ihres aktuell verfügbaren Wissens heranführen und zwar so, dass sie die Fragestellung als herausfordernd und doch lösbar und immer als interessant und anregend empfinden. Sie sollen erkennen, dass ihr bisheriges Wissen zur Beantwortung noch nicht ausreicht, dass aber eine lohnenswerte Anstrengung den nötigen Ausbau des Wissens lie-

fern wird. Diese Art des Einstiegs wirkt sich sowohl auf das Interesse als auch auf die Lernmotivation positiv aus.

Einige Erkenntnisse der modernen Lehr- und Lernforschung

Guter Unterricht soll dazu führen, dass sinnstiftendes und anwendbares Wissen entsteht. Das stellt sich aber nicht „einfach so“ ein, sondern es kann mit bestimmten Lernformen, deren Wirksamkeit empirisch sehr gut belegt ist, gefördert werden. Welche diesbezüglichen Erkenntnisse hat die Lehr- und Lernforschung schon erarbeitet?

Die **kognitiv aktivierenden Einstiegsfragen** habe ich schon erwähnt. Im naturwissenschaftlichen Unterricht wären das Phänomene, die in den Lernenden das Bedürfnis wachrufen, etwas Neues zu lernen, um das für sie Unerklärliche erklären zu können. Der solchen Fragen folgende Unterricht ist dann **auf vielfältige, aber nicht auf beliebige Weise** machbar. Das bedeutet, dass die Lehrperson nicht einfach irgendwas machen kann, um den gewünschten Lernprozess in Gang zu bekommen, dass aber andererseits verschiedene Methoden – geschickt umgesetzt – zu vergleichbar guten Resultaten führen können. Es ist also nicht das pingelige Befolgen einer ganz bestimmten Methode, das zählt.

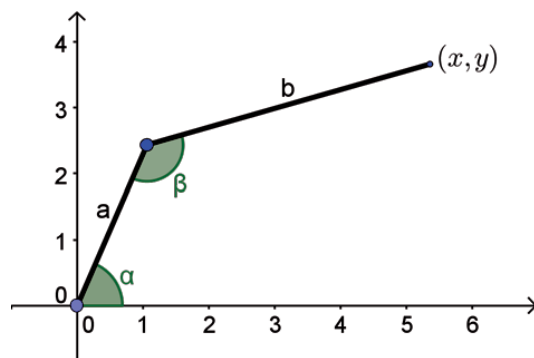


Abb. 1

Guter Unterricht ist überdies **schülerzentriert und lehrergeleitet**. Die Lehr- und Lernforschung hat gezeigt, dass forschendes Lernen dann besonders wirksam ist, wenn es durch klare und zielführende Aufträge angeleitet ist. Man sollte die Lernenden also nicht mit zu vagen Angaben allein lassen. (Wir alle kennen das Bild von Schülergruppen im Schulhauspark, denen gesagt wurde, sie sollen einfach mal etwas lesen ohne klare Instruktionen...)

Start	2	6	21	77	usw.	
	1	4	15	56	usw.	
		1	5	20	76	usw.

Abb. 2

Weiter setzt guter Unterricht eine **genaue Kenntnis der Schülervorstellungen** voraus. Die Lehr- und Lernforschung hat gezeigt, dass intellektuelle Leistungen ganz wesentlich davon abhängen, inwiefern es gelingt, Vorwissen zur Bewältigung neuer Anforderungen zu nutzen. Um also möglichst wirksame Lerngelegenheiten anbieten zu können, muss die Lehrperson wissen, wo die Lernenden gerade stehen und welche Fehlkonzepte oder Verständnisschwierigkeiten sie haben könnten.

Getragen von diesem Geist schaffen Lehrpersonen Lerngelegenheiten, in denen die Lernenden ihr bisheriges Wissen erweitern können, etwa indem sie sich mit fruchtbaren Fragen auseinandersetzen, Hypothesen aufstellen, diese verifizieren oder falsifizieren, neue (gut angeleitete) Wege ausprobieren und verinnerlichen, das Gelernte in neuen Anwendungen einsetzen und mündlich und schriftlich über das Gelernte reflektieren. Dabei bieten sich verschiedene Lernformen an.

Mit **ICC** (Inventing with Contrasting Cases) kann man es schaffen, dass Schülerinnen und Schüler ein neues Konzept selber erfinden und damit auch besser behalten können statt einfach nur zu hören, wie die Lehrperson es einführt. Angeleitet durch **Selbsterklärungsaufgaben** sollen sie zentrale Überlegungen in eigenen Worten wiedergeben, Erklärungen zu Sachverhalten, Zusammenhängen und Hintergründen nennen sowie Argumentketten aufbauen oder überprüfen. Gegenüber dem klassischen „Tell and practice-Unterricht“, bei dem die Jugendlichen die Erklärungen zu den Sachverhalten bloss hören und dann sofort in Transferaufgaben anwenden sollen, findet hier eine Zwischenphase statt, in der die Lernenden ihr Verständnis der Stoffe selbständig vertiefen.

Mit **metakognitiven Fragen** kann man die Lernenden dazu anregen, selbständig über den Stand und die Fortschritte ihres Lernens zu reflektieren. Wo stehen sie gemäss eigener Einschätzung? Was haben sie schon gut verstanden, und zu welchen Punkten bestehen noch welche Unklarheiten? Auch das periodische Einbinden von **geistigen Werkzeugen** (Diagramme, Formeln, Graphen) kann überaus hilfreich sein bei der Konstruktion von intelligentem Wissen und dem Transfer. Gerade weil sie in diversen Disziplinen zur Anwendung gelangen und immer für eine übersichtliche Bündelung von Information sorgen, sollten sie speziell geübt werden.

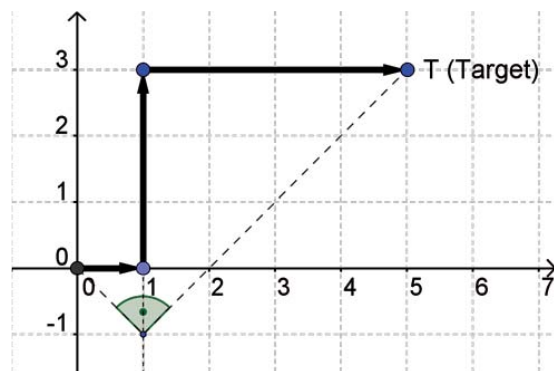


Abb. 3

Das MINT-Lernzentrum im Überblick

Das im Jahre 2009 gegründete MINT-Lernzentrum der ETH Zürich verfolgt das Ziel, die mathematisch-naturwissenschaftliche Allgemeinbildung zu verbessern. Dass gerade Fachleute dieser Studienrichtungen besonders gesucht sind, ist längst kein Geheimnis mehr. Freilich ist dieses wichtige Ziel aber nicht von heute auf morgen zu erreichen.

Am MINT-Lernzentrum arbeiten Lehr- und Lernforscher gemeinsam mit Lehrpersonen (u.a. dem Autor dieser Zeilen), die teilweise vom Unterricht freigestellt sind, um hier ihre Expertise einzubringen. Die Lehrpersonen profitieren im Gegenzug von den Erkenntnissen der Forschung dazu, wie besonders lernwirksamer Unterricht gestaltet werden sollte – eine klassische Win-win-Situation. So entstehen hier Unterrichtsangebote, die auf den oben erläuterten Erkenntnissen der Lehr- und Lernforschung basieren und Lernformen einsetzen, die sich in empirischen Vergleichsstudien als besonders wirksam erwiesen haben.

Die Materialien, die am MINT-Lernzentrum erarbeitet werden, richten sich vor allem an Schulen und Lehrpersonen der Sekundarstufen I und II. Setzt ein intensives Bemühen, die Jugendlichen für die MINT-Fächer zu begeistern, erst dann ein, ist das allerdings oftmals zu spät. Um die langfristigen Wirkungen optimierter mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterrichtsangebote zu untersuchen, führt das MINT-Lernzentrum daher auch eine auf 15 Jahre angelegte Längsschnittstudie durch, in der herkömmlicher und optimierter Unterricht miteinander verglichen werden.

MINT von der Primarschule bis zur Matur

Die Zusammenarbeit in dieser Studie mit zur Zeit ungefähr 200 Primarschullehrpersonen aus der ganzen Schweiz (Versuchs – und Kontrollgruppe) verläuft so, dass diese am Institut ausgebildet werden und dann mit ihren Klassen naturwissenschaftlichen Unterricht basierend auf den sogenannten KiNT-Kisten (Kinder lernen Naturwissenschaft und Technik) abhalten. Diese von Prof. Dr. Kornelia Möller und ihren Kollegen an der Universität Münster entwickelten und im Spectra-Verlag herausgegebenen Lernboxen sind in ihrer Lernwirksamkeit bewährt und wissenschaftlich geprüft. Sie bieten Experimentiermaterialien für die Schülerinnen und Schüler sowie gut ausgearbeitete Ordner mit Anleitungen und Hilfestellungen für die Lehrpersonen.



Abb. 4

Das Ziel des Lernzentrums ist es, ein Spiralcurriculum aufzubauen, in dem mathematisch-naturwissenschaftliche Inhalte immer wiederkehren und auf verschiedenen Anspruchsniveaus für eine permanent hohe Motivation der Jugendlichen für die MINT-Fächer sorgen. So entsteht MINT-Förderung von der Primarschule bis zur Matura. Freilich soll während und am Ende dieses langen Prozesses genau untersucht werden, ob und wie genau sich ein solches Spiralcurriculum auf das naturwissenschaftliche Wissen und die Motivation der Jugendlichen auswirkt.

Angebote

Das MINT-Lernzentrum bietet Unterrichtsmaterialien an, die nach Gesichtspunkten der Lehr- und Lernforschung optimiert sind. Bereits liegen ausgearbeitete Sequenzen aus den Bereichen Mathematik, Physik und Chemie vor. Sie sind wissenschaftlich fundiert und aufeinander aufbauend und wurden verfasst mit dem Blick auf eine ganzheitliche Förderung der MINT-Fächer.

Die „pfannenfertigen“ Einheiten enthalten kognitiv aktivierende Einstiegsaufgaben, Lesetexte, die wahlweise den Lehrpersonen als Grundlage dienen oder den Lernenden kopiert abgegeben werden können, genaue Beschreibungen von Experimenten, Aufträge und Arbeitsblätter, ferner viele ausgearbeitete Selbsterklärungsaufgaben, metakognitive Fragen und Aufgabenblätter samt

Lösungen. Alle Materialien sind empirisch getestet und werden ergänzt durch je einen Prae- und einen Posttest.

Parallel dazu empfehlen wir eine eigens entwickelte Lernplattform, mit der die Schülerinnen und Schüler Aufträge überall bearbeiten können, wo sie Internetzugang haben, und die der Lehrperson ein rasches Korrigieren erlaubt und sie beim Analysieren des aktuellen Wissensstandes und der allfälligen Schwierigkeiten der Lernenden unterstützt.

Leitung / Kontakt / Infos

Das MINT-Lernzentrum befindet sich in Zürich an der Clausiusstrasse 59 (ETHZ, RZ E 1.1-1.2) und wird von Dr. Ralph Schumacher, Prof. Dr. Elsbeth Stern und Prof. Dr. Andreas Vaterlaus (Abb. 4) geleitet. Weitere Informationen findet man unter

<http://www.educ.ethz.ch/mint>

Hier findet man Publikationen, die die oben vorgestellten Grundätze der Lehr- und Lernforschung empirisch untermauern, ebenso wie Hinweise auf Fortbildungen für interessierte Lehrpersonen.

Rationale Gewirre

Tobias Christ, ETH Zürich

1 Einleitung

Wir begeben uns auf einen Nebenschauplatz der Knotentheorie und betrachten rationale Gewirre. Das sind die Objekte, die entstehen, wenn man die Enden von zwei Schnüren sukzessive miteinander verdreht. In diesem Artikel beweisen wir J. H. Conways Fundamentalsatz über rationale Gewirre: *Zwei rationale Gewirre sind genau dann äquivalent, wenn die ihnen zugeordneten Kettenbrüche als rationale Zahlen gleich sind.*¹ Im wesentlichen bedeutet er, dass sich rationale Gewirre komplett charakterisieren lassen. Für allgemeinere Gewirre, Knoten oder Verschlingungen gibt es viele interessante Ansätze, aber man ist von einer vollständigen Klärung der Sachlage in einer vergleichbaren Weise, wie sie für rationale Gewirre möglich ist, weit entfernt. Wir beweisen den Fundamentalsatz vollständig, indem wir uns so weit wie möglich elementarer Werkzeuge bedienen. Für den zweiten Teil des Artikels werden elementare Begriffe aus der Knotentheorie, namentlich *Reidemeisterbewegungen* als bekannt vorausgesetzt. Wir folgen im Wesentlichen dem Beweis von J. R. Goldman und L. H. Kauffman.² Damit hoffen wir, dieses interessante Stück Mathematik einem breiteren Publikum und insbesondere dem Mittelschulunterricht zugänglicher zu machen. Mathematisch strenge Definitionen werden nur angedeutet oder sogar ganz weggelassen, soweit es der Stoff zulässt. Dafür wird an die Vorstellungskraft des Lesers appelliert. Eine ausführlichere Version des Artikels mit Aufgaben und einer längeren Einführung ist auf EducETH³ verfügbar.

Zwei beliebig miteinander verwirrte Schnüre werden ein *Gewirr* genannt. Im Gegensatz zu Knoten, die aus einer in sich geschlossenen Schnur bestehen, bestehen Gewirre aus mindestens zwei Schnurstücken, und beide haben zwei Enden. Man stelle sich eine Schachtel mit vier Löchern vor. Die eine Schnur geht durch eines der Löcher in die Schachtel hinein und verlässt sie durch ein anderes Loch. Die zweite Schnur geht durch eines der beiden übriggebliebenen Löcher in die Schachtel und verlässt sie durch das letzte. Innerhalb der Schachtel sind die Schnüre auf beliebige Weise verknötet und verheddert. Möglicherweise be-

finden sich in der Schachtel auch noch zusätzliche Knoten, mit denen die beiden Schnüre verheddert sind. Im gleichen Geiste wie bei den Knoten bezeichnen wir zwei Gewirre als *äquivalent*, wenn man durch elastische Änderungen innerhalb der Schachtel von einem zum anderen übergehen kann. Wie bei den Knoten ist es dabei verboten, eine Schnur zu zerschneiden und dann wieder zusammensetzen. Zusätzlich verlangen wir jetzt aber, dass die Enden in den jeweiligen Löchern bleiben. Wir beschränken uns auf Gewirre mit genau vier Enden. Im folgenden denken wir uns die vier Eckpunkte immer in der xy -Ebene liegend mit den Koordinaten $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1)$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1)$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}(-1, -1)$, siehe Abb. 1. Entsprechend sprechen wir vom nordöstlichen, beziehungsweise südöstlichen, nordwestlichen oder südwestlichen Endpunkt. Die anderen Abbildungen, z.B. 2 und 6, zeigen jeweils das *Diagramm* des Gewirrs, also die Projektion auf die xy -Ebene.

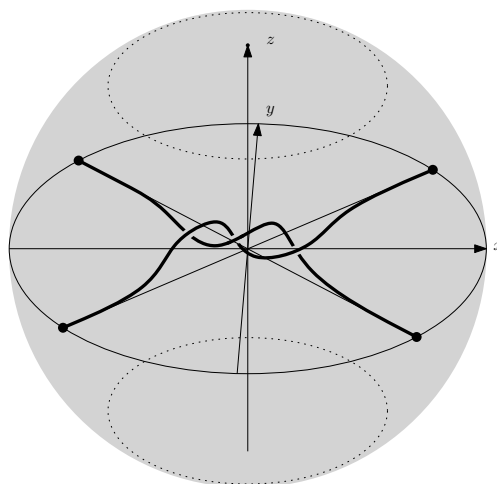


Abb. 1: Wie ein Gewirr im Raum liegt: Die Enden liegen fest auf dem Rand der Einheitssphäre in der xy -Ebene, das Gewirr liegt im Innern der Einheitskugel (in diesem Beispiel t_3).

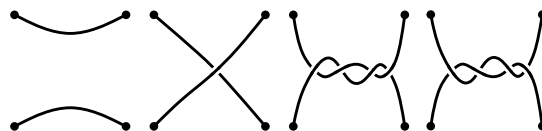


Abb. 2: Die ganzzahligen Gewirre t_0 , t_1 , t_4 und t_{-4} .

¹J. H. Conway. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pages 329–358. Pergamon, Oxford, 1970.

²J. R. Goldman and L. H. Kauffman. Rational tangles. *Advances in Applied Mathematics*, 18(3):300 – 332, 1997.

³<http://www.educ.ethz.ch/>

2 Rationale Gewirre

Zwei horizontale parallele Schnüre nennen wir das Nullgewirr t_0 . (Siehe Abb. 2, links.) Analog definieren wir t_∞ als zwei parallele vertikale Schnüre. Wir definieren *rationale Gewirre* rekursiv:

1. Das Nullgewirr ist rational.
2. Verdreht man zwei benachbarte Enden eines rationalen Gewirrs, so entsteht wieder ein rationales Gewirr.

Das heisst, ein Gewirr ist rational, wenn es aus dem Nullgewirr durch sukzessives Verdrehen von jeweils benachbarten Enden gewonnen werden kann.

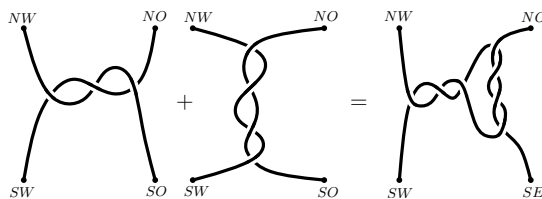


Abb. 3: Die Addition zweier Gewirre.

Aus zwei Gewirren A und B ergibt sich ein Gewirr $A + B$, indem der nordöstliche Endpunkt von A mit dem nordwestlichen von B und der südöstliche Endpunkt von A mit dem südwestlichen von B verbunden wird (siehe Abb. 3). Wir nennen das Gewirr $A + B$ die *Summe* der Gewirre A und B .

Sei a eine ganze Zahl. Das Gewirr t_a erhält man durch $|a|$ -maliges Verdrehen der beiden Schnüre des Nullgewirrs, falls a positiv ist, in die eine Richtung, falls a negativ ist, in die andere Richtung. Wir nennen t_a ein *ganzzahliges Gewirr*. In Abb. 2 sind die Gewirre t_0, t_1, t_4 und t_{-4} zu sehen.

Für das folgende Theorem erinnere man sich an die Definition von Gewirren: Gewirre liegen in der Einheitskugel, die Enden an einem festen Punkt am Rand, siehe Abb. 1. In den üblichen Bildern sieht man eigentlich die Projektion eines Gewirrs auf die xy -Ebene mit der zusätzlichen Information, welche der beiden Schnüre bei einer Kreuzung weiter oben und welche weiter unten liegt. Das Theorem ist entscheidend für das Verständnis von rationalen Gewirren. Es besagt, dass wenn man rationale Gewirre um die x - oder die y -Achse mit 180° dreht, ein äquivalentes Gewirr herauskommt. Diese Aussage ist ganz und gar nicht trivial, denn so eine Drehung ist keine Isotopie von Gewirren, da die Enden nicht fixiert bleiben. Bei einer Drehung um die x -Achse mit 180° werden zum Beispiel das nordwestliche und das südwestliche Ende sowie das nordöstliche und das südöstliche Ende vertauscht.

Theorem 1 *Ein rationales Gewirr ergibt unter einer Drehung um die x - oder y -Achse mit 180° ein äquivalentes Gewirr.*

Beweis. Wir verwenden die Tatsache, dass ein rationales Gewirr per definitionem aus einer Folge von Verdrehungen von jeweils zwei seiner Enden aus dem Nullgewirr t_0 hervorgegangen ist. Wir verwenden Induktion über der Anzahl solcher Verdrehungsschritte. Wir bezeichnen das Gewirr, das aus A durch eine 180° -Drehung um die x -Achse entsteht, mit A^x und das Gewirr, das aus einer 180° -Drehung um die y -Achse entsteht, mit A^y . Die Behauptung gilt offensichtlich für t_0 : Eine Drehung um die x - oder y -Achse überführt das Nullgewirr in sich. Ebenso lässt sich einfach nachprüfen, dass t_k für $k \in \mathbb{Z}$ durch solche Drehungen in sich überführt wird, also $t_k^x \equiv t_k \equiv t_k^y$.

Sei nun A ein beliebiges rationales Gewirr. Wir betrachten zuerst den Fall, dass A aus einem rationalen Gewirr B und einer Verdrehung des nordöstlichen Endes NO und des südöstlichen Endes SO zustande gekommen ist. Das heisst, $A \equiv B + t_a$ für eine ganze Zahl a . Natürlich sei B derart, dass es durch weniger einzelne Verdrehungsschritte gebildet werden kann, so dass die Induktionshypothese auf B anwendbar ist.

Nun gilt $A^x \equiv (B + t_a)^x \equiv B^x + t_a^x \equiv B + t_a \equiv A$. Dabei haben wir neben der Induktionshypothese $B^x \equiv B$ die einfache Beobachtung verwendet, dass für beliebige Gewirre G_1 und G_2 die Gleichung $(G_1 + G_2)^x \equiv G_1^x + G_2^x$ gilt.

Die Äquivalenz unter einer Drehung um die y -Achse ergibt sich aus $A^y \equiv (B + t_a)^y \equiv t_a^y + B^y \equiv t_a + B \equiv B + t_a$, wobei sich die letzte Gleichung aus folgender Beobachtung ergibt: Um von $t_a + B$ zu $B + t_a$ zu gelangen, drehe man B genau $(-a)$ -mal um die x -Achse. Dadurch wird t_a auf der westlichen Seite entwunden und dafür auf der östlichen Seite gebildet; B bleibt unter Drehung um die x -Achse äquivalent. Da sich diese Drehung nun *innerhalb* des Gewirrs (genauer gesagt innerhalb der Einheitskugel) abspielt, die Enden aber fixiert bleiben, handelt es sich um eine Isotopie von Gewirren.

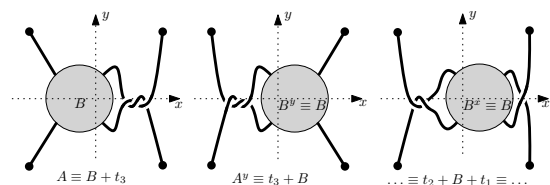


Abb. 4: Indem man B innerhalb des Gewirrs A^y um die x -Achse dreht, kann man das t_a in der Summe von “links nach rechts transportieren”.

Ebenso zeigen wir $(t_a + B)^x \equiv t_a + B$ und $(t_a + B)^y \equiv t_a + B$. Dies beweist die Behauptung für den Fall, dass der letzte Schritt in der Bildung von A ein Verdrehen der beiden westlichen Enden war.

Wir betrachten nun den Fall, dass A aus B und einer Verdrehung seiner beiden südlichen (oder

nördlichen) Enden SW und SO entstanden ist. Im wesentlichen lässt sich dieser Fall gleich wie der obige behandeln, aber nun fehlt uns leider die griffige Summennotation, die uns das Aufschreiben im ersten Fall erleichtert hat. Die Äquivalenz unter einer Drehung um die y -Achse folgt wieder direkt aus der Induktionshypothese für B und daraus, dass auch das vertikale Analagon von t_a von einer Drehung um die x - oder y -Achse in sich überführt wird. Für die Äquivalenz $A^x \equiv A$ siehe Abb. 5. \square

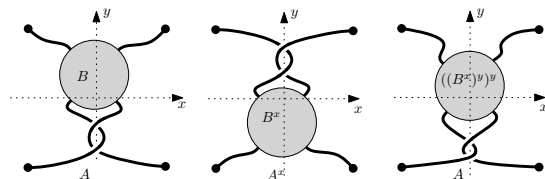


Abb. 5: Ein rationales Gewirr A , das aus einem einfacheren Gewirr B und einer Verdrehung der südlichen Enden entstanden ist, wird von einer Drehung um die x -Achse in sich überführt.

Korollar 2 Für ein beliebiges rationales Gewirr B gilt $t_a + B \equiv B + t_a$.

Theorem 3 Jedes rationale Gewirr kann aus dem Nullgewirr gebildet werden, indem man abwechselungsweise die beiden westlichen und die beiden südlichen Endpunkte verdrillt. Anders gesagt: Jedes rationale Gewirr lässt sich auf diese Art zum Nullgewirr auflösen.

Beweis. Ein rationales Gewirr ist nach Definition aus einer Folge von Verdrehung von benachbarten Enden gebildet. Nach Korollar 2 kann jede Verdrehung der östlichen Enden auch als Verdrehung der westlichen Enden aufgefasst werden. Weiter gilt für die Verdrehung der nördlichen oder südlichen Enden eine Aussage analog zu Korollar 2: Eine Verdrehung der nördlichen Enden kann durch Drehen des inneren Teils des Gewirrs (als durch eine Isotopie von Gewirren) auf die südliche Seite transportiert werden, siehe Abb. 5, rechter Teil. \square

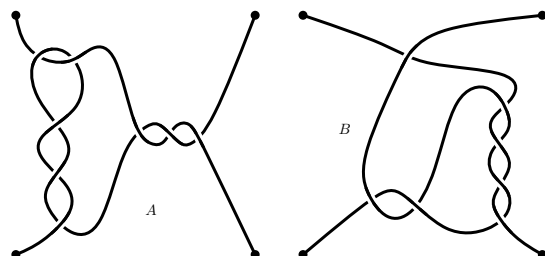


Abb. 6: Zwei rationale Gewirre

Zu einem rationalen Gewirr A definieren wir das *negative Gewirr* $-A$ als das Spiegelbild von A bei

einer Spiegelung an der xy -Ebene. Aus einem Diagramm von A erhalten wir also ein Diagramm von $-A$, indem wir alle Überkreuzungen in Unterkreuzungen verwandeln und umgekehrt, siehe Abb. 7. Für zwei rationale Gewirre A und B schreiben wir kurz $A - B := A + (-B)$.

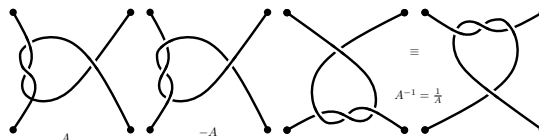


Abb. 7: Das Negative und das Inverse eines rationalen Gewirrs A . Zur Bildung von A^{-1} kann sowohl im Uhrzeigersinn als auch im Gegenuhrzeigersinn gedreht werden: Die beiden resultierenden Gewirre sind äquivalent.

Zu einem Gewirr A definiert man das *inverse Gewirr* A^{-1} oder $1/A$, indem man das Gewirr an der xy -Ebene spiegelt (das heisst $-A$ bildet) und dann mit 90° im Gegenuhrzeigersinn um die z -Achse dreht. Wir bemerken, dass es nach Theorem 1 keine Rolle spielt, ob man obiger Definition des inversen Gewirrs im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn um die z -Achse dreht: Das eine unterscheidet sich vom anderen in einer 180° -Drehung um die x - verknüpft mit einer 180° -Drehung um die y -Achse. Gemäss Theorem 1 ergibt sich also ein äquivalentes Gewirr. Siehe Abb. 7. Im folgenden werden wir, je nach dem was für uns gerade günstiger ist, beim Invertieren eines Gewirrs manchmal im Uhrzeigersinn und manchmal im Gegenuhrzeigersinn drehen.

An dieser Stelle liegt die Versuchung nahe zu glauben, man könne mit rationalen Gewirren rechnen wie mit rationalen Zahlen. Aber man beachte, dass es keine natürliche Art gibt, eine Multiplikation auf den rationalen Gewirren einzuführen, so dass A^{-1} das multiplikative Inverse von A ist. Ausserdem ist die Summe zweier rationaler Gewirre im allgemeinen nicht rational. Nur für die ganzzahligen Gewirre $\{\dots, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots\}$ gilt, dass die Addition und Negation von Gewirren der Addition und Negation der entsprechenden ganzen Zahlen entspricht.

2.1 Kettenbrüche

Kettenbrüche spielen in der klassischen Mathematik eine grosse Rolle. So verwendete zum Beispiel Johann Heinrich Lambert Kettenbrüche um zu beweisen, dass die Kreiszahl π irrational ist.⁴

⁴J. H. Lambert. Mémoires sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes, circulaires et logarithmiques. *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin*, pages 265–322, 1768.

Grundsätzlich nennt man jeden Ausdruck der Form

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{\dots}}}$$

Kettenbruch, wobei $a_0, b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, \dots$ ganze Zahlen sind. Ein Kettenbruch heisst *regulär*, wenn jeder Zähler gleich 1 ist und bis auf die allererste Zahl nur positive Zahlen vorkommen. Das heisst, $b_1 = b_2 = b_3 = \dots = 1$ und $a_1, a_2, a_3, \dots > 0$.

Lemma 4 Jedes $x \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig als endlicher regulärer Kettenbruch schreiben.

Beweis. Hinter dem Beweis steckt der Euklidische Algorithmus, also sukzessives Teilen mit Rest. Zuerst schreiben wir x (auf eindeutige Weise) als gemischten Bruch, also $x = a_0 + \frac{p}{q}$, wobei $p < q$ und p, q positive und teilerfremde ganze Zahlen sind. Weiter sei $q = a_1 p + r_1$, wobei $a > 0$ und $r_1 \geq 0$ ganze Zahlen sind und $r_1 < p$. Dann schreiben wir

$$x = a_0 + \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{p}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{p}}.$$

Nun können wir wiederum p “mit Rest durch r_1 teilen” und erhalten $p = a_2 r_1 + r_2$, also

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{p}{r_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}}}.$$

Auf diese Weise fahren wir dem Euklidischen Algorithmus folgend fort, der, wie wir wissen, nach endlich vielen Schritten abbricht. \square

2.2 Kettenbrüche aus Gewirren

Mit der Definition von inversen Gewirren lässt sich Theorem 3 so formulieren: Jedes rationale Gewirr kann als Kettenbruch von Gewirren der Form t_a geschrieben werden. Denn eine Verdrehung der westlichen Enden von B lässt sich als $t_a + B$ schreiben für ein geeignetes $a \in \mathbb{Z}$ und eine Verdrehung der südlichen Enden von B als

$$(t_a + B^{-1})^{-1} = \frac{1}{t_a + \frac{1}{B}}$$

für ein geeignetes $a \in \mathbb{Z}$, siehe Abb. 8.

Aus diesen Regeln und Theorem 3 erhalten wir für jedes rationale Gewirr einen “Kettenbruch von ganzzahligen Gewirren”. Zum Beispiel gilt für das Gewirr A in Abb. 6

$$A \equiv t_{-3} + \frac{1}{t_3 + \frac{1}{t_2}}$$

und für das andere Gewirr

$$B \equiv \frac{1}{t_1 + \frac{1}{t_{-2} + \frac{1}{t_{-4}}}}.$$

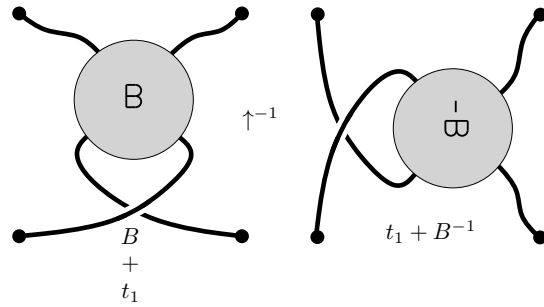


Abb. 8: Mit der Inversion lässt sich eine “vertikale” in eine “horizontale” Summe umschreiben.

Wenn wir nun diesen Kettenbruch als Zahl lesen, das heisst, jedes ganzzahlige Gewirr t_a durch die Zahl a ersetzen, dann erhalten wir für jedes rationale Gewirr G eine Zahl $F(G)$. Zum Beispiel wird dem Gewirr A die Zahl

$$F(A) = -3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = -\frac{19}{7}$$

zugeordnet und dem Gewirr B

$$F(B) = \frac{1}{1 + \frac{1}{-2 + \frac{1}{4}}} = -\frac{4}{5}.$$

Formal definieren wir $F(A)$, indem wir einem rationalen Gewirr A rekursiv eine Zahl $F(A)$ zuordnen:

- Es gelte $F(t_0) = 0$.
- Falls $A = t_a + B$, so gelte $F(A) = a + F(B)$.
- Falls $A = B^{-1}$ und $F(B) \neq 0$, so gelte $F(A) = 1/F(B)$; falls $A = B^{-1}$ und $F(B) = 0$, so gelte $F(A) = \infty$.

In Theorem 3 war nicht von Eindeutigkeit der Folge von Verdrehungen die Rede. Im Moment ist also formal gesehen F noch keine wohldefinierte Abbildung von den Äquivalenzklasse der rationalen Gewirre in die rationalen Zahlen mit ∞ , sondern es wird lediglich jedem rationalen Gewirr A eine Zahl zugeordnet, die von der Folge von Verdrehungen abhängt, als die A gegeben ist. (Und falls A nicht als so eine Folge gegeben ist, sondern zum Beispiel einfach als Diagramm, so ist unklar, wie sich $F(A)$ berechnen liesse.) Wir werden erst im nächsten Abschnitt beweisen, dass für äquivalente rationale Gewirre A und B die Brüche $F(A)$ und $F(B)$ gleich sind. Aber wir sind nun soweit, die erste Richtung von Conways Hauptsatz beweisen zu können:

Theorem 5 Wenn zwei rationale Gewirre A und B die gleiche rationale Zahl $F(A) = F(B)$ ergeben, so sind sie äquivalent.

Beweis. Es sei A ein rationales Gewirr. Gemäss Theorem 3 können wir A als Kettenbruch von ganzzahligen Gewirren schreiben. Dieser Kettenbruch

von Gewirren entspricht aber nicht unbedingt einem regulären Kettenbruch, da einige der a_i in den t_{a_i} negativ sein können. Wir zeigen nun, dass A äquivalent ist zu einem rationalen Gewirr A' , in dessen Kettenbruchentwicklung alle Zahlen positiv sind. Ein allgemeiner Kettenbruch lässt sich mit

$$a - \frac{1}{b} = a - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b-1}}$$

in einen regulären verwandeln. Ebenso gilt für rationale Gewirre A und B

$$A - \frac{1}{B} \equiv A - t_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{B-t_1}},$$

wie in Abb. 9 bewiesen wird. Ausserdem gilt $1/(-B) \equiv -1/B$ und $1/(1/B) \equiv B$. Mit Hilfe dieser Regeln sowie der Rechenregeln für ganzzahlige Gewirre (sie verhalten sich wie ganze Zahlen) können wir alle negativen Koeffizienten der ganzzahligen Gewirre eliminieren bis auf ein allfälliges negatives Vorzeichen vor dem ersten ganzzahligen Gewirr in der Kettenbruchentwicklung. Mit der Eindeutigkeit der regulären Kettenbruchentwicklung folgt, dass jeder Knoten A mit $F(A) = p/q$ zum gleichen Knoten A' äquivalent ist. \square

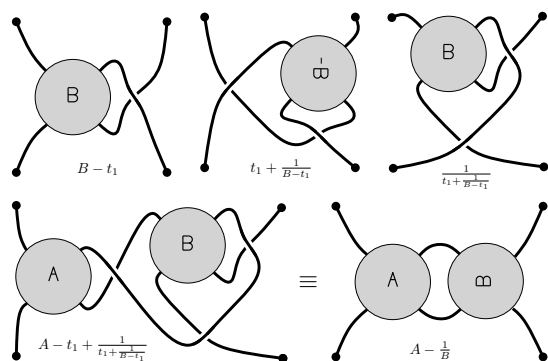


Abb. 9: Die analoge Rechenregel für Gewirre.

3 Eine Invariante für Gewirre

In diesem Abschnitt definieren wir eine Invariante für allgemeine Gewirre, die so genannte *Leitfähigkeit* mit Hilfe des *Klammerpolynoms*. Es stellt sich heraus, dass diese Invariante für rationale Gewirre A mit dem Bruch $F(A)$ übereinstimmt, was die andere Richtung des Hauptsatzes impliziert.

3.1 Das Klammerpolynom

Das Klammerpolynom (auf Englisch *bracket polynomial* oder *Kauffman bracket*) spielt in der Knotentheorie eine wichtige Rolle. Dort wird es als Zwischenschritt zur Definition des *Jones Polynoms* und

anderer Knoteninvarianten verwendet. Das Klammerpolynom selber ist aber keine Knoteninvariante, vielmehr wird es für Diagramme von Knoten oder allgemeiner Verschlingungen definiert. Es ist nicht wohldefiniert für Knoten, sondern es hängt von der Art und Weise ab, wie der Knoten gezeichnet ist.

Zu einem Diagramm D eines Knotens oder eines Gewirrs definieren wir das *Klammerpolynom* $\langle D \rangle$ durch die folgenden *Klammerregeln*:

1. $\langle t_1 \rangle = x \langle t_\infty \rangle + x^{-1} \langle t_0 \rangle$,
2. $\langle t_{-1} \rangle = x^{-1} \langle t_\infty \rangle + x \langle t_0 \rangle$,
3. $\langle O \sqcup D \rangle = (-x^{-2} - x^2) \langle D \rangle$,
4. $\langle O \rangle = 1$,

wobei O für das Diagramm des trivialen Knotens steht und $O \sqcup D$ für die disjunkte Vereinigung von O und D . Die ersten zwei Regeln sind so zu verstehen, dass sie auch angewendet werden dürfen, wenn t_1 bzw. t_{-1} innerhalb eines komplizierteren Diagramms vorkommen, siehe Abb. 10.

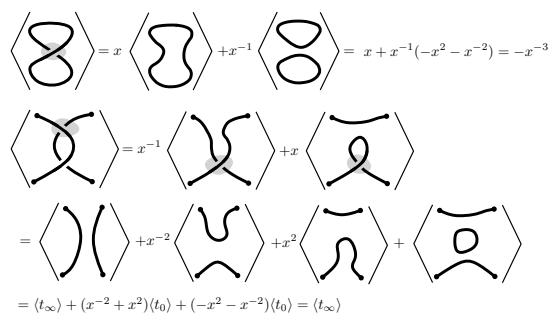


Abb. 10: Das Klammerpolynom eines Knoten und die Auflösung eines Gewirrs bis auf $\langle t_\infty \rangle$ und $\langle t_0 \rangle$.

Mit diesen Regeln lassen sich nun Diagramme von Knoten vollständig in ein Laurentpolynom in $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ verwandeln, und Gewirre lassen sich bis auf $\langle t_\infty \rangle$ und $\langle t_0 \rangle$ auflösen.

Leider ist das Klammerpolynom keine Invariante von Knoten, wie wir der ersten Zeile von Abb. 10 ansehen. Dort löst sich ein spezielles Diagramm D des Unknotens zu $-x^{-3}$ auf, aber für das gewöhnliche Diagramm O des Unknotens gilt nach den Klammerregeln $\langle O \rangle = 1$. Ganz allgemein stellen wir fest, dass eine Reidemeisterbewegung vom Typ I, je nachdem es sich um eine t_1 - oder eine t_{-1} -Kreuzung handelt, die durch die Reidemeisterbewegung verschwindet, einen zusätzlichen Faktor $-x^{-3}$ bzw. $-x^3$ bewirkt. Aber unter Reidemeisterbewegungen vom Typ II und III ist das Klammerpolynom tatsächlich invariant. Den Nachweis überlassen wir dem motivierten Leser als Übung.

Beobachtung 6 *Es seien D und D' Diagramme, so dass sich D durch Reidemeisterbewegungen in*

D' überführen lässt. Dann gilt $\langle D \rangle = (-x)^{3k} \langle D' \rangle$ für eine ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$.

3.2 Die Leitfähigkeit

Sei D das Diagramm eines Gewirrs und $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$, so dass $\langle D \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$. Wir definieren die gebrochenrationale Funktion $R_D(x) := \alpha(x)/\beta(x)$.

Theorem 7 $R_D(x)$ ist invariant unter Reidemeisterbewegungen im Diagramm D .

Beweis. Es seien D und D' Diagramme von äquivalenten Gewirren, $\langle D \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$ und $\langle D' \rangle = \alpha'(x)\langle t_\infty \rangle + \beta'(x)\langle t_0 \rangle$. Es gilt $\langle D \rangle = (-x)^{3k} \langle D' \rangle$ für eine ganze Zahl k , also

$$\begin{aligned} \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle &= (-x)^{3k} \alpha'(x)\langle t_\infty \rangle + (-x)^{3k} \beta'(x)\langle t_0 \rangle. \end{aligned}$$

Daraus schliessen wir

$$R_D(x) = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{(-x)^{3k} \alpha'(x)}{(-x)^{3k} \beta'(x)} = \frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)} = R_{D'}(x),$$

was zeigt, dass R_D nicht von der Wahl des Diagramms D abhängt, sondern für alle Diagramme, die ein äquivalentes Gewirr darstellen, gleich ist. \square

Wir definieren für (allgemeine) Gewirre G die rationale Funktion $R_G(x) := R_D(x)$, wobei D irgendein Diagramm von G ist. Nach obigem Theorem ist die Definition unabhängig von der Wahl von D und damit R_G eine Invariante von allgemeinen Gewirren. Der letzte Schritt ist nun, x durch eine Zahl zu ersetzen. Ganz gleich, welche Zahl wir wählen, wird immer eine Invariante von Gewirren resultieren. Es stellt sich heraus, dass wenn wir x durch \sqrt{i} substituieren und das ganze zusätzlich mit $-i$ multiplizieren, für rationale Gewirre A genau die wohl bekannte Zahl $F(A)$ herauskommt. (i bezeichnet hier wie gewöhnliche die imaginäre Einheit, es gilt also $i^2 = -1$.) Zu einem Gewirr G definieren wir die *Leitfähigkeit* $C(G) := -iR_G(\sqrt{i})$.

Theorem 8 Für rationale G gilt $C(G) = F(G)$.

Beweis. Man prüfe nach, dass $F(t_0) = 0 = C(t_0)$, $F(t_\infty) = \infty = C(t_\infty)$, $F(t_1) = 1 = C(t_1)$ und $F(t_{-1}) = -1 = C(t_{-1})$. Nach Theorem 3 und den nachfolgenden Überlegungen lässt sich jedes rationale Gewirr mit Hilfe dieser ganzzahligen Gewirre und der Addition und Inversenbildung von Gewirren schreiben. Es genügt also zu zeigen, dass für rationale Gewirre A und B die folgenden Beziehungen gelten: $C(A^{-1}) = 1/C(A)$ und $C(A+B) = C(A) + C(B)$.

Wir zeigen zuerst, dass $C(A+B) = C(A) + C(B)$ gilt. (Für den Beweis brauchen wir übrigens gar nie die Rationalität von A und B ; tatsächlich gilt

die Beziehung auch für allgemeine Gewirre.) Es gelte $\langle D_A \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$ und $\langle D_B \rangle = \gamma(x)\langle t_\infty \rangle + \delta(x)\langle t_0 \rangle$, wobei D_A ein Diagramm von A , D_B ein Diagramm von B und D_{A+B} ein entsprechendes Diagramm von $A+B$ sei. Damit gilt (siehe Abb. 11):

$$\begin{aligned} \langle D_{A+B} \rangle &= \alpha(x)\gamma(x)(-x^2 - x^{-2})\langle t_\infty \rangle \\ &\quad + (\alpha(x)\delta(x) + \beta(x)\gamma(x))\langle t_\infty \rangle \\ &\quad + \beta(x)\delta(x)\langle t_0 \rangle. \end{aligned}$$

Nun berechnet sich die Leitfähigkeit von $A+B$ unter Verwendung der Regel $i^{-1} = -i$ folgendermassen:

$$\begin{aligned} C(A+B) &= -iR_{A+B}(\sqrt{i}) \\ &= -i \frac{\alpha(\sqrt{i})\gamma(\sqrt{i})(-i-i^{-1}) + (\alpha(\sqrt{i})\delta(\sqrt{i}) + \beta(\sqrt{i})\gamma(\sqrt{i}))}{\beta(\sqrt{i})\delta(\sqrt{i})} \\ &= -i \frac{\alpha(\sqrt{i})}{\beta(\sqrt{i})} - i \frac{\gamma(\sqrt{i})}{\delta(\sqrt{i})} \\ &= -iR_A(\sqrt{i}) - iR_B(\sqrt{i}) = C(A) + C(B). \end{aligned}$$

Als zweites zeigen wir, dass für allgemeine Gewirre $C(A^{-1}) = 1/C(A)$ gilt, wobei \bar{z} die komplex Konjugierte einer komplexen Zahl z bezeichne. Da für rationale Gewirre A die Leitfähigkeit $C(A)$ reell ist, gilt für rationale Gewirre $C(A^{-1}) = 1/C(A)$. Sei D ein Diagramm von A , $\langle D \rangle = \alpha(x)\langle t_\infty \rangle + \beta(x)\langle t_0 \rangle$. Nun sei D' das entsprechende Diagramm von A^{-1} : Das Drehen bei der Inversenbildung bewirkt ein Vertauschen von t_0 und t_∞ in D , das Spiegeln an der xy -Ebenen (Ober- werden zu Unterkreuzungen und umgekehrt) bewirkt eine Substitution $x \mapsto x^{-1}$, also erhalten wir

$$\langle D' \rangle = \alpha(x^{-1})\langle t_0 \rangle + \beta(x^{-1})\langle t_\infty \rangle.$$

Da $(\sqrt{i})^{-1} = \overline{\sqrt{i}}$ gilt nun

$$\begin{aligned} C(A^{-1}) &= -iR_{A^{-1}}(\sqrt{i}) = -i \frac{\beta(\overline{\sqrt{i}})}{\alpha(\overline{\sqrt{i}})} \\ &= \frac{i \frac{\beta(\overline{\sqrt{i}})}{\alpha(\overline{\sqrt{i}})}}{\left(-i \frac{\alpha(\overline{\sqrt{i}})}{\beta(\overline{\sqrt{i}})}\right)^{-1}} = \frac{1}{C(A)^{-1}}. \quad \square \end{aligned}$$

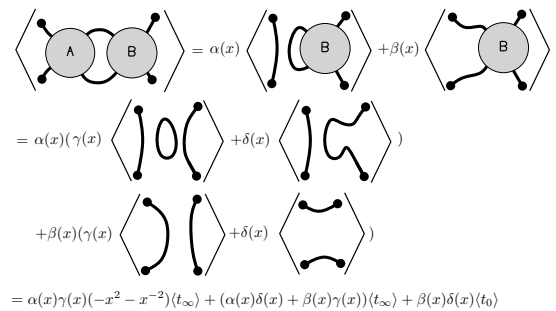


Abb. 11: Das Klammerpolynom einer Summe.

Wir haben gezeigt, dass $C(G)$ für allgemeine Gewirre eine Invariante ist, also ist insbesondere $F(G) = C(G)$ eine Invariante für rationale Gewirre.

Facettenreiche Mathematik *Einblicke in die aktuelle mathematische Forschung für alle, die mehr von Mathematik verstehen wollen*, Katrin Wendland/Annette Werner (Hrsg.), 469 Seiten, Vieweg und Teubner, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2011, ISBN 978-3-8348-1414-2

Was sind elliptische Kurven und wie kann man ihre Eigenschaften in der modernen Verschlüsselungstheorie verwenden ... wie dicht sind dichteste Kugelpackungen in n-dimensionalen Räumen und was hat die Frage mit Codierungstheorie zu tun ... wie benützt man Graphen für die Erstellung von Spielplänen von Sportligen ... ? Das sind einige der vielen Stationen einer Sightseeing Tour durch die moderne Mathematik, auf die 25 Mathematikerinnen, alle aus dem deutschsprachigen Raum stammend, den Leser mitnehmen. In 22 Beiträgen, die sich an *mathematisch interessierte Leserinnen und Leser, Schüler und Schülerinnen der Oberstufe, Mathematiklehrerinnen und -lehrer, Studierende der Mathematik* richten, geben sie einen Einblick in ihr Forschungsgebiet. Die Reise führt an ganz unterschiedlichen Themen reiner und angewandter Mathematik heran. Es locken Überschriften wie „Mathematisches Potpourri rund ums Einsteigen ins Flugzeug“ (es geht um Warteschlangen und Young-Tableaus), „Mathematiker spinnen?! - Asymptotische Modellierung“ (gemeint sind Spinnprozesse von Glaswolle, für die mathematische Modelle der Kontinuumsmechanik benützt werden) oder „Wo Symmetrie ist, da ist eine Gruppe nicht weit“. Man kann jüngere und ganz junge Gebiete der Mathematik kennenlernen, wie im Beitrag über die Geometrie von Arrangements, wo gezeigt wird, wie sich schwierige geometrische Abzählprobleme elegant lösen lassen, wie im Crashkurs zu Clusteralgebren oder wie in der Kurzpräsentation der tropischen Geometrie, in der sogenannte Schatten von algebraischen Kurven betrachtet werden (relativ einfache Gebilde, an denen sich gewisse Eigenschaften der betreffenden algebraischen Kurve noch ablesen lassen). Man trifft aber auch auf klassische Themen wie Approximation von Funktionen oder Symmetrien von Differentialgleichungen.

Das Buch, das in der Reihe *Populär* des Vieweg-Verlags erschienen ist, möchte auch mathematisch nicht geschulten Lesern zeigen, wie interessant, vielfältig und bedeutungsvoll Mathematik und die moderne mathematische Forschung sind, und dazu motivieren, sich intensiver mit Mathematik zu befassen. Dieses anspruchsvolle Vorhaben gelingt den Autorinnen, die ihre Texte mit didaktischem Gespür und grosser Sorgfalt verfasst haben, in erstaunlichem Mass. Im Vorwort, das ein sympathisches Plädoyer für die Mathematik enthält und geschickt in die nachfolgenden Texte einführt, wird der Leser aufgefordert, sich mit Papier und Bleistift und einer guten Portion Hartnäckigkeit mit den Problemstellungen auseinander zu setzen. Diese werden in den Beiträgen so eingeführt, dass sie nur gymnasiales Schulwissen voraussetzen. Wenn dann neue Begriffe definiert, Rechnungen und Beweise durchgeführt werden, wird es oft recht anspruchsvoll für Leser ohne Erfahrung mit mathematischen Texten. Begabten und wissbegierigen Schülern und Schülerinnen kann dies aber auch eine schöne Herausforderung bieten. Manche Abschnitte verlangen mehr mathematische Vorkenntnisse, worauf der Leser jeweils hingewiesen wird. Auf dem knappen Raum von rund 20 Seiten kann ein Thema natürlich nicht allzu tief behandelt werden, aber die Autorinnen bemühen sich, die Grundideen sichtbar zu machen, geben Querverweise auf andere Beiträge des Bandes und kommentieren die sorgfältig ausgewählten Literaturangaben zum Weiterlesen. Auch der Schluss des Buches ist schön gestaltet mit Fotos und Angaben zum Werdegang aller Autorinnen.

Für Mathematiklehrerinnen und -lehrer bietet das Buch einerseits eine schöne Möglichkeit zur Horizonterweiterung und andererseits eine Fülle von Anregungen für den Unterricht. Die Texte sind zwar nicht direkt im Unterricht einsetzbar, manche eignen sich aber ausgezeichnet für eine weitere didaktische Ausarbeitung oder als Anregung für eine Maturarbeit. Und schliesslich zeigt das Buch, dass auch Frauen herausragende mathematische Leistungen erbringen können, was nach wie vor eine wichtige Botschaft im Gymnasium ist.

Kristine Barro-Bergflödt, ETHZ und Kantonsschule Freudenberg

Ein Einblick ins EU-Projekt FIBONACCI: Die allgemeine arithmetische Folge k -ter Ordnung

Peter Gallin, Universität Zürich

Auf Einladung der Universität Bayreuth (Deutschland) hat die Schweiz die Gelegenheit, am EU-Projekt FIBONACCI teilzunehmen, welches von Anfang Januar 2010 bis Ende Februar 2013 dauert. Über die Adresse „<http://www.fibonacci-project.eu>“ kann man sich weiter informieren. Das Projekt hat sich zum Ziel gesetzt, den Unterricht in Naturwissenschaft und Mathematik auf allen Schulstufen zu vertiefen, ohne die bestehenden Schulstrukturen in den einzelnen Ländern zu verändern. Der auf Englisch verfasste Auftrag lautet: „Large scale dissemination of inquiry-based science and mathematics education (IBSME)“. Die Universität Zürich (insbesondere das Institut für Gymnasial- und Berufspädagogik), welche die Schweiz im Projekt vertritt, kann sich als sogenanntes „Twin Center 1“ auf die Universität Augsburg als „Reference Center“ beziehen und so von den Erfahrungen aus ähnlichen Projekten in Deutschland profitieren. Dabei haben sich beide Institutionen auf den Mathematikunterricht in der Primar- und Sekundarstufe beschränkt. In deutscher Übersetzung des Auftrags ist also unser Ziel die Verbreitung eines **forschungsorientierten Mathematikunterrichts** (so unsere Übersetzung von „inquiry-based mathematics education“) in der Primar- und Sekundarschule sowie im Gymnasium.



DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE
AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

SUPPORTED BY



Als „Twin Center 1“ beteiligt sich die Schweiz mit der Arbeit in rund 40 Schulklassen aus dem Umfeld von Zürich während der beiden Schuljahre 2010/11 und 2011/12. Die übrig bleibenden Randzeiten dienen der Vor- und Nachbereitung des Projekts. An einem ersten Informationstreffen im Sommer 2010 wurden die Grundzüge eines forschungsorientierten Mathematikunterrichts allen beteiligten Lehrpersonen dargelegt. Ohne weitere Theorien haben die Lehrkräfte mit kleinen Schritten erste Versuche gemacht und tauschen nun ihre Erfahrungen an verschiedenen stufen- oder schulgebundenen Treffen aus. Die Projektleitung berät sie auch, wenn sie weiteren Kolleginnen und Kollegen helfen wollen, deren Unterricht forschungsorientiert umzugestalten. Auf diese Weise soll sich die Verbreitung (Dissemination) — idealistisch gedacht — so rasant gestalten wie die Vermehrung der Kaninchen bei Fibonacci. Alle Aktivitäten sind eng an den täglichen Unterricht und den vorgegebenen Lehrplanstoff gebunden und unterstützen direkt die Unterrichtsvorbereitung wie auch die Unterrichtsevaluation, so dass der Gesamtaufwand für das Projekt nicht höher sein soll als das Unterrichten zusammen mit der üblichen beruflichen Weiterbildung.

Hier eine knappe Übersicht über die vier Hauptetappen eines forschungsorientierten Mathematikunterrichts als Gleichgewicht von Angebot der Lehrperson und Nutzung der Lernenden:

- Die Schülerinnen und Schüler erhalten Problemstellungen, die mit dem Lehrplanstoff eng verbunden sind und eigene Denkwege zulassen. (Erstes Angebot)
- Die Schülerinnen und Schüler protokollieren ihre Überlegungen, Versuche und Ergebnisse in einem Forschungsjournal. (Erste Nutzung)
- Die Lehrperson organisiert den Austausch unter den forschenden Lernenden und gibt gezielte Rückmeldungen zu beachtenswerten Einsichten. (Zweiters Angebot)
- Die Lehrperson stellt einerseits die interessanten und andererseits die weiterführenden Resultate für alle Lernenden zusammen. (Zweite Nutzung)

Dass bei solchem Vorgehen immer wieder Überraschendes auch für die Lehrperson auftaucht, möge das folgende Beispiel aus dem Unterricht von Bruno Lustenberger an der Kantonsschule Glattal in Dübendorf zeigen. In der Klasse MN5 (Schwerpunkt Mathematik und Physik) sind die arithmetischen und geometrischen Folgen bekannt. Schauen wir nun, wie sich die vier Etappen des forschungsorientierten Unterrichts im November 2011 konkret abgespielt haben.

Erstes Angebot: Der Forschungsauftrag

- Versuchen Sie, mindestens einen weiteren Typ von Folgen zu definieren, und untersuchen Sie die Folgen von diesem Typ.
- Geben Sie wenn möglich die rekursiven und expliziten Formeln an.
- Machen Sie auch einige Beispiele von solchen Folgen.

Erste Nutzung: Einblick ins Journal von Abdullah, Ceren und Kevin

Stellvertretend für die zum Teil interessanten Vorschläge der Gruppen soll hier die Arbeit der drei Schüler Abdullah, Ceren und Kevin näher beleuchtet werden. Einleitend schreiben sie: „Bisher war es so, dass von Glied zu Glied entweder um einen festen Wert oder mit einem festen Faktor erhöht wurde. Idee: Wir nehmen das ‚fest‘ weg. Wenn wir dies machen, bildet die ‚Differenz‘ der Glieder selbst wieder eine [arithmetische] Folge.“ Nun betrachten sie die Folge 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, ... deren Differenzenfolge die natürlichen Zahlen sind. Da sie die Formel für die Summe der natürlichen Zahlen kennen, folgern sie sofort, dass die explite Darstellung $a_n = a_1 + \frac{n(n-1)}{2}$ heissen muss. Nach einem nicht ganz geglückten zweiten Beispiel — nämlich der Folge der Quadratzahlen — und um nicht von Zufälligkeiten abgelenkt zu werden, wenden sie sich einer Folge zu, deren Glieder und Differenzen grössere Zahlen sind:

Folglied	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...
Werte	8	83	176	287	416	563	728	911	...
1. Differenzenfolge	75	93	111	129	147	165	183	...	
2. Differenzenfolge	18	18	18	18	18	18	...		

Geschickt untersuchen sie, wie sich $a_5 = 416$ aus a_1 , der Startzahl 75 der 1. Differenzenfolge und der Startzahl 18 der 2. Differenzenfolge zusammensetzt:

$$a_5 = 416 = 8 + 75 + \overbrace{75 + 18}^{93} + \overbrace{75 + 18 + 18}^{111} + \overbrace{75 + 18 + 18 + 18}^{129}$$

Sie erkennen die Struktur $a_5 = 8 + 75 \cdot (5 - 1) + 18 \cdot \frac{(5-1)(5-2)}{2}$, führen die Parameter $d = 75$ und $e = 18$ ein und schreiben sofort die allgemeine Form hin:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) + e \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)}{2}$$

Beflügelt vom Erfolg wagen sie eine (vorerst noch falsche) Prognose für eine nächste Stufe, nämlich einer Folge, bei der erst die 3. Differenzenfolge konstant ist:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) + e \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} + f \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 3)}{3}$$

Als Beispiel wählen sie die folgende neue Folge:

Folgglieder	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
Werte	87	93	113	155	227	337	...
1. Differenzenfolge	6	20	42	72	110	...	
2. Differenzenfolge	14	22	30	38	...		
3. Differenzenfolge	8	8	8	...			

Wieder wenden sie ihre Methode der Rückführung auf die ersten Folgglieder an und untersuchen $a_5 = 227$:

$$a_5 = 227 = 87 + 6 + \overbrace{6 + 14}^{20} + 6 + 14 + \overbrace{14 + 8}^{22} + 6 + 14 + \overbrace{14 + 8}^{22} + \overbrace{14 + 8 + 8}^{30}$$

Nur bei der Anzahl Summanden 8 sind sie unsicher und schreiben:

$a_5 = 227 = 87 + 6(5-1) + 14 \cdot \frac{(5-1)(5-2)}{2} + 8 \cdot \text{Term}$, wobei sie sich für den Term eine Auswahl angeben: $T_1 = \frac{(n-1)(n-3)}{2}$, $T_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{3}$; $T_3 = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$. So merken sie, dass T_3 der richtige ist, führen wiederum die Parameter $d = 6$, $e = 14$ und $f = 8$ ein und notieren die allgemeine und jetzt korrekte Formel

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) + e \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} + f \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 3)}{2 \cdot 3} .$$

Nun kann sie nichts mehr bremsen. Eine arithmetische Folge 4. Ordnung — den Namen kennen sie natürlich noch nicht — testen sie erfolgreich mit der Formel

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1) + e \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} + f \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 3)}{2 \cdot 3} + g \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)}{2 \cdot 3 \cdot 4} .$$

Zweites Angebot: Fachliche Reflexion und Beweis des Lehrers

Beim Forschen zum Thema „selbstgefertigte Folgen“ haben die Schüler ein Bauprinzip für die allgemeine arithmetische Folge k -ter Ordnung gefunden, das vermutlich nicht sehr bekannt ist. Jedenfalls musste sich der Lehrer hinsetzen und die Behauptungen nachprüfen. Abdullah, Ceren und Kevin behaupten:

$$a_n = a_1 + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{i!} \prod_{j=1}^i (n - j)$$

Dabei ist der Koeffizient λ_i das erste Glied der i -ten Differenzenfolge. Nun ist aber

$$\frac{1}{i!} \prod_{j=1}^i (n - j) = \binom{n - 1}{i} ,$$

wobei wir jene Binomialkoeffizienten als Null festlegen, bei denen die untere Zahl grösser ist als die obere. Setzen wir $a_1 = \lambda_0$, können wir die Behauptung der drei Schüler kompakt schreiben:

$$a_n = \sum_{i=0}^k \lambda_i \binom{n - 1}{i} .$$

Bilden wir die 1. Differenzenfolge $d_n = a_{n+1} - a_n$, so ergibt sich

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \sum_{i=0}^k \lambda_i \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^k \lambda_i \binom{n - 1}{i} = \sum_{i=0}^k \lambda_i \left(\binom{n}{i} - \binom{n - 1}{i} \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \binom{n - 1}{i - 1} .$$

Durch Ummummern mit dem Summationsindex $j = i - 1$ ergibt sich

$$d_n = a_{n+1} - a_n = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{j+1} \binom{n-1}{j} .$$

Das ist aber die behauptete Formel für eine arithmetische Folge $(k - 1)$ -ter Ordnung, womit per Induktion deren Richtigkeit gezeigt ist. Insbesondere ist die k -te Differenzenfolge die konstante Folge, welche nur aus λ_k besteht.

Natürlich hat der Lehrer im Unterricht den Beweis nicht in dieser Allgemeinheit geführt. Beim Präsentieren ausgewählter Ideen und Ergebnisse aus den Texten der Schülerinnen und Schüler konnte er aber problemlos auf den Kerngedanken der Binomialkoeffizienten und die Additionseigenschaft im Pascalschen Dreieck hinweisen, welche ja bereits in der Struktur der obigen Tabellen erkennbar ist.

Zweite Nutzung: Die Fortsetzung des Unterrichts nimmt einen nicht geplanten Verlauf

Mit der Einsicht von Abdullah, Ceren und Kevin können die Schülerinnen und Schüler selbständig ein Problem lösen, welches normalerweise vom Lehrer über aufwendige Rechnungen oder sogar mit einem Induktionsbeweis bearbeitet werden muss. Es geht um die Berechnung der Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen. Beim Verwenden der obigen Tabellenstruktur für Folgen und deren Differenzenfolgen wird klar, dass die Quadratzahlen eine arithmetische Folge 2. Ordnung und demzufolge deren Teilsummenfolge eine arithmetische Folge 3. Ordnung bilden müssen. Das oben verwendete Tabellenschema sieht folgendermassen aus:

Folgenglieder	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...
Werte	1	5	14	30	55	91	...
1. Differenzenfolge	4	9	16	25	36	...	
2. Differenzenfolge	5	7	9	11	...		
3. Differenzenfolge	2	2	2	...			

Also gilt hier $a_1 = 1$, $d = 4$, $e = 5$ und $f = 2$ und wir erhalten für das allgemeine Glied dieser arithmetischen Folge 3. Ordnung

$$a_n = 1 + 4 \cdot (n - 1) + 5 \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} + 2 \cdot \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 3)}{2 \cdot 3} .$$

Eine direkte Termumformung liefert die bekannte Summenformel für die Quadratzahlen:

$$a_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

Nun ist Tür und Tor offen für Formeln, welche die Summe von höheren Potenzen natürlicher Zahlen angeben. Beispiel: Aus der entsprechenden Tabelle für die 1. Differenzenfolge 8, 27, 64, 125, ... entnimmt man

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1 \binom{n-1}{0} + 8 \binom{n-1}{1} + 19 \binom{n-1}{2} + 18 \binom{n-1}{3} + 6 \binom{n-1}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Fazit: Der forschungsorientierte Mathematikunterricht nimmt oft ungeplante Wendungen, kann sich fachlich für alle Beteiligten interessant vertiefen und gibt den Lernenden Einblicke in die Denk- und Arbeitsweise ihrer Mitschülerinnen und Mitschüler.

Anmerkung: Auf der Seite „<https://www.wias-berlin.de/people/stephan/folgen.htm>“ kann man über den Link „Zahlenfolgen, pdf-File (412 kB)“ einen interessanten Artikel von Holger Stephan (Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin) herunterladen. Im Kapitel 1.4 „Arithmetische Folgen und Pascalsches Dreieck“ wird die Einsicht der drei Schüler Abdullah, Ceren und Kevin behandelt.

Stedall, Jacqueline: The History of Mathematics, A Very Short Introduction. 123 Seiten, GBP 7.99. Oxford University Press, Oxford, New York, 2012, ISBN 978-0-19959968-4

Wie kann es gelingen, einen Abriss der Mathematikgeschichte, die sich über mindestens 4000 Jahre und alle Hochkulturen erstreckt, auf 123 knappen Seiten allgemeinverständlich darzustellen?

Die Autorin bewältigt diese Aufgabe mit Bravour. Die Zeitreise beginnt bei Andrew Wiles und dem grossen Satz von Fermat und sie gelangt über die Bronzezeit im Zweistromland zurück zu Andrew Wiles. Sie bricht mit der Tradition, Biographien der hervorragendsten Persönlichkeiten, die zur Mathematik beigetragen haben, chronologisch aufzureihen oder zu kommentieren. Statt dessen werden wichtige Fragen zur Entstehung und Entwicklung der Mathematik thematisch gebündelt und im Lichte moderner historischer Forschung mit Berücksichtigung soziologischer und ökonomischer Erkenntnisse bearbeitet. Beispielsweise wird die Frage *What is mathematics and who is a mathematician?* so beantwortet, dass die griechischen Wurzeln des Wortes zur Sprache kommen, aber auch die alternativen Bezeichnungen aus anderen Kulturkreisen und Epochen. Es wird erkennbar, dass der Begriff *Mathematik* zeit- und kulturabhängig ist. Ab dem 18. Jahrhundert setzt sich die europäisch geprägte Auffassung durch.

Die Verbreitung mathematischer Ideen wird über Raum und Zeit angesprochen. Die Geschichte der Überlieferung von Euklids Elementen gibt Gelegenheit zu Abstechern in die arabische Welt und die mittelalterliche Mathematik. Es werden Parallelen zwischen chinesischen Aufgaben für die Mandarinausbildung und analogen Fragen aus dem Liber Abaci von Leonardo di Pisa aufgezeigt. Damit wird exemplarisch die Rolle von Handelswegen, etwa der Seidenstrasse, für einen globalen Austausch von materiellen aber auch ideellen Gütern erkennbar, darunter auch von mathematischen Erkenntnissen.

Wie wird Mathematik unterrichtet? Tontäfelchen aus Nippur (Irak) lassen erahnen, was und wie um 1740 v. Chr. in sumerischen Schulen unterrichtet wurde. Und wie wurde um 1780 n. Chr. im ländlichen England in der Greenrow Academy unterrichtet? Die Inhalte waren erstaunlich ähnlich zu dem, was ich selbst um 1960 noch in einem Schweizer Gymnasium erlebte.

Die Lebensumstände und Leistungen mathematischer Persönlichkeiten werden selektiv und exemplarisch kommentiert, aber auf eine ungewohnte Art. Wovon lebten die Mathematiker? War Mathematik eine Beschäftigung für Privilegierte oder eine Erwerbsquelle? Die Quellenlage bringt es mit sich, dass die Rolle von Anwendungen mit Wechselwirkungen zwischen Mathematik, Spitzentechnologien und Machtausübung ausgeblendet bleiben.

Anhand des Satzes von Pythagoras wird ein Blick ins Innere der Mathematik geworfen. Die zeitliche Entwicklung von Beweisen, Berechnungen und Notationen wird kurz skizziert.

Zum Schluss reflektiert die Autorin noch über die Entwicklung der Historiographie der Mathematik.

Der Text kommt fast ohne Formeln aus. Semantik steht im Vordergrund. Daher

ist das kleine Buch insbesondere relevant für alle, die sich mit Mathematikvermittlung befassen. Wer im Unterricht die 'genetische Methode' berücksichtigt, wird diesen neuen Text mit Interesse und Gewinn lesen. Ich kann ihn insbesondere allen Unterrichtenden uneingeschränkt empfehlen.

H.R. Schneebeli, Wettingen



Dreiländerwettbewerb “DATCH – Das Känguru”

14. bis 17. Juni in Quarten

Vom 14. bis 17. Juni trafen sich 18 talentierte Nachwuchsmathematikerinnen und -mathematiker aus Deutschland, Österreich und der Schweiz zum geistigen Kräftenessen in Quarten. Das Team aus der Schweiz erreichte den zweiten Platz.

Die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler der 7. und 8. Klasse gehörten beim diesjährigen Känguru-Wettbewerb zu den besten sechs ihrer Altersstufe im jeweiligen Land. In Länderteams kämpften sie drei Tage lang um Punkte in verschiedenen mathematischen Wettbewerben. Beim Speedwettbewerb ging es darum, die Balance zwischen schnellen Antworten und korrekten Überlegungen zu finden. Beim Einzelwettbewerb drängte die Zeit weniger. Umso wichtiger waren vollständige und präzise formulierte Lösungen, wobei alle Aufgaben individuell gelöst werden mussten, aber die Punkte jedes Teams zusammengezählt wurden. Beim abschliessenden Gruppenwettbewerb war auch Auftrittskompetenz gefragt. Sieben Aufgaben standen zur Auswahl, davon mussten fünf gelöst werden, wovon eine Lösung vor allen Teilnehmern und einer Jury zu präsentieren war.

Deutschland vor der Schweiz

Nach dem Speedwettbewerb war die Situation noch durchaus ausgeglichen, doch bei den beiden anderen Wettbewerben setzte sich das deutsche Team deutlich ab und verteidigte den Sieg vom letzten Jahr souverän. Zwischen der Schweiz und Österreich blieb es spannend bis zum Schluss, wobei sich die Schweiz schliesslich dank besseren Resultaten im Gruppenwettbewerb den zweiten Platz sichern konnte.

Orgelbau und Taminaschlucht

Neben den Wettbewerben hatten die Teilnehmenden auch die Gelegenheit, sich bei sportlichen und kulturellen Angeboten über die Landesgrenzen hinweg besser kennenzulernen. Am Freitagnachmittag stand ein Besuch bei Mathis Orgelbau (Näfels) auf dem Programm, am Samstagnachmittag eine Wanderung durch die Taminaschlucht.

Das Treffen in Quarten wurde von der Deutschschweizerischen Mathematik-Kommission (DMK) geplant und durchgeführt. Für Hansjürg Stocker, Präsident der DMK, hat sich der Aufwand gelohnt: “Es ist eine grosse Freude, den jungen Talenten beim Knobeln und Argumentieren zuzusehen. Einen Teil ihrer Begeisterung werden sie zu Hause an ihre Kolleginnen und Kollegen weitergeben.”



Oben: Eine Gruppe des Schweizer Teams bearbeitet Aufgaben im Speedwettbewerb.

Unten: Ein Mitglied des Deutschen Teams präsentiert die Lösung beim Gruppenwettbewerb.

Zwei Beispielaufgaben

Einzelwettbewerb: Karl-Friedrich hat die außergewöhnliche Bakterien-Art *Bacillus decimus* entdeckt, die er in seinem Labor untersucht. Die einzellige Bakterien-Art weist sich durch ein besonders interessantes Fortpflanzungsverhalten aus. Völlig zufällig teilen sich zu einem beliebigen Zeitpunkt einige der Bakterien in je genau 10 Bakterien auf, die dann explosionsartig auf die übliche Größe anwachsen. Gestern abend hatte Karl-Friedrich 15 Exemplare des *Bacillus decimus* in seinem Beobachtungsgefäß. Heute morgen verkündete er stolz, dass diese sich auf 2012 vermehrt hätten. „Da haben Sie sich aber verzählt, Herr Professor“, wies ihn seine aufmerksame Assistentin Alberich charmant zurecht. Begründe, warum Alberich Recht hat.

Gruppenwettbewerb: In den beiden abgebildeten 3×3 -Feldern sind jeweils einige der Kästchen grau gefärbt. Die Zahl in jedem Kästchen gibt an, wie viele graue Kästchen zu diesem Kästchen waagrecht, senkrecht oder diagonal benachbart sind:

2	1	2
3	2	2
1	2	1

2	3	2
4	4	3
1	2	1

Die Summe aller Zahlen im ersten 3×3 -Feld ist 16, im zweiten ergibt sich 22.

- Findet eine Möglichkeit, einige der Kästchen so zu färben, dass sich 17 als Summe ergibt.
- Wie viele verschiedene Summen sind möglich, wenn höchstens 3 Kästchen grau gefärbt werden dürfen?

DATCH – Das Känguru

Das "Känguru der Mathematik" ist ein internationaler Wettbewerb mit über 6 Millionen Teilnehmenden aus über 80 Ländern. Der Wettbewerb wird in fünf Altersstufen ausgetragen und richtet sich an Schülerinnen und Schüler ab der dritten Klasse. Der Dreiländerwettbewerb "DATCH – Das Känguru" fand erstmals 2011 in Bad Waldsee (D) statt und ist nach den Teilnehmerländern (D, AT und CH) benannt. Die besten sechs der Altersstufe 7/8 jedes Landes kämpfen fortan jedes Jahr um einen Wanderpokal. Der Wettbewerb wird abwechselungsweise von Deutschland, Österreich und der Schweiz organisiert. An drei Tagen findet jeweils zuerst ein Speed-, ein Einzel- und ein Gruppenwettbewerb statt. Die Aufgaben werden von Delegationen aus allen drei Ländern zusammengestellt. Hauptanliegen des Wettbewerbs ist es, die Freude an Mathematik zu fördern, aber auch Sport, Kultur und Geselligkeit finden Platz im knapp viertägigen Programm.

Mehr Informationen: <http://www.mathe-kaenguru.ch>

Kontakt:

Hansjürg Stocker, 044 780 19 37, hjstocker@bluewin.ch

Aha! Mathematik! – Teil II.

Was bei der Approximation von Funktionswerten passieren kann.

Urs Stammbach

Am Anfang steht ein numerisches Experiment mit der Funktion

$$f : x \rightarrow f(x) = \sin \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2} \right).$$

Die Vorstellung ist die, dass in einer Anwendung der Funktionswert von f innerhalb einer längeren Rechnung bestimmt werden muss und zwar für Werte von x , die ihrerseits aus Messungen errechnet wurden und deshalb nur näherungsweise bekannt sind. Dabei wird angenommen, dass der Wert des Argumentes x mit zusätzlichem Aufwand beliebig genau gemacht werden kann. Das Folgende ist dann sozusagen eine Demonstration dieses Vorganges in einer kontrollierten Umgebung. Die Funktion f wird zuerst an den Stellen

$$3.9, 3.99, 3.999, 3.9999, 3.99999, \dots$$

ausgewertet, also auf einer Folge von Zahlen, die sehr rasch gegen den als genau angesehenen Wert 4 konvergiert. Mit jedem Schritt wird die Distanz zum “richtigen” Wert 4 um den Faktor 10 verkleinert. Diese Folge von Zahlen deutet die sukzessiv immer besser werdende Genauigkeit für die Grösse x an.

Ferner wird die gleiche Rechnung für die Folge von Zahlen

$$1.9, 1.99, 1.999, 1.9999, 1.99999, \dots$$

durchgeführt, welche gegen 2 konvergiert. Die zugehörigen Berechnung liefert folgende Werte:¹

x	$f(x)$	x	$f(x)$
3.9	0.8313595846	1.9	0.4413721770
3.99	0.8603029298	1.99	0.0330343010
3.999	0.8629213180	1.999	-0.9823680634
3.9999	0.8631805876	1.9999	-0.1634533406
3.99999	0.8632064890	1.99999	-0.0748074451
3.999999	0.8632090789	1.999999	-0.6256837105
3.9999999	0.8632093379	1.9999999	-0.9457588989
3.99999999	0.8632093638	1.99999999	-0.9997768755
3.999999999	0.8632093664	1.999999999	0.9978731823

Offensichtlich ist das Verhalten der Funktion f in der Nähe der beiden durch $x = 2$ und $x = 4$ gegebenen Punkte völlig unterschiedlich. Während für $x = 4$ die Werte $f(x)$ sich

¹Die Werte wurden vor einigen Jahren mit Hilfe von Mathematica bestimmt; neuere Systeme ergeben möglicherweise Abweichungen, das wesentliche Verhalten der Werte bleibt aber dasselbe.

– wie eine weitere Rechnung bestätigt – sukzessive der Zahl $0.8632093666 \dots$ nähern, streuen sie für $x = 2$ “chaotisch” über einen weiten Bereich.

Was geht hier vor? Das Verhalten an der Stelle $x = 4$ überrascht niemanden, wohingegen das Verhalten an der Stelle $x = 2$ wohl jedermann verblüfft. Man kann sich leicht vorstellen, dass ein derartiges chaotisches Verhalten bei Anwendungen zu echten Problemen führen kann. Kann denn die Mathematik in ähnlich gelagerten Fällen einen solchen unerwünschten Effekt ausschliessen? Und auf welche Weise? Wie ist zum Beispiel zu rechtfertigen, dass man bei der Berechnung des Kreisumfanges oder der Kreisfläche für die irrationale Zahl π mit einem Näherungswert 3.14 oder 3.14159 rechnen darf, um eine Approximation des “richtigen” Wertes für den Umfang und die Fläche zu erhalten? Hat man in diesem Fall tatsächlich immer ein Verhalten vor sich, das dem Verhalten der Funktion f bei $x = 4$ entspricht und nicht dem Verhalten bei $x = 2$? Und weshalb ist dies so?

Die mathematische Erklärung des Phänomens führt auf den wichtigen Begriff der *Stetigkeit* von Funktionen. Die Funktionen, die bei der Berechnung des Kreisumfangs und der Kreisfläche auftreten, sind stetig. Stetig ist auch die obige Funktion f an der Stelle $x = 4$, während sie an der Stelle $x = 2$ kompliziertere Eigenschaften besitzt. In der Tat macht die Formel für f an der Stelle $x = 2$ keinen Sinn: man müsste “durch Null dividieren”. (Das haben natürlich einige bereits am Anfang bemerkt.) Um zu einer überall definierten Funktion zu gelangen, muss der Wert von f an der Stelle $x = 2$ noch gesondert vorgegeben werden. Dies kann hier auf verschiedene Art geschehen, denn *jeder* Wert für $f(2)$ liefert eine Funktion, die f vervollständigt. Aber jede dieser denkbaren, vervollständigten Funktionen ist an der Stelle $x = 2$ *nicht* stetig.

Die *Stetigkeit* einer Funktion f an einer Stelle x ist mathematisch dadurch definiert, dass der Funktionswert $f(x)$ für *jede* gegen x konvergierende Folge $\{x_n\}$ mit dem Grenzwert der Folge $\{f(x_n)\}$ übereinstimmt. Man schliesst aus der obigen Diskussion, dass *erst die Stetigkeit einer Funktion an der Stelle x es erlaubt, den Funktionswert mit Hilfe von Approximationen des Argumentes x zu berechnen*. Dies hat eine wichtige Konsequenz für Anwendungen. Wenn es zum Beispiel darum geht, einen mathematischen Zusammenhang zwischen physikalischen Messgrössen herzustellen, so ist dies im allgemeinen nur dann sinnvoll, wenn die involvierten Funktionen für alle in Frage kommenden Werte stetig sind. Denn die Messwerte, die in die zugehörigen Berechnungen eingehen, sind immer nur Approximationen der “eigentlich richtigen” Werte. In der historischen Entwicklung der Mathematik war dies dann natürlich einer der Gründe dafür, sich vorwiegend, ja fast ausschliesslich, nur mit *stetigen* Funktionen zu beschäftigen. So sind denn auch die *üblichen* Funktionen, die im gymnasialen Mathematikunterricht behandelt werden, für alle Werte, an denen sie definiert sind, stetig.

DPK

Der Mond der sich von uns entfernt

Es ist eine Tatsache, dass sich der Mond jedes Jahr um ca. 4cm/Jahr von der Erde entfernt. Dieser Wert kann mit Hilfe des von den Apollo-Missionen auf dem Mond aufgestellten Spiegels und einer Laufzeitmessung eines Lasersignals einfach und genau gemessen werden.

I. Das Modell

Der dem Mond zugewandte Gezeitenhügel entsteht durch die Gravitationskraft des Mondes auf die Erde. Da die Erde schneller rotiert, wird der Schwerpunkt dieses Gezeitenhügels wegen den Reibungskräften etwas aus der Verbindungslinie Mond-Erde gebracht. Die Erde dreht sich unter dem Gezeitenhügel weg. Dieser wirkt wie eine Art Bremsklotz und bremst die Erdrotation ab. Damit sinkt der Drehimpuls der Erde. Der totale Drehimpuls des Systems ist konstant, da kein äusseres Drehmoment wirkt. Das Drehmoment der Sonne auf den Schwerpunkt des Systems verschwindet, da $\vec{F} // \vec{r}$ und das Drehmoment der Sonne auf die Rotationsbewegung des Systems um den Schwerpunkt verschwindet ebenfalls. Somit muss der Drehimpuls des Mondes zunehmen. Das sieht man auch daran, dass die Off-Axis-Gravitationskraft des Gezeitenhügels eine beschleunigende Wirkung auf den Mond hat.



II. Der Endzustand (Stationäre Zustand)

Damit ist auch sofort klar, dass das System auf einen Endzustand hin steuert, denn die Ursache der Bremswirkung liegt in der Differenz der Rotationszeit der Erde (1 Tag) und der Umlaufzeit des Mondes (27.3 Tage, siderisch). Die Bremswirkung verschwindet, sobald die Rotationszeit der Erde exakt gleich der Umlaufzeit des Mondes ist. Dann wird der Mond geostationär sein, und in manchen Gebieten der Erde wird immer Flut und in anderen immer Ebbe sein. Wehe den Mondsüchtigen in dieser Zeit, sie werden, falls sie sich am falschen Ort auf der Erde befinden überhaupt nicht mehr schlafen können.

Es ist nun relativ einfach diesen Endzustand zu berechnen. Er folgt bereits aus der Gleichung für die Drehimpulserhaltung.

Sei:

$$\Omega_0 = \text{aktuelle Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation} = 2\pi/86400 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = \text{aktuelle Winkelgeschwindigkeit des Mondes} = 2\pi/(27.3 \times 86400) \text{ s}^{-1}$$

$$\Omega = \text{Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation zu einem beliebigen Zeitpunkt } t$$

$$\omega = \text{Winkelgeschwindigkeit des Mondes zu einem beliebigen Zeitpunkt } t$$

$$\omega_E = \text{Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und Mondrotation im Endzustand}$$

$$M = 6 \times 10^{24} \text{ kg} = \text{Erde Masse}$$

$$m = \text{Mondmasse} = M / 81.3$$

$$R = 6'370'000 \text{ m} = \text{Radius der Erdkugel}$$

$$J = \frac{2}{5} MR^2 = \text{Trägheitsmoment der Erde}$$

$$r_0 = \text{aktueller Radius der Mondbahn } 384'000'000 \text{ m}$$

r_E = Radius der Mondbahn im Endzustand
 G = Gravitationskonstante = $6.67 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$.

Da der totale Drehimpuls des Systems konstant bleibt, muss die Abnahme des Drehimpulses der Erde gleich sein wie die Zunahme des Drehimpulses des Mondes.

Somit ergibt sich:

$$J(\Omega_0 - \Omega) = m(r^2\omega - r_0^2\omega_0) \quad (\text{II.1})$$

Da im Endzustand $\omega_E = \Omega = \omega$ ist, erhalten wir für den Endzustand die Gleichung:

$$J(\Omega_0 - \omega_E) = m(r_E^2\omega_E - r_0^2\omega_0) \quad (\text{II.2})$$

Im Endzustand wird der Mond die Erde dann in einer stationären Bahn mit Radius r_E umkreisen. Für diese gilt dann:

$$m\omega_E^2 r_E = \frac{GMm}{r_E^2} \rightarrow \omega_E = \sqrt{\frac{GM}{r_E^3}} \quad (\text{II.3})$$

Setzen wir (II.3) in (II.2) ein, so erhalten wir schlussendlich die Gleichung:

$$J\left(\Omega_0 - \sqrt{\frac{GM}{r_E^3}}\right) = m\left(\sqrt{GM r_E} - r_0^2\omega_0\right) \quad (\text{II.4})$$

Diese Gleichung hat mit den obigen Parametern die Lösung $r_E = 592'445 \text{ km}$, also etwa das 1.5-fache der heutigen Distanz zwischen Erde und Mond. Aus Gleichung (II.3) folgt dann ω_E und der Erdtag ist dann im Endzustand $T_E = \frac{2\pi}{\omega_E} = 52.4 \text{ heutige Tage}$ lang.

Natürlich interessiert nicht nur die Mondsüchtigen wann es denn soweit ist. Darum widmen wir uns jetzt der Dynamik, d.h. der zeitlichen Entwicklung des Systems.

III. Dynamik

Um die Dynamik des Systems, d.h. den zeitlichen Verlauf der Funktionen $\omega(t)$ und $\Omega(t)$ zu berechnen, benötigt man nebst der Drehimpulserhaltung (II.1) noch eine zweite Gleichung. Da die radiale Drift des Mondes mit 4cm/Jahr sehr gering ist, kann mit sehr hoher Genauigkeit die Mondbahn innerhalb der Umlaufzeit als kreisförmig approximiert werden. Somit gilt die Beziehung (II.3) in guter Näherung nicht nur im Endzustand, in dem die radiale Drift abgeklungen ist, sondern für jeden Mondumlauf zu einer beliebigen Zeit. d.h.

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow r(t) = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega(t)^2}} \quad (\text{III.1})$$

Somit kann die radiale Drift des Mondes aus $\omega(t)$ berechnet werden.

Die zweite Gleichung kann aus der Bewegungsgleichung der Erdrotation gewonnen werden. Sie lautet:

$$J\dot{\Omega} = M = -FR \quad (\text{III.2})$$

Gravitationskraft des Mondes, sowie der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten $\omega(t)$ und $\Omega(t)$. Darum wird folgender Ansatz gemacht:

$$F = k \frac{Gm(\Omega - \omega)}{r^2} \quad (\text{III.3})$$

Die Kraft verschwindet, sobald $\Omega = \omega$ ist, im Endzustand eben.

Mit (II.1), (III.1), (III.2) und (III.3) erhalten wir folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_0 - \dot{\Omega}(t) &= \frac{(GM)^{2/3} m}{J} (\omega(t)^{-1/3} - \omega_0^{-1/3}) \\ \dot{\Omega}(t) &= -k \frac{G^{1/3} mR}{JM^{2/3}} (\Omega(t) - \omega(t)) \omega(t)^{4/3} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

mit den Anfangsbedingungen $\Omega(0) = \Omega_0$ und $\omega(0) = \omega_0$

k kann aus der bekannten Rate der radialen Drift $\dot{r}_0 = \dot{r}(0) = 4\text{cm/Jahr}$ wie folgt bestimmt werden:

Durch Ableiten von (III.1) erhält man

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2} \sqrt{GM} r^{-5/2} \dot{r} \quad (\text{III.5})$$

Ableiten der ersten Gleichung von (III.4) ergibt

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{3J} (GM)^{2/3} m \omega^{-4/3} \dot{\omega} \quad (\text{III.6})$$

Setzen wir (III.5) in (III.6) ein erhält man

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{2J} (GM)^{7/6} m \omega^{-4/3} r^{-5/2} \dot{r} \quad (\text{III.7})$$

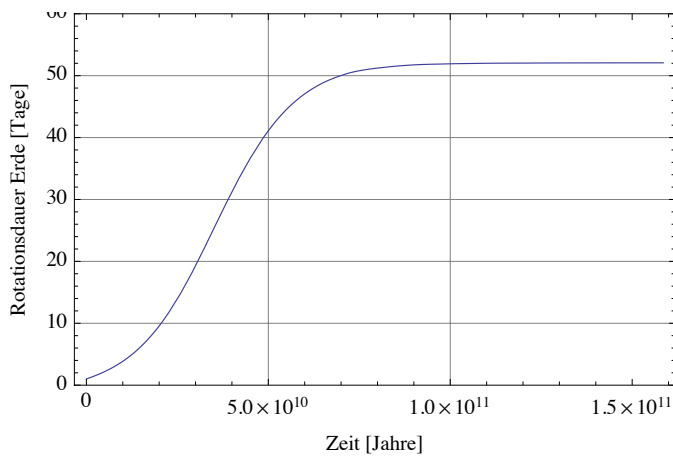
Durch Gleichsetzen mit der zweiten Gleichung von (III.4) bekommt man

$$-k \frac{G^{1/3} mR}{JM^{2/3}} (\Omega - \omega) \omega^{4/3} = -\frac{1}{2J} (GM)^{7/6} m \omega^{-4/3} r^{-5/2} \dot{r} \quad (\text{III.8})$$

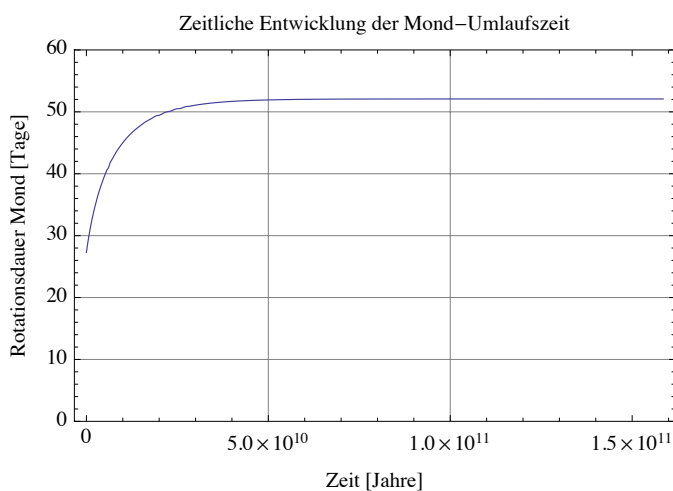
Und daraus folgt schlussendlich

$$k = \frac{G^{5/6} M^{11/6} \omega_0^{-8/3} r_0^{-5/2}}{2R(\Omega_0 - \omega_0)} \dot{r}_0 = 3.19033 \times 10^{18} \text{kgs} \quad (\text{III.9})$$

Mit einem Runge-Kutta-Verfahren (Mathematica) kann (III.4) ohne Schwierigkeiten numerisch gelöst werden. Aus der allgemeinen Beziehung $T = 2\pi/\omega$, erhält man für die Entwicklung des Erdtages, sowie die Entwicklung der Umlaufzeit des Mondes als Funktion der Zeit folgende Lösung:

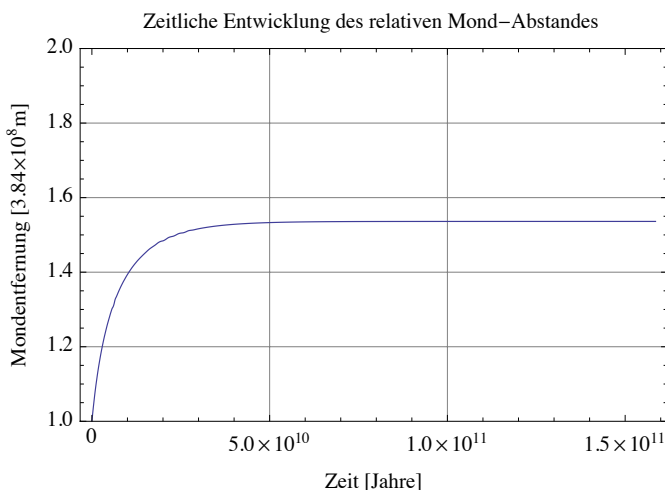


t [Jahre]	T_{Erde} [Tage]
1	1
10	1
100	1
10^3	1
10^4	1
10^5	1.00002
10^6	1.00021
10^7	1.00212
10^8	1.02112
10^9	1.21392
10^{10}	3.85371
10^{11}	51.9182
10^{12}	52.0820



t [Jahre]	T_{Mond} [Tage]
1	27.3
10	27.3
100	27.3
10^3	27.3
10^4	27.3
10^5	27.30040
10^6	27.30430
10^7	27.34250
10^8	27.71710
10^9	30.99030
10^{10}	45.01160
10^{11}	52.08010
10^{12}	52.08200

Die radiale Drift erhält man aus (III.1) und ist als Vielfaches der heutigen Entfernung dargestellt



t [Jahre]	$r(t)/r_0$
1	1
10	1
100	1
10^3	1
10^4	1
10^5	1
10^6	1
10^7	1
10^8	1.00882
10^9	1.08676
10^{10}	1.39380
10^{11}	1.53614
10^{12}	1.53618

Nach der obersten Grafik wird der Endzustand in etwa 100 Mrd. Jahren erreicht. An der untersten Grafik sieht man, dass die radiale Driftgeschwindigkeit stets abnimmt. Der Mond ist bereits nach ca. 20 Mrd. Jahren praktisch in seiner Endposition, im etwa 1.5-Fachen der heutigen Entfernung. Das entspricht einer durchschnittlichen Driftgeschwindigkeit von

52 heutige Erdtage lang. Bereits in 420 Mio. Jahren dauert der Tag eine Stunde länger, und in 4.2 Mrd. Jahren dauert er doppelt so lange wie heute. Aus den Tabellen können weitere Details entnommen werden.

In diesen fernen Zeiten werden die nächtlichen Parties immer länger und länger, und das menschliche Wesen wird sich wohl in dieser Richtung weiterentwickeln müssen, um die 26-tägigen Nächte durchzufeiern. Mit mehreren Milliarden Jahren hat die Evolution jedoch genügend Zeit, die bereits heute beobachtbaren Ansätze weiter zu mutieren. Bleibt nur zu hoffen, dass wir die bis dahin rund 1000 zu erwartenden katastrophalen Kometeneinschläge besser überstehen als die Dinosaurier.

Ried-Brig, 08. 01. 2012 , Geburtstag meiner Tochter Karin

Werner Volken

Das Higgs-Teilchen zum Anfassen

Dr. Benedikt Vogel, Wissenschaftsjournalist/Projektmanager „Verflixtes Higgs“

Nein, wirklich anfassen können wir es nicht, das Higgs-Teilchen. Dafür ist es mit einer vermuteten Masse von 126 GeV zu klein und mit einer Lebensdauer von 10^{-26} s zu flüchtig. Aber seit am 4. Juli 2012 die CERN-Forscher die Entdeckung eines 'higgs-ähnlichen Teilchens' bekannt gaben, ist Physik wieder in aller Munde. Denn das „Gottesteilchen“, wie das Higgs-Boson von Journalisten genannt wird, strahlt weit hinaus über die verschworene Gemeinschaft der Teilchenphysiker.

Die sensationelle Neuigkeit vom Teilchenbeschleuniger LHC in Genf ist gewiss eine schöne Möglichkeit, die Faszination der modernen Physik ins Klassenzimmer zu tragen. Um dies zu erleichtern, hat Dr. Hans Peter Beck, Dozent an der Universität Bern und langjähriger CERN-Forscher, jüngst das Projekt „Verflixtes Higgs“ angestossen. Das Projekt verfolgt das Ziel, Schweizer Mittelschülerinnen und Mittelschülern die neusten Erkenntnisse aus der Elementarteilchenphysik (Higgs-Feld, Higgs-Teilchen) anschaulich vor Augen zu führen und zugehöriges Wissen (Basisinfos zum Standardmodell) zu vermitteln.

Die fünf Module des Projekts „Verflixtes Higgs“:

- Kostenlose, fünfteilige Plakatserie
- Webpage www.teilchenphysik.ch mit Infos und News
- Videointerviews mit Schweizer Forschern
- Dialog auf Facebook, Google+, Twitter und Youtube
- Fortbildungstag am 9. März 2013 an der Uni Bern
(in Kooperation mit der PH Bern)



Das Projekt möchte Physik-Lehrkräften eine Hilfestellung bei der Vermittlung dieses faszinierenden Themas bieten. Im Zentrum steht eine Serie von fünf Plakaten, die unterhaltsam in den Higgs-Mechanismus und das Standardmodell einführen. Die Plakate mit zugehöriger Lehrerbrochüre können bei der unten vermerkten Adresse ab sofort kostenlos bestellt werden, der Versand erfolgt im Oktober 2012. Die Plakate eignen sich für den Unterricht oder für Projekttag. Sie können aber auch ohne weitere Kommentierung in den Schulen ausgehängt werden.

Seit Anfang September ist die neue Webpage www.teilchenphysik.ch online. Sie bietet interessierten Schülerinnen und Schülern einen leichten Einstieg ins Thema – durch erklärende Texte und Grafiken zum Higgs-Mechanismus und zum Standardmodell, aber auch durch Newsmeldungen und weiterführende Links. Die Webpage kann als Grundlage für Projektarbeiten dienen, zumal sich interessierte Schüler über Social Media-Plattformen mit anderen Schülern austauschen und dort Schweizer Forscher direkt ansprechen können. Für den Unterricht interessant sein dürften die Videointerviews mit vier Physikern sowie einem Choreografen und einer Soziologin, die in den nächsten Monaten auf www.teilchenphysik.ch aufgeschaltet werden und die die Bedeutung des 'Higgs' und der physikalischen Forschung für unsere Gesellschaft aus unterschiedlichen Perspektiven beleuchten.

Bestellung Plakatserie, weitere Auskünfte: Benedikt Vogel, Mail: vogel@vogel-komm.ch

„Verflixtes Higgs“ ist eine Initiative des Schweizer Instituts für Teilchenphysik (CHIPP), also der in der Teilchenphysik tätigen Schweizer Hochschulen. Das Projekt wird finanziert durch das Staatssekretariat für Bildung und Forschung.

Auf die schiefe Bahn geraten

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Wie jede Lehrkraft überarbeite ich ab und zu meine Aufgaben, um sie für meine Klassen klarer zu machen. Bei einer Aufgabe zur schiefen Ebene mit Reibung ist mir aufgefallen, dass ich nicht geschrieben hatte, dass die Bewegung entlang der Falllinie erfolgen solle. Ich hab's dann aber bleiben lassen, weil sich die Schülerinnen und Schüler ohnehin auf diesen Fall beschränken. Aber für mich als Lehrkraft gilt das natürlich nicht: Ich möchte wissen, was geschieht, wenn diese Beschränkung wegfällt. Und so habe ich mich – glücklich über diese neue Aufgabe – an den Computer gesetzt und bin prompt rechnerisch auf die schiefe Bahn geraten.

Simulation

Zur Übersicht habe ich die Bahnen zeichnen lassen, siehe Abbildung 1. Dazu wurde Gleichung (1) mit dem Euler-Cromer-Verfahren numerisch integriert. Die Zeichenebene ist parallel zur Bahnebene.

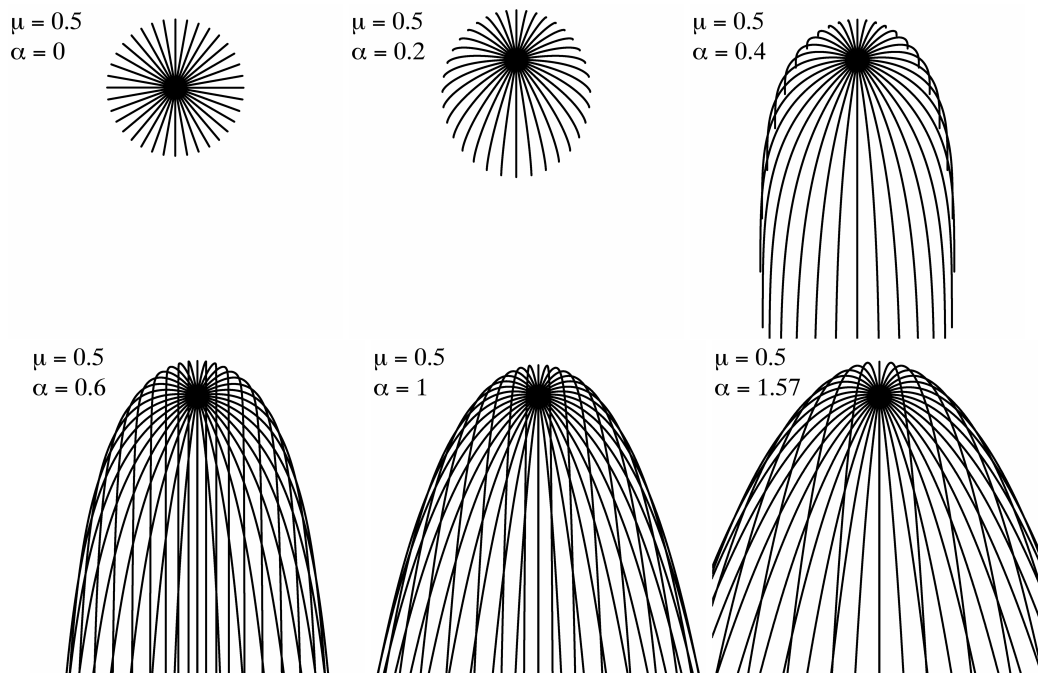


Abbildung 1: Bahnen mit gleichem Startpunkt auf verschiedenen geneigten Ebenen (Neigungswinkel α in Radiant). Die Abschuss-Schnelligkeit ist konstant, ebenso der Gleitreibungskoeffizient $\mu = 0.5$. Die Abschussrichtung (Scharparameter) wird ausgehend von der Horizontalen in 10° -Schritten erhöht. Für $\alpha = 0$ (horizontale Ebene) sind die Bahnen gerade. Für $\alpha < 0.4636\dots$ kommt die Bewegung zum Stillstand. Für $\alpha \rightarrow \pi/2$ werden die Bahnen und deren Einhüllende zu Parabeln.

Theorie

Die resultierende Kraft auf den Körper (Massenpunkt) setzt sich zusammen aus der Gleitreibungskraft und dem Anteil der Gewichtskraft parallel zur Ebene:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{res} = -mg \sin \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu mg \cos \alpha \cdot \frac{1}{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (1)$$

g ist die Fallbeschleunigung, α der Neigungswinkel der Ebene gegen die Horizontale, μ die Gleitreibungszahl und v die Schnelligkeit (Betrag des Geschwindigkeitsvektors). Die y-Achse zeigt entlang der Falllinie parallel zur Ebene nach oben, die x-Achse liegt horizontal in der Ebene.

Die Vektorgleichung (1) besteht aus zwei gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen. Da ich diese Gleichung nicht selber lösen konnte, habe ich sie numerisch integriert. Die Bahnen, siehe Abb. 1, haben mich nicht an bekannte Kurven erinnert. Wenn die Komponente der Gewichtskraft parallel zur Ebene grösser als die Gleitreibungskraft wird, gibt es kein Kräftegleichgewicht mehr. Der Körper kommt ab dem Grenzwinkel $\alpha = \arctan \mu = \arctan \frac{1}{2} \approx 0.4636$ rad nicht mehr zur Ruhe. Die Form der Bahn ist anscheinend unabhängig vom Betrag der Anfangsgeschwindigkeit. Die Schüler wissen, dass sich der Bremsweg vervierfacht, wenn die Anfangsgeschwindigkeit verdoppelt wird. Ein analoges Verhalten ist in Abbildung 2 zu erkennen.

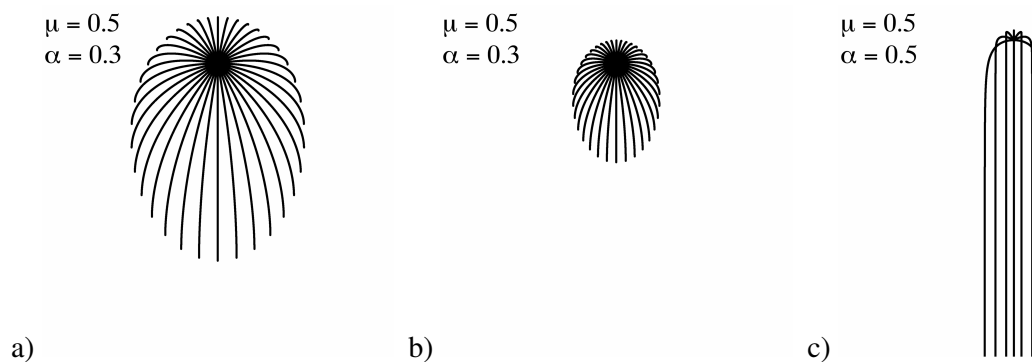


Abbildung 2: a,b) Bahnen auf der gleichen schiefen Ebene für zwei verschiedene Anfangsschnelligkeiten. Die Startschnelligkeiten haben das Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ und offenbar haben die Bahnkurven dieselbe Form. Skaliert man das linke Bild (a) auf 50% seiner Ausgangsgrösse, so ist es auf dem Computermonitor deckungsgleich mit dem mittleren Bild (b). c) Oberhalb eines bestimmten Winkels rutscht der Körper immer weiter und bewegt sich asymptotisch geradlinig entlang der Falllinie.

Falls der Körper zum Stillstand kommt, zeigen die Enden der Bahnkurven immer entlang der Falllinie nach unten. Am Schluss verschwindet nämlich die Bahngeschwindigkeit und damit die Zentripetalbeschleunigung. Das ist nur möglich, wenn die Gleitreibungskraft entlang der Falllinie aufwärts gerichtet ist und die entgegengesetzt gerichtete Komponente der Gewichtskraft kompensiert [1].

Die allgemeine Lösung von Gleichung (1) wurde im Jahr 2010 von V. M. Shunyakov und L. V. Lavrik veröffentlicht [2]. Ich möchte die Rechnung hier wiedergeben:

Aus Gleichung (1) kann die Masse m eliminiert werden:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \mu g \cos \alpha \cdot \frac{1}{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (2)$$

Statt weiter mit der x-Komponente der Beschleunigung zu arbeiten, verwenden wir stattdessen die Bahnbeschleunigung, d.h. die Komponente der Beschleunigung parallel zum Geschwindigkeitsvektor.

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \alpha \cdot \frac{v_y}{v} - \mu g \cos \alpha \cdot \frac{v}{v} \quad (3)$$

Die analog geschriebene Differentialgleichung für v_y lautet:

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \sin \alpha \cdot \frac{v}{v} - \mu g \cos \alpha \cdot \frac{v_y}{v} \quad (4)$$

Damit die Gleichungen einfacher geschrieben werden können, verwenden wir die Abkürzung

$$k = \frac{\mu}{\tan \alpha} \quad (5)$$

Damit erhalten wir folgende Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} dv_y/dt \\ dv/dt \end{pmatrix} = -\frac{g \sin \alpha}{v} \cdot \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ v \end{pmatrix} \quad (6)$$

Gleichung (6) kann vereinfacht werden, wenn wir t , v_y und v parametrisch durch die unabhängige Variable z ausdrücken:

$$\begin{pmatrix} dv_y/dz \\ dv/dz \end{pmatrix} \cdot \frac{dz}{dt} = -\frac{g \sin \alpha}{v} \cdot \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ v \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\text{setze } \frac{dz}{dt} = -\frac{g \sin \alpha}{v} \quad \text{Aus Gleichung (7) wird mit dieser Definition:} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} dv_y/dz \\ dv/dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_y \\ v \end{pmatrix} \quad (9)$$

(9) ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung steht in jedem besseren Handbuch, z. B. [3], und ist die Summe zweier Exponentialfunktionen:

$$v(z) = a \cdot e^{(k+1)z} + b \cdot e^{(k-1)z} \quad a = \frac{1}{2} (v_0 + v_{y0}) \quad (10)$$

$$v_y(z) = a \cdot e^{(k+1)z} - b \cdot e^{(k-1)z} \quad b = \frac{1}{2} (v_0 - v_{y0}) \quad (11)$$

$$v_x(z) = \sqrt{v^2 - v_y^2} = c \cdot e^{kz} \quad c = \sqrt{v_0^2 - v_{y0}^2} = v_{x0} \quad (12)$$

Damit wir die parametrisierte Zeit $t(z)$ erhalten, müssen wir die Differentialgleichung (8) integrieren:

$$\int dt = -\frac{1}{g \sin \alpha} \int v(z) dz \Rightarrow \dots \quad (13)$$

$$t = t_c - \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{a}{k+1} e^{(k+1)z} + \frac{b}{k-1} e^{(k-1)z} \right) \quad (14)$$

Die Integrationskonstante t_c kann man so wählen, dass $t = 0$ für $z = 0$ wird. Um die parametrisierte Bahnkoordinate $x(z)$ zu erhalten, muss die Differentialgleichung (12) integriert werden:

$$x = \int v_x dt = \int v_x dz \cdot \frac{dt}{dz} = \int v_x dz \cdot \frac{-v}{g \sin \alpha} = \frac{-1}{g \sin \alpha} \int v v_x dz = \dots \quad (15)$$

$$x = x_c - \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{ac}{2k+1} e^{(2k+1)z} + \frac{bc}{2k-1} e^{(2k-1)z} \right) \quad (16)$$

Die Integrationskonstante x_c kann man so wählen, dass $x = 0$ für $z = 0$ wird. Um $y(z)$ zu erhalten, muss die Differentialgleichung (11) integriert werden:

$$y = \int v_y dt = \dots = y_c - \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{a^2}{2(k+1)} e^{2(k+1)z} - \frac{b^2}{2(k-1)} e^{2(k-1)z} \right) \quad (17)$$

Die Integrationskonstante y_c kann so gewählt werden, dass z. B. $y = 0$ für $z = 0$ wird.

Ein Spezialfall als Kontrolle: Der Abschuss erfolge im Nullpunkt mit Schnelligkeit v_0 entlang der y -Achse nach oben.

$$\Rightarrow v_{y0} = +v_0, \quad t_0 = y_0 = x_0 = v_{x0} = 0, \quad a = v_0, \quad b = c = 0 \quad \text{einsetzen in (14)} \quad (18)$$

$$t = \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{v_0}{k+1} \right) - \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{v_0}{k+1} e^{(k+1)z} \right) \Rightarrow \quad (19)$$

$$z = \frac{1}{k+1} \ln \left(1 - \frac{(k+1)g \sin \alpha}{v_0} \cdot t \right) \quad \text{mit (18) einsetzen in (17)} \quad (20)$$

$$y = \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{v_0^2}{2(k+1)} \right) - \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{v_0^2}{2(k+1)} e^{2(k+1)z} \right) \quad (21)$$

$$y = \frac{1}{g \sin \alpha} \left(\frac{v_0^2}{2(k+1)} \right) - \frac{1}{g \sin \alpha} \cdot \frac{v_0^2}{2(k+1)} \left(1 - \frac{(k+1)g \sin \alpha}{v_0} \cdot t \right)^2 \quad (22)$$

$$y = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}(k+1)g \sin \alpha \cdot t^2 = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)g \cdot t^2 \quad \checkmark \quad (23)$$

Die allgemeine Lösung (14), (16) und (17) kann man prüfen, indem man sie zusammen mit den numerisch integrierten Bahnkurven zeichnet, siehe Abbildung 3.

$\mu = 0.5$
 $\alpha = 0.3$

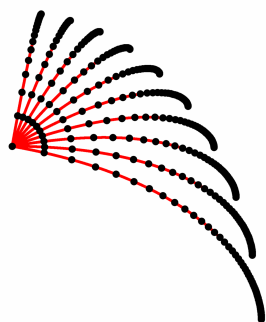


Abbildung 3: Eine Auswahl numerisch integrierter Bahnen (Linien) mit einigen exakt berechneten Positionen (Punkte). Diese Darstellung legt nahe, dass die oben vorgestellte Lösung auch im allgemeinen Fall zutrifft.

Was zu tun bleibt: Der Definitionsbereich der Lösung und die Vorzeichen sollten geprüft werden. Die ‘allgemeine Lösung’ versagt im Fall $k = 1$, d.h. wenn Reibung und vertikale Komponente des Gewichts gleich gross sind.

Literatur

- [1] The Physics Teacher, Solution to November 2009 Challenge, < <http://tpt.aapt.org> >
- [2] V. M. Shunyakov and L. V. Lavrik, “Analytical solution of curvilinear motion on an inclined plane”, Am. J. Phys. **78** (12), 1406–1411, (Dec. 2010).
- [3] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, “Taschenbuch der Mathematik”, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt a. M., 1981

20. Juli 2012



Einladung

31. Basler Kolloquium für Mathematiklehrpersonen

Vier Vorträge zur Fortbildung der Mathematiklehrer und -lehrerinnen an oberen Schulen und für weitere an Mathematik, ihrer Geschichte und ihren Anwendungen Interessierte

Mittwoch, 07.11.2012, 17:15–18:15 Marcel Baumgartner, Nestlé, Vevey

Die richtigen Paletten am richtigen Ort mit Hilfe von statistischen Prognosen

Der Bereich Nahrungsmittelindustrie braucht Prognosen von zukünftigem Bedarf. Hier bei Nestlé können wir unsere Produkte nicht auf Bestellung produzieren. Wenn uns einer der Einzelhändler 10 Paletten Nescafé bestellt, für nächste Woche, dann müssen diese in unserem Verteilungszentrum zur Verfügung stehen: jede Bestellung, die wir nicht liefern, ist für uns ein Verbrechen. Damit diese Ware am richtigen Ort, zum richtigen Zeitpunkt, mit dem richtigen Volumen und so frisch als möglich zur Verfügung steht, brauchen wir effiziente Planungsprozesse. Diese Prozesse starten mit der Absatzplanung (*Demand Planning* auf Englisch), wo es eben genau darum geht, diese Volumen zu schätzen, damit wir rechtzeitig produzieren können.

Statistische Prognosemethoden, basierend auf Zeitreihen, sind dazu sehr nützlich. Im Speziellen die bekannten *Exponentiellen Glättungsmethoden*, welche sehr schnell adäquate Resultate liefern.

In diesem Vortrag werde ich diese Planungsprozesse präsentieren und die exponentiellen Glättungsmethoden kurz vorstellen. Ich erkläre dann, wie wir entscheiden, welche Produkte von statistischen Methoden profitieren (dies ist unser *Forecasting Zoo*), und schlussendlich was unsere nächsten Schritte sind, um diese Methodologie weltweit noch mehr zu nutzen.

Mittwoch, 14.11.2012, 17:15–18:15 Dr. George Szpiro, NZZ, New York

Die verfluchte Mathematik der Demokratie

Seit der Geburt der Demokratie im alten Griechenland haben die Akte des Wählens und der Besetzung einer Legislative zu Paradoxonen geführt, die Philosophen, Staatswissenschaftler, Politiker und Mathematiker jahrhundertlang beschäftigten.

Im ersten Teil des Vortrages werde ich über die Wahl eines Präsidenten, Papstes oder Dekans sprechen. Wer hätte denn gedacht, dass in einer Mehrheitswahl – Inbegriff der Demokratie –, nicht unbedingt der "richtige" Kandidat gekürt wird?

Der zweite Teil des Vortrags befasst sich mit der Art, wie die Sitze in einem Parlament den einzelnen Parteien oder Wahlbezirken zugeteilt werden sollen. Auch hier treten Paradoxone auf, die niemand erwartet hätte.

Leider gibt es kein Happy End. Es ist mathematisch präzise bewiesen worden, dass es weder ein absolut korrektes Wahlverfahren, noch ein absolut korrektes Zuteilungsverfahren gibt.

Mittwoch, 21.11.2012, 17:15–18:15 Prof. Dr. Volker Abel, Hochschule München

*Messreihen: Erstklassig gemessen, zweitklassig ausgewertet.
Ein (erstklassiger) Vorschlag zur Behebung dieses Gegensatzes.*

Um die bei Messwiederholungen beobachtete Ungenauigkeit zu beschreiben, wird häufig irgendwie auf Mittelwert und Standardabweichung zurückgegriffen. Auch in Lehrbüchern mit wissenschaftlichem Anspruch findet man eklatante statistische Fehler oder ungeprüfte Annahmen wie die Normalverteilung.

Deswegen und auch aus prinzipiellen Gründen wird in dem Vortrag ein Wechsel propagiert: Median statt Mittelwert und ein verteilungsfreies statt einem verteilungsgebundenen Konfidenzintervall.

Die vorgeschlagene Vorgehensweise – an Beispielen veranschaulicht – ist mathematisch sauber, schnörkellos und in der Praxis äußerst leicht zu handhaben.

Mittwoch, 28.11.2012, 17:15–18:15 Prof. Dr. Ruth Kellerhals, Universität Fribourg

Gekrümmte Polyeder

Wie es das Problem des Pflasterns einer Fussballoberfläche mit wenigen Lederstücken bereits andeutet, führt die Kristallographie und die Polyedertheorie für Räume mit positiver oder negativer Krümmung zu teilweise erstaunlichen Phänomenen.

Im Zentrum des Vortrags stehen Polyeder, die zu Pflasterungen eines Raums von gleichbleibender Krümmung führen. Nach einer elementaren Einführung mit Illustrationen werden aktuelle Forschungsfragen und Ergebnisse vorgestellt.

Wo?

Im grossen Hörsaal des Mathematischen Instituts der Universität Basel, Rheinsprung 21, 4001 Basel.

Ab 16.30 Uhr gemütliches Beisammensein bei Kaffee und Tee im 1. Untergeschoss.

Nach den Vorträgen gehen wir jeweils mit den Referenten essen. Kommen Sie doch auch einmal mit! Es ist keine Anmeldung nötig.

Organisation

Marcel Steiner-Curtis
Ameisenholzstrasse 14
4142 Münchenstein
marcel.steiner@fhnw.ch

Webseite mit Abstracts

www.fhnw.ch/personenseiten/marcel.steiner/



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht Programm HS 2012

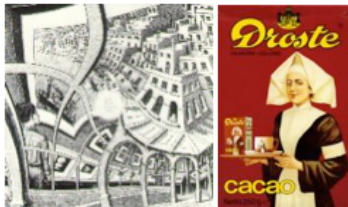
Die Vorträge finden jeweils an einem Donnerstag um 17:15 Uhr
neu, im Hörsaal HG G 3 des Hauptgebäudes der ETH Zürich statt.

Abgeschlossen werden die Veranstaltungen mit einem **Apéro im HG G 6g** (D-MATH Common Room).

Donnerstag, 25. Oktober 2012

Prof. Dr. Bart de Smit, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, Niederlande

Escher and the Droste effect



One of M.C. Escher's most intriguing works depicts a man standing in a gallery who looks at a print of a city that contains the building that he is standing in himself. This picture, with the title Print Gallery, contains a mysterious white hole in the middle.

In a paper of Hendrik Lenstra and the speaker in the Notices of the AMS it is shown that well known mathematical results about elliptic curves imply that what Escher was trying to achieve in this work has a unique mathematical solution. This discovery opened up the way to filling the void in the print. With help from artists and computer scientists a completion of the picture was constructed at the Universiteit Leiden. The white hole turns out to contain the entire image on a smaller scale, which in the Dutch language is known as the Droste effect, after the Dutch chocolate maker Droste.

In the talk the mathematics behind Escher's print and the process of filling the hole will be explained and visualized with computer animations.

Donnerstag, 8. November 2012

Prof. Dr. Christof Weber, Pädagogische Hochschule, Fachhochschule Nordwestschweiz / Freie Universität Berlin, Deutschland

Die Meissner-Körper – oder: Von Körpern, die vorgeben, rund zu sein

Wird ein Brett auf Kugeln gleicher Größe gelegt und hin und her bewegt, rollen die Kugeln und das Brett verschiebt sich parallel zur Tischplatte. Ernst Meissner, Ordinarius für technische Mechanik am Polytechnikum in Zürich, hat 1911 mehrere Körper beschrieben, welche diese Eigenschaft der konstanten Breite ebenfalls aufweisen – und dennoch keine Kugeln sind.

Diese tour d'horizon führt durch hundert Jahre Mathematikgeschichte. In Wort, Bild und Gegenstand wird ein mathematisches Phänomen vorgestellt, das bis heute Fragen aufwirft und viele Überraschungen bereithält.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, Meike Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Donnerstag, 22. November 2012

Dr.-Ing. Jens Gallenbacher, Technische Universität Darmstadt, Deutschland

Abenteuer Informatik - Informatik allgemeinbildend begreifen

"Informatik hat ungefähr so viel mit Computern zu tun wie Astronomie mit Teleskopen". Dieser Satz von Edsger W. Dijkstra ist auch ein guter Leitspruch für die Schulinformatik: Mit dem Computer als Werkzeug aber nicht als Unterrichtsgegenstand. Begreift man die Informatik als vierte Kulturtechnik, muss es hier insbesondere um die Vermittlung allgemeinbildender Kompetenzen wie die Fähigkeit zur Modellbildung und Problemlösefertigkeiten gehen. Verstärkt wird diese Sichtweise durch den von Jeannette Wing geprägten Begriff "Computational Thinking", der insbesondere stark Einzug in die neuen Bildungsstandards für Informatik im angelsächsischen Raum gehalten hat: In den K-12 Standards der CSTA in den USA sowie dem CAS curriculum in Großbritannien. In Darmstadt erproben wir seit 2006 erfolgreich Konzepte, um Schülerinnen und Schülern aller Jahrgangsstufen wesentliche Kompetenzen der Informatik weitgehend ohne den Einsatz von abstrakter Technik zu vermitteln. Die Ausstellung "Abenteuer Informatik" hatte bisher bereits über 100.000 Besucher an 30 Orten, das Lernlabor "Abenteuer Technik" wird jährlich von über 1.200 Schülerinnen und Schülern besucht. Im Vortrag werde ich einige der neueren Beispiele vorstellen und den Zusammenhang mit den Ansätzen des "Computational Thinking" herstellen.



Donnerstag, 6. Dezember 2012

Prof. Dr. Michael Eichmair, Departement Mathematik, ETH Zürich, Schweiz

Das isoperimetrische Problem: Vom Gründungsmythos der Stadt Karthago zur Beschreibung schwarzer Löcher

Wie ist der Grundriss einer größtmöglichen küstengelegenen Stadt beschaffen, deren Stadtmauer eine vorgegebene Länge nicht überschreiten darf? Diese als Problem der Königin Dido bekannte Frage, die Virgil uns in seiner Aeneis beschreibt, ist der Anfang der geometrischen Variationsrechnung. Die Anstrengungen, diese und verwandte Fragen vollständig zu lösen, haben die Entwicklung der Mathematik vorangetrieben wie wenige andere und halten an. Mittlerweile benutzen wir Lösungen des isoperimetrischen Problems in gekrümmten Räumen, um die Masse schwarzer Löcher zu beschreiben. Neben frappierenden Zusammenhängen stossen wir dabei auf immer neue Fragen. In meinem Vortrag möchte ich einige dieser aktuellen Entwicklungen aus der Perspektive Didos erster genialer Erkenntnis erklären.

Herzlich laden ein: N. Hungerbühler, J. Hromkovič, Meike Akveld, H. Klemenz

Weitere Informationen: <http://www.math.ethz.ch/didaktik/weiterbildung/kolloquium>

<http://math.ch/mathematics@school/>

3. Tagung Ausserschulische Lernorte der PHZ Luzern

Am 10. November 2012 führt die Fachstelle für Didaktik Ausserschulischer Lernorte (FDAL) der Pädagogischen Hochschule Zentralschweiz (PHZ) Luzern die 3. Tagung Ausserschulische Lernorte „Impulse aus der Praxis“ durch. An der Weiterbildungstagung für Lehrpersonen, aber auch für Dozierende an Pädagogischen Hochschulen und Universitäten sowie Vertreterinnen und Vertreter ausserschulischer Lernorte, wird das Lernen an ausserschulischen Lernorten aus verschiedenen Fach- und Stufenperspektiven thematisiert. Dabei werden v.a. „Good practice“-Beispiele von Exkursionen vorgestellt und diskutiert. Das Tagungsprogramm setzt sich aus zwei Plenarvorträgen sowie diversen individuell wählbaren Ateliers und Kurzvorträgen zusammen.

Information & Anmeldung:

<http://www.lernwelten.luzern.phz.ch/ausserschulische-lernorte/tagungen-tagungsbaende/tagung-2012>

PHZ Luzern > Organisation > Lernwelten > Ausserschulische Lernorte

Ja - Oui - Sì

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG-SSPES-SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF-SSPMP-VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra Herr/M./Sig. Prof. Dr.

Name/Nom/Cognome:

Vorname/Prenom/Nome:

Adresse/Indirizzo (privat/privato):

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo:

(Land/Pays/Paese):

Email: (Tel):

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita):

Sprache/Langue/Lingua: D F I.

Schule/école/scuola: Kanton/canton/cantone:

Kategorie/Catégorie/Categoria: aktiv/actif/attivo passive/passif/passivo

Student/in, étudiant(e), studente/ssa.

Einsenden an/envoyer à/inviare a:

VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern

oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*

VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout – *Mise en page*

Stéphane Davet davet.stephane@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Inserateverwaltung – *Publicité*

Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

Ganzseitige Fr. 500.–

Halbseitige Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–

über 20 g Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :

VSG – SSPES – SSISS

Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)

3000 Bern

Tel. 056 443 14 54 / Fax 056 443 06 04

Abonnenten, die nicht Mitglieder des VSG sind:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch

Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770

6005 Luzern

Auflage – *Tirage*

900. Erscheint dreimal jährlich.

Vizepräsident VSMP – SSPMP – SSIMF

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutschscheizerische Mathematikkommission

Daniela Grawehr grawehr@kfanet.ch
Schützenstrasse 36 Tel. 041 810 49 88
6430 Schwyz ab 1. August 2012

Deutschscheizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
3005 Bern

Commission Romande de Mathématique

José Luis Zuleta joseluis.zuletaestrugo@epfl.ch
Avenue de Rumine 42 Tél. 021 624 25 46
1005 Lausanne

Commission Romande de Physique

Gordana Gerber gordana.gerber@gymalp.ch
Rue du Stand 111 Tél. 032 342 42 94
2502 Biel/Bienne

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 121 30.11.2012 (20.01.2013)

Nr. 122 31.03.2013 (20.05.2013)

Nr. 123 31.07.2013 (20.09.2013)

Druck und Versand – *Imprimerie*

Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

<http://www.vsmf.ch> — <http://www.sspmp.ch> — <http://www.ssimf.ch>