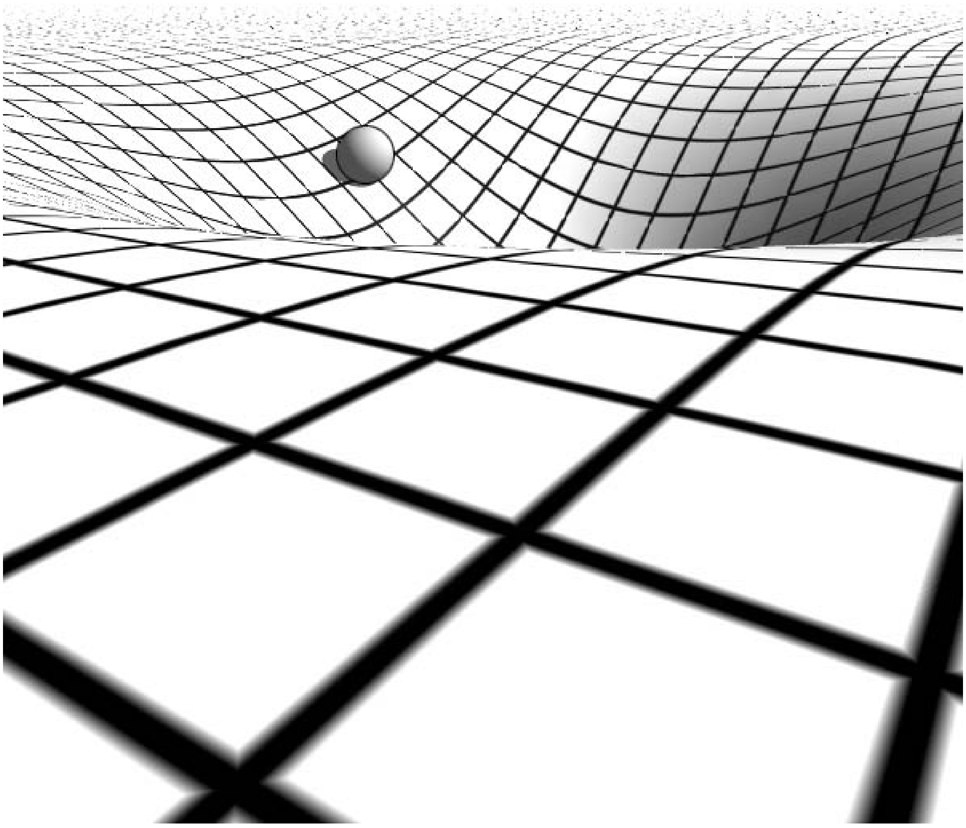
Bulletin

Februar 2012 – Février 2012 N° 118



VSMP — SSPMP — SSIMF

Verein Schweizerischer Mathematik– und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica

In dieser Nummer – *Dans ce numéro*

Internet-Adressen – *Adresses Internet*

http://www.vsmp.ch — http://www.sspmp.ch — http://www.ssimf.ch

Page de titre

Courbure de l'espace-temps cf. page 6.

Leitartikel — Éditorial — Editoriale

Leitartikel

Es sind zwei und gleichzeitig zweierlei Gründe, liebe Kolleginnen und Kollegen, weshalb ich diesem ersten Bulletin des Jahres 2012 die folgenden Zeilen voranstelle. Zum einen ist es ein würdigender Rückblick auf die Präsidialzeit von Elisabeth McGarrity, zum anderen ein besorgt kritischer Blick in die Zukunft, bei dem ich leider nicht einmal so ganz sicher bin, ob er das gemeinte und anvisierte Lesepublikum überhaupt erreichen wird.

Während sechs Jahren, ab der GV im Oktober 2005, hat Elisabeth McGarrity unseren Verein und speziell dessen Vorstand geführt und inspiriert, gelegentlich auch gezogen oder gestossen. Ihr Engagement war gross und überaus vielseitig. Sie setzte sich dafür ein, dass der VSMP auch nach aussen als Verein wahrgenommen wird und nicht nur dessen fünf ständigen Kommissionen, die recht autonom "funktionieren". Nebst dem VSG, mit dessen Gremien ein reger Gedankenaustausch gepflegt wurde und wird, war ihr auch der Kontakt zu den universitären Hochschulen ein zentrales Anliegen. Dank ihrer Zweisprachigkeit spielte es dabei keine Rolle, ob die Sitzungen in Lausanne, Bern oder Zürich stattfanden. Als talentierte und zielstrebige Netzwerkerin konnte sie für den VSMP auch Partnerschaften mit der SMG (Schw. Math. Gesellschaft), der SCNAT (Akademie der Naturwissenschaften) und der SATW (Schw. Akad. d. Tech. Wissenschaften) aushandeln, was im Zusammenhang mit der Stärkung der Naturwissenschaften an den Gymnasien nicht hoch genug eingeschätzt werden kann. Und all ihr Werken und Wirken war stets getragen von einer grossen Menschlichkeit und Herzlichkeit. Für ihren langjährigen und uneigennützigen Einsatz möchte ich ihr auch an dieser Stelle im Namen des Vorstandes meinen grossen Dank aussprechen. Gleichzeitig sind wir froh, dass sie weiterhin im Vorstand verbleibt. In meinen obigen Dank einschliessen möchte ich auch alle übrigen Vorstandsmitglieder, die mit ihrem engagierten Mitdenken und Mittun ebenfalls und immer wieder wesentlich zum Erfolg des VSMP beitragen.

Da wir auf die letzte GV hin weder einen Nachfolger noch eine Nachfolgerin fürs VSMP-Präsidium finden konnten, werde ich vorderhand in meiner Funktion als Vizepräsident die Sitzungen leiten und die Tagesgeschäfte im Auge behalten. Aus diesem Grund möchte ich vor allem an die jüngeren Kolleginnen und Kollegen appellieren, sich im Rahmen des VSMP und seinen Kommissionen zu engagieren. Werdet – sofern noch nicht – Mitglied und helft mit beim Organisieren von Kursen, bei der Herausgabe von Büchern, beim Schreiben von Artikeln oder Durchführen von Wettbewerben und bei der schulpolitischen Arbeit für ein gutes und anspruchsvolles Gymnasium. Als "Lohn" winkt euch die Gesellschaft von ein paar der engagiertesten Kolleginnen und Kollegen aus der ganzen Schweiz. Wir sind ein ganz feines und überaus geselliges "Team", und dies in wechselnder Besetzung schon seit über hundert Jahren, als jener in der Zwischenzeit inflationäre Begriff in unseren Breitengraden noch nicht einmal bekannt war. – Alle Kolleginnen und Kollegen, die bereits dem VSMP angehören, möchte ich eindringlich bitten, ihren jüngeren Kollegen und Kolleginnen, die noch nicht VSMP-Mitglied sind, dieses Bulletin weiterzureichen, damit sich diese selber vom Nutzen des VSMP überzeugen können. Danke!

Hansjürg Stocker, Vizepräsident des VSMP

Éditorial

Il y a, chères et chers collègues, deux raisons, deux raisons de natures différentes pour lesquelles je m'exprime dans ce premier bulletin de l'année 2012. D'une part, une rétrospective de la présidence d'Elisabeth McGarrity, d'autre part, un regard critique que je porte sur l'avenir, en étant malheureusement pas très sûr qu'il atteigne le public visé.

Durant six années, à partir de l'Assemblée Générale d'octobre 2005, Elisabeth McGarrity a présidé notre société, elle a particulièrement conduit et inspiré son Comité qu'elle a parfois dû porter à bout de bras. Elle s'est totalement engagée dans sa fonction et a fait preuve d'une polyvalence exceptionnelle. Elle a œuvré pour que la SSPMP soit considérée de l'extérieur comme une société à part entière et non comme la réunion de ses cinq commissions permanentes qui "fonctionnent" de façon autonome. En complément de sa collaboration et de ses échanges d'idée avec les organes de la SSPES, le contact avec les Universités a été pour elle une préoccupation constante. Grâce à son bilinguisme, les réunions eurent indifféremment lieu à Lausanne, Berne et Zurich et grâce à son sens de la communication et à son goût prononcé des réseaux sociaux, elle a représenté la SSPMP auprès de la SMS (Société mathématique suisse), de la SCNAT (Académie des sciences naturelles) et de la SATW (Académie des sciences techniques) pour contribuer au renforcement de l'enseignement des sciences au secondaire II. Ces multiples activités ont toujours été réalisées avec humanité et chaleur. Je profite de l'occasion pour lui adresser, au nom du Comité, mes vifs remerciements pour son engagement désintéressé et nous sommes heureux qu'elle poursuive son action au sein de notre Comité. J'aimerais inclure dans mes remerciements tous les autres membres du Comité qui, par leur engagement et par leurs idées, ont également contribué de manière significative à la réussite de la SSPMP.

Puisqu'à la dernière Assemblée Générale nous n'avons pas trouvé de successeur à la présidence de la SSPMP, je dirigerai momentanément les séances et suivrai les affaires en cours en ma fonction de vice-président. Pour cette raison, j'appelle particulièrement les jeunes collègues à s'impliquer dans la SSPMP et dans son comité. Devenez membre - si ce n'est pas déjà le cas - et participez à l'organisation de cours, à la publication de livres, à la rédaction d'articles, à la réalisation de concours et au travail de politique scolaire afin de promouvoir une bonne et exigeante formation gymnasiale. Comme "salaire", vous aurez le plaisir de confronter vos idées avec quelques collègues parmi les plus engagés de toute la Suisse. Nous formons une "équipe" très sociable, qui, dans des compositions différentes, existe depuis plus de 100 ans. Je demande avec insistance à tous les collègues déjà membre de la SSPMP de transmettre ce Bulletin à leurs jeunes collègues, pour qu'ils perçoivent personnellement l'utilité de la SSPMP. Merci !

Hansjürg Stocker, Vice-président de la SSPMP

(Traduction de Jean-Marc Ledermann, CRM)

Editoriale

Sono due e di due tipi, care colleghe e cari colleghi, i motivi per cui propongo alla vostra attenzione queste righe nel primo Bollettino del 2012. Da un lato per offrirvi, in retrospettiva, una sintesi della lunga, preziosa e apprezzata presidenza di Elisabeth McGarrity, dall'altro per gettare, in prospettiva, uno sguardo preoccupato e critico sul futuro, sguardo che potrebbe ahimè anche non giungere a destinazione.

Per sei anni, a partire dall'assemblea generale dell'ottobre 2005, Elisabeth McGarrity ha condotto e ispirato - talvolta anche trascinato o spinto - la nostra Società e specialmente il Comitato. Il suo impegno su più fronti è stato enorme: si è applicata affinché la SSIMF venisse considerata non solo al suo interno - tra le cinque commissioni permanenti che si muovono, a dire il vero, in modo alquanto autonomo - ma anche e soprattutto all'esterno. Quindi, accanto ai contatti regolari e vivaci con la SSISS e con i suoi organismi, Elisabeth ha fatto dei rapporti con le Università una sua preoccupazione centrale. Grazie al suo bilinguismo, non importava dove fossero le riunioni: se a Losanna, a Berna o a Zurigo. Instancabile e determinata ha intessuto legami tra la SSIMF e la Società Matematica Svizzera SMS, l'Accademia svizzera di Scienze naturali SCNAT e l'Accademia svizzera delle Scienze tecniche SATW, legami di capitale importanza nel momento in cui si parla di rafforzare l'insegnamento scientifico nei licei. Il suo agire è sempre stato improntato a grande umanità e cordialità. Anche a nome del Comitato, desidero dunque esprimere ad Elisabeth un grande grazie per il suo generoso impegno di tanti anni e per aver deciso, con nostra grande soddisfazione, di rimanere nel Comitato. Il mio grazie vada anche agli altri membri del Comitato, che contribuiscono con riflessioni e collaborazioni al successo della SSIMF.

Poiché nemmeno nell'ultima assemblea generale siamo riusciti a trovare una persona che sostituisca Elisabeth alla presidenza, temporaneamente sarò io, come vicepresidente, a dirigere le sedute e a sbrigare gli affari correnti. Mi appello ora soprattutto alle colleghe e ai colleghi più giovani per invitarli ad impegnarsi nella SSIMF e nelle sue commissioni: se ancora non lo siete, diventate membri della Società ed aiutateci a organizzare corsi di aggiornamento, a pubblicare libri, a scrivere articoli, a coordinare concorsi di matematica o di fisica in ambito scolastico, a contribuire alle scelte di politica scolastica perché il nostro rimanga un liceo esigente e di livello elevato. La vostra ricompensa sarà di lavorare in compagnia di colleghe e colleghi fra i più impegnati, provenienti da tutta la Svizzera. Da più di cento anni, anche se le persone si avvicendano /cambiano, riusciamo a costituire un team in cui è simpatico, gradevole ed anche gratificante lavorare. - Prego con insistenza i colleghi e le colleghe che già fanno parte della SSIMF di trasmettere questo Bollettino ai giovani colleghi che ancora non ne sono membri perché si possano convincere dell'utilità della SSIMF. Grazie !

Hansjürg Stocker, Vicepresidente della SSIMF

(Traduzione di Arno Gropengiesser, CMSI)

Un sito web che val la pena di visitare
Un site internet qui mérite une visite
Eine Internetseite, deren Besuch sich lohnt

Die drei Mathematikkommissionen danken Hansruedi Schneebeli (Wettingen) für den Hinweis auf eine reichhaltige und interessante Internetseite, auf die ihn seinerseits Christoph Leuenberger (Fribourg) aufmerksam machte.

La rivista semestrale **Accromath** http://www.accromath.ca , redatta dall'Istituto delle scienze matematiche del Québec e dal Centro di ricerche matematiche del Canada, è rivolta in particolare agli studenti e ai docenti delle scuole secondarie superiori.
I temi proposti riguardano le applicazioni della matematica, biografie di matematici, approfondimenti su argomenti specifici (vedere *Archivio* per le edizioni precedenti); vi compare pure una rubrica "Paradossi" e un angolo "Problemi". Gli articoli offrono dunque un ventaglio molto ampio di suggerimenti che possono essere utili per un lavoro di maturità, per la programmazione dell'opzione specifica Fisica e applicazioni della matematica, dell'opzione complementare Applicazioni della matematica come pure per i corsi della disciplina fondamentale.
Questa pubblicazione arricchisce il panorama dei periodici sul tema quali il *Bulletin* della SSIMF o *XlaTangente*; visitate il sito di **Accromath** e giudicate voi. A. Gropengiesser, CMSI

Le Bulletin de la SSPMP publie d'excellents articles, souvent utiles pour l'enseignant, mais il existe d'autres périodiques spécialisés dans l'enseignement gymnasial des mathématiques, en particulier le magazine français *Tangente*, vendu dans les kiosques, est destiné à nos élèves. La revue québécoise **Accromath**, produite par l'Institut des sciences mathématiques et le Centre de recherches mathématiques a la particularité d'être gratuite, elle est disponible sur internet, à l'adresse http://www.accromath.ca où une dizaine de numéros peuvent être téléchargés. Le site propose également des abonnements papier gratuits. Cette revue présente des articles pouvant faire l'objet d'une amorce pour un travail de maturité ou un cours d'applications des mathématiques. Au sommaire de chaque numéro, on trouve plusieurs dossiers, généralement sur des thèmes d'applications des mathématiques, un article sur un mathématicien connu, une rubrique "Paradoxes" est une section "problèmes". Jetez un coup d'œil sur ce site, ça en vaut la peine. J.-M. Ledermann, CRM

Während die Zeitschrift «Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem» der Canadian Mathematical Society/ Société mathématique du Canada hauptsächlich eine Zeitschrift mit Aufgaben und Lösungen im Bereich Sek II/Studienbeginn ist, deren Beiträge in Englisch und/oder Französisch abgefasst sind, widmet sich die vom Institut des science mathémati-ques (Québec) und vom Centre de recherches mathématiques (Montréal) gemeinsam herausgegebene und semesterweise erscheinende Zeitschrift **Accromath** ganz verschiedenartigen mathematischen Themen. Da dem Bereich der Anwendungen viel Platz eingeräumt wird, eignen sich viele Artikel als Inspirationsquellen für Maturaarbeiten. Daneben gibt's auch noch das Dossier 'Portrait d'un mathématicien', die 'Rubrique des Paradoxes' sowie eine Aufgabenecke.
Und all diese Themenbereiche sind via http://www.accromath.ca jederzeit frei zugänglich und können als pdf-Files heruntergeladen werden. Und über 'Archives' ist darüber hinaus der sofortige Zugriff auf frühere Hefte und Artikel möglich. Ein Besuch dieser Homepage lohnt sich! Hj. Stocker, DMK

Cours de perfectionnement 2011

Mathématiques et sciences de l'Univers

Cinquante-trois enseignants de Suisse romande et du Tessin ont participé au premier cours de perfectionnement organisé conjointement par la Commission Romande de Mathématique et la Commissione di Matematica della Svizzera Italiana dans le charmant village tessinois de Brissago entre le 27 et le 30 septembre 2011. Le cours a bénéficié du support logistique du Centre suisse de formation continue des professeurs de l'enseignement secondaire.

Le cours a commencé par un exposé de Gerhard Wanner sur la naissance de l'astronomie, ayant comme fil conducteur les contributions de Kepler, Galilée, Newton, Euler et Gauss. Par la suite, Ruth Durrer a donné une introduction à la Relativité Générale dont l'idée fondamentale (exprimée par les équations d'Einstein) est que la matière déforme l'espace-temps et qu'à son tour, la courbure de l'espace-temps détermine le mouvement de la matière. Ruth Durrer a ensuite discuté les principales conséquences de la théorie de la Relativité Générale, à savoir les trous noirs et les ondes gravitationnelles. De leur côté, Martin Kunz a fait une introduction à la cosmologie et a décrit différents modèles d'évolution de l'Univers et Katarzyna Zuleta a discuté des modèles d'Univers à plus de quatre dimensions et leur rôle dans l'unification des interactions fondamentales. Le dernier jour du cours a commencé par une présentation de Georges Meynet sur la physique des étoiles et leur importance dans l'étude de l'Univers (mesure des distances, expansion accélérée de l'Univers) et s'est terminé par un exposé de Gerhard Wanner sur la naissance du calcul scientifique et en particulier du principe variationnel qui est fondamental en physique.

José Luis Zuleta

Il primo corso di aggiornamento organizzato congiuntamente dalla Commissione romanda di matematica e dalla Commissione di matematica della Svizzera italiana dal 27 al 30 settembre 2011 a Brissago ha visto la partecipazione di cinquantatre insegnanti romandi e ticinesi. Il corso ha beneficiato del sostegno logistico del Centro svizzero di formazione continua per insegnanti delle scuole secondarie.

Il corso è stato aperto da una relazione di Gerhard Wanner sulla nascita dell'astronomia, seguendo il filo conduttore dato da contributi di Kepler, Galileo, Newton, Euler e Gauss. Ruth Durrer ha poi proposto un'introduzione alla Relatività Generale il cui concetto fondamentale, espresso dalle equazioni di Einstein, è che la massa deforma lo spazio-tempo e che, a sua volta, la curvatura dello spazio-tempo determina il moto della massa. Ruth Durrer ha poi discusso le principali conseguenze della teoria della Relatività Generale, in particolare i buchi neri e le onde gravitazionali. Martin Kunz ha proposto un'introduzione alla cosmologia e ha descritto differenti modelli dell'Universo, mentre Katarzyna Zuleta ha discusso dei modelli dell'Universo con più di quattro dimensioni e del loro ruolo nell'unificazione delle interazioni fondamentali. L'ultimo giorno del corso è iniziato con una presentazione di Georges Meynet sulla fisica delle stelle e sulla loro importanza per lo studio dell'Universo (misura di distanze, espansione accelerata dell'Universo) e si è concluso con una relazione di Gerhard Wanner sulla nascita del calcolo scientifico, con particolare riguardo al principio variazionale, fondamentale in fisica.

Arno Gropengiesser

Bericht zu einer Maturaarbeit

Leandro Moldes (Matura 2011), Dr. Karl Stoop (Betreuer)

Berner Maturitätsschule für Erwachsene (BME)
Gymnasium Bern - Neufeld

L. Moldes entschied sich im Frühling 2010 seinen Interessen entsprechend eine Maturaarbeit zum Thema „Diophantische Gleichungen" zu verfassen. Um die Arbeit nicht fast ausschliesslich auf Bekanntes zu stützen, schlug der Betreuer vor, ein besonderes Augenmerk auf die Diophantische Gleichung

$$2x^2 + y^2 = z^3 \qquad (\text{mit } x, y, z \in N)$$

zu richten. Diese Gleichung wurde nicht der Literatur entnommen, sondern nach kurzem Experimentieren gewählt, nachdem einige Lösungen mit kleinen Zahlen erkannt worden waren (z.B. (3/3/3), (1/5/3), (10/4/6)).

L. Moldes packte die Aufgabe so an, dass er zuerst Spezialfälle untersuchte:

1. $x = y = z$: Die Gleichung lautet dann $3x^2 = x^3$, nach Division durch x^2 folgt $x = 3$, also gibt es einzig die Lösung (3/3/3).

2. $x = y$: Die Gleichung lautet dann $3x^2 = z^3$ und wegen der Identität $3(3a^3)^2 = (3a^2)^3$ gibt es unendlich viele Lösungen, alle mit $ggT(x,y,z) = 3a^2 = z$. Beispiele: $a = 1 \rightarrow$ (3/3/3), $a = 2 \rightarrow$ (24/24/12), $a = 3 \rightarrow$ (81/81/27).

3. $x = z$: Die Gleichung lautet dann $2x^2 + y^2 = x^3$, es folgt $y^2 = x^2(x-2)$, da links eine Quadratzahl steht, muss dies auch rechts sein, folglich ist notwendig und hinreichend, dass $x-2$ eine Quadratzahl ist. Beispiele: $x = 3 \rightarrow$ (3/3/3), $x = 6 \rightarrow$ (6/12/6), $x = 11 \rightarrow$ (11/33/11). Es gibt also unendlich viele Lösungen, alle mit $ggT(x,y,z) = x = z$.

4. $y = z$: Die Gleichung lautet dann $2x^2 + y^2 = y^3$ bzw. $2x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y-1)$. Diese Gleichung $2x^2 = y^2(y-1)$ hat keine Lösungen mit geradem y, denn dann hätte die Zahl links eine ungerade Anzahl Primfaktoren 2, die Zahl rechts jedoch eine gerade Anzahl Primfaktoren 2. Folglich ist noch der Fall y ist ungerade, d.h. y hat die Form $y = 2n + 1$ zu verfolgen:
Die Gleichung lautet damit $2x^2 = (2n+1)^3 - (2n+1)^2$, Klammern aufgelöst und vereinfacht:

$$2x^2 = 8n^3 + 8n^2 + 2n$$
$$x^2 = 4n^3 + 4n^2 + n = (2n + 1)^2 n$$
$$\text{also} \quad x = (2n+1)\sqrt{n},$$

folglich ist notwendig und hinreichend, dass n eine Quadratzahl ist $\rightarrow y = z = 2m^2 + 1$.
Mit diesem Ansatz folgt $2x^2 = (2m^2+1)^3 - (2m^2+1)^2$, Klammern aufgelöst und vereinfacht

$$2x^2 = 8m^6 + 8m^4 + m^2 = (2m^3 + m)^2$$
$$x^2 = 4m^6 + 4m^4 + m^2 = (2m^3 + m)^2$$
$$\text{also} \quad x = 2m^3 + m$$

folglich sind alle Tripel $(2m^3 + m, 2m^2 + 1, 2m^2 + 1)$ mit $m \in N$ unendlich viele Lösungen, alle mit $ggT(x,y,z) = y = z$. Beispiele: $m = 1 \rightarrow$ (3/3/3), $m = 2 \rightarrow$ (18/9/9), $m = 3 \rightarrow$ (57/19/19).

Es gilt also die algebraische Identität $2(2m^3 + m)^2 + (2m^2 + 1)^2 = (2m^2 + 1)^3$

5. Alle drei Variablen verschieden: Auf ähnliche Weise wie unter 4. hat L. Moldes die algebraische Identität

$$2(2a^3 + ab^2)^2 + (2a^2b + b^3)^2 = (2a^2 + b^2)^3 \qquad (*)$$

gefunden und folglich gilt $2x^2 + y^2 = z^3$ mit $z = 2a^2 + b^2$

$$x = 2a^3 + ab^2 = a(2a^2 + b^2) = az$$

und $y = 2a^2b + b^3 = b(2a^2 + b^2) = bz$

Für $a \neq b$ und $a > 1$, $b > 1$ sind diese drei Zahlen x, y und z alle verschieden und es werden unendlich viele Lösungstripel beschrieben, alle mit ggT(x,y,z) = z.

Beispiele: a = 2, b = 3 → (34/51/17), a = 3, b = 2 → (66/44/22).

6. Numerische Auswertungen zeigen, dass es auch Lösungen mit ggT(x,y,z) < z gibt, insbesondere solche mit ggT(x,y,z) = 1. Beispiele sind etwa (1/5/3), (10/4/6) oder (38/45/17). Diese können zumindest teilweise auch mit der Formel (*) erhalten werden, wenn für a und b auch Brüche verwendet werden, etwa (1/5/3) mit $a = {}^1/_3$ und $b = {}^5/_3$.

Alle Lösungen der Gleichung $2x^2 + y^2 = z^3$ mit $z < 20$
(grau unterlegt sind die Lösungstripel mit ggT(x,y,z) = 1)

x	y	z
3	3	3
1	5	3
10	4	6
6	12	6
18	9	9
12	21	9
10	23	9
25	9	11
11	33	11
8	40	12
24	24	12
38	45	17
34	51	17
46	40	18
42	48	18
18	72	18
57	19	19
45	53	19

An dieser Stelle wird die Untersuchung in der Maturaarbeit abgebrochen. Hinterher wurden noch einige zusätzliche Ergebnisse gefunden, z.B. dass aus der Lösung (1/5/3) weitere Lösungen $(n^3/5n^3/3n^2)$ mit $n \in N$ folgen. Die Frage, ob es unendlich viele Lösungen mit ggT(x,y,z) = 1 gibt, konnte nicht beantwortet werden.

Übungsblatt zum Thema Integrationsrechnung

Wie viele Funktionen soll ein Mensch in seiner Mittelschulkarriere integrieren? Welche Integrationsmethoden sind noch zeitgemäss im CAS-Jahrhundert? Dies sind schwierige Fragen, auf denen ich die richtige Antwort nicht kenne und die ich hier auch nicht thematisieren möchte. Tatsache ist, dass die ETH-Zürich die Basisprüfung in Analysis noch immer flächendeckend ohne Taschenrechner durchführt und dass die Studierenden, um die Prüfung zu bestehen, eine Menge an Handwerk zeigen müssen. In *The College Mathematics Journal* von der MAA, Vol. 42, No. 3, May 2011, bin ich auf folgende Liste von Integralen gestossen. Es ist eine kleine, aber sehr interessante Auswahl aus dem Gebiet der Integrationsrechnung. Die Integrale auf der gleichen Zeile sehen sehr ähnlich aus aber verlangen jeweils ganz andere Integrationstechniken. Eine gute Übung um zu prüfen, ob man die Integrationsrechnung beherrscht!

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale – beachten Sie, dass genau ein Integral keine Stammfunktion hat.

1. a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+4}$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x}$
2. a) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+3}{x+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+3}\,dx$
3. a) $\displaystyle\int \sqrt{4+x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{4+x^2}$ c) $\displaystyle\int x\sqrt{4+x^2}\,dx$
4. a) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,dx$ c) $\displaystyle\int \cos^2 3x\,dx$
5. a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$ b) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos x\,dx$ c) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$
6. a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int x\ln x\,dx$ c) $\displaystyle\int \ln x\,dx$
7. a) $\displaystyle\int e^{x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int xe^{x}\,dx$

Probieren Sie doch mal ein paar Zeilen aus mit Ihren Schülern und Schülerinnen, ich würde mich freuen über eine Rückmeldung.

Meike Akveld, akveld@math.ethz.ch

Ein Lehrbuch, ein Casinoführer, ein Roboter und Poker

Bericht über einige mathematische Maturitätsarbeiten

Armin P. Barth
KS Baden

«*Math class is tough!*» wussten einige sprechende Barbie-Puppen in den 90er-Jahren. Das war einer von 270 möglichen Sätzen, die damals den Puppen einprogrammiert wurden, und erst nach heftigen Protesten verzichteten die Hersteller auf diesen Satz. Dass der Satz dennoch wahr ist, wenn auch im denkbar positivsten Sinn, spüren Mathematiklehrpersonen immer wieder; sie merken es zum Beispiel daran, dass mathematische Maturitätsarbeiten relativ selten gewählt werden.

Im Sinne einer Anregung möchte ich im Folgenden über einige aus meiner Sicht besonders gelungene Arbeiten berichten, die zu betreuen ich in den vergangenen Jahren das Vergnügen hatte; es handelt sich um ein Lehrbuch, einen Casinoführer, einen sechsbeinigen Roboter und ein Lesebuch über Poker.

Mathematik – leicht verständlich

Eine Schülerin, die im Frühjahr 2011 die Maturitätsprüfung ablegte, hatte sich nicht weniger zum Ziel genommen, als den gesamten Stoff der 1. und 2. Klasse Gymnasium aufzuarbeiten und in einem Buch schülergerecht darzustellen. Ich war erst skeptisch, weil ich, ohne anmassend erscheinen zu wollen, selber sehr viel mehr darüber weiss, wie mathematische Stoffe schülergerecht aufbereitet werden können als eine Schülerin, die noch mitten im Lernprozess steht. Wozu also diese Arbeit?

Anita L., Verfasserin von „Mathematik – leicht verständlich“

Anita musste sich selber wieder in den schon länger zurückliegenden Stoff und einen möglichen, überzeugenden Aufbau einarbeiten. Sie befragte zudem Schülerinnen und Schüler nach besonderen Problemen und Lehrpersonen nach besonders herausfordernden Knackpunkten in den einzelnen Kapiteln, um diesen dann besonders viel Beachtung und Raum zu schenken. Und am Ende legte sie ein 155 Seiten starkes Buch vor, das die einzelnen Kapitel übersichtlich und gut illustriert behandelt und das mit Beispielen, Tipps, Taschenrechnerhinweisen, Querbezügen, einem Stichwortverzeichnis und einer ausführlichen Formelsammlung ausgestattet ist. Meine anfängliche Skepsis war verflogen: Als Ergänzung zum Unterricht halte ich das Werk für sehr wertvoll; gerade für Schülerinnen und Schüler, die nicht mit einem Buch oder Skript arbeiten, bietet das Werk die Möglichkeit nachzulesen, zu vertiefen, alles noch einmal aus einem anderen Blickwinkel zu beleuchten.

Die Werbung an meiner Schule und den anderen kantonalen Schulen lief gut an, und Anita verkaufte gleich nach Fertigstellung des Buches deutlich mehr Exemplare als erhofft. Das Buch wurde von einer Schülerin und für Schülerinnen und Schüler geschrieben, ein Unternehmen, das trotz meiner anfänglichen Skepsis zu einem hervorragenden Ergebnis geführt hat.

Glücksspiele und ihre Gewinnchancen

Zwei meiner ehemaligen Schüler waren begeisterte Spieler. Ob Roulette, Black Jack oder Poker, die Spiele und vor allem ihre mathematischen Analysen faszinierten Martin M. und Martin H.

Daher beschlossen sie, einen mathematischen Casinoführer zu schreiben, der den Benutzern eine Hilfestellung sein soll bei dem Besuch eines Casinos. Nicht zuletzt dank der Unterstützung des Casinos Baden gelang ihnen eine besonders schön illustrierte Arbeit, in der Lotto, Toto, Keno, Roulette, Bingo, Poker und Black Jack vorgestellt und mit kombinatorischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden analysiert wurden.

Eine Maschine lernt laufen

Das Ziel einer älteren Arbeit war, einen sechsbeinigen Roboter zu entwickeln, der sich selbständig fortbewegt; Bewegung und Koordination seiner Beine sollten mit Hilfe eines neuronalen Netzwerks trainiert werden. Thomas B., mein Schüler, las sich ein in bedeutende Vorarbeiten auf dem Gebiet der Laufmaschinenentwicklung, die damals vor allem an deutschen Universitäten geleistet worden sind. Dank dieser Vorarbeiten konnte er sich relativ schnell für die Grundstruktur (Abmessungen, Antriebsart, ungefähre Steuerstruktur) des Roboters entscheiden. Die Konstruktion der Beine machte detaillierte Berechnungen nötig. Zur Steuerung des Roboters waren einerseits genaue Kenntnisse der Elektronik und andererseits detaillierte Kenntnisse moderner Trainingsalgorithmen, insbesondere diverser neuronaler Netzwerke, nötig. Der auf *Error-Backpropagation* beruhende Netzwerkalgorithmus ist von hoher mathematischer Komplexität.

$$\frac{\delta E_{tot}}{\delta w_{IJ}^{l-1,l}} = -\sum_{i_1=1}^{n_o} \left\{ \left(d_{i_1} - a_{i_1}^{o}\right) \cdot \sigma'\left(x_{i_1}^{o}\right) \cdot \sum_{i_2=1}^{n_{o-1}} \left\{ w_{i_2,i_1}^{o-1,o} \cdot \sigma'\left(x_{i_2}^{o-1}\right) \cdot \sum_{i_3=1}^{n_{o-2}} \left[w_{i_3,i_2}^{o-2,o-1} \cdot \sigma'\left(x_{i_3}^{o-2}\right) \cdot \frac{\delta x_{i_3}^{o-2}}{\delta w_{IJ}^{l-1,l}} \right] \right\} \right\}$$

Dass Thomas mit Formeln wie der abgebildeten umzugehen verstand, ist alles andere als selbstverständlich. Dank über 400 Stunden Arbeitsaufwand und nie nachlassendem Eifer gelang ihm eine Arbeit, die Lichtjahre über dem Standard durchschnittlicher Maturitätsarbeiten liegt – eine Qualität, die nur erreicht werden kann, wenn sich jemand mit Haut und Haar einer Aufgabe verschreibt. Dann aber sind Jugendliche zu Leistungen imstande, die sich auf einem geradezu schockierend hohen Niveau bewegen – schockierend, wenn man damit das fachliche Niveau kontrastiert, das im „Normalunterricht" durchschnittlich erreicht wird.

Ein Roman über Poker

Vor einigen Jahren haben Peter Gritzmann und René Brandenberg mit «*Das Geheimnis des kürzesten Weges*» einen ganz hervorragenden Roman über Graphentheorie geschrieben, der sich sehr direkt an Jugendliche wendet. Angetan von der Idee, dass man mit wirklich gut geschriebenen, stufengerechten, humorvollen Texten Jugendliche sicherlich für Mathematik begeistern kann, schlug ich kürzlich das Thema vor, Poker, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung in eine Art Jugendroman zu verpacken. Ich wollte gewissermassen das Gegenteil eines trockenen Lehrbuches, eine Geschichte, die sich in der Welt der Jugendlichen abspielt und bei der sich alles um Poker dreht und Mathematik nicht deshalb vorkommt, weil ein Lehrplan es vorschreibt, sondern weil es das am besten geeignete Werkzeug ist, um die anfallenden Probleme zu lösen.

Glücklicherweise haben zwei meiner Schüler, Nikita K. und Alain S., angebissen und entwickeln nun ein Buch und eine Website. Die ersten Ergebnisse sind sehr erfreulich: Die Geschichte handelt von Jugendlichen, die sich zu einem Pokerabend treffen und mehr über dieses Spiel lernen wollen, und in ganz ungekünstelter Weise treten Fragen um reale Spielsituationen auf, die nur mit einer cleveren Portion Mathematik beantwortet werden können…

147 Konzerne kontrollieren die Weltwirtschaft

- Eine Anwendung zur Matrixrechnung

Armin P. Barth

Im Herbst 2011 schaffte es eine Nachricht auf die Titelblätter vieler Zeitungen dieser Welt: Nur 147 Konzerne kontrollieren die ganze Wirtschaft, in den Händen von nur 147 Firmen konzentriert sich ein Grossteil der Kontrolle über den globalen Kapitalismus. Forscher von der ETH Zürich hatten die Datenbank *Orbis*[1] mit etwa 37 Millionen Firmen durchkämmt, und dann war ihr Kamm hängen geblieben in einem wechselseitig stark vernetzten Knoten von nur 147 transnationalen Konzernen, die eine weit überdurchschnittliche Kontrolle ausüben über weite Teile der restlichen Wirtschaft. James Glattfelder, einer der Autoren der Originalstudie[2], meinte gegenüber der «SonntagsZeitung», man habe nicht erwartet, dass die Macht im Zentrum derart konzentriert sein würde.

Im Abstract schreiben die Autoren:

> «We present the first investigation of the architecture of the international ownership network, along with the computation of the control held by each global player. We find that transnational corporations form a giant bow-tie structure and that a large portion of control flows to a small tightly-knit core of financial institutions. This core can be seen as an economic "super-entity" that raises new important issues both for researchers and policy makers.»

Die ersten zehn Plätze der nach ihrer Kontrollstärke sortierten Liste belegen die folgenden Konzerne: 1.) Barclays PLC, 2.) The Capital Group Companies Inc., 3.) FMR Corp., 4.) AXA, 5.) State Street Corporation, 6.) JPMorgan Chase & Co., 7.) Legal & General Group PLC, 8.) The Vanguard Group, Inc., 9.) UBS AG, 10.) Merrill Lynch & Co. Inc. Gemäss den Autoren liegt ein Hauptproblem darin, dass sich ein so kompakter Knoten kaum mehr aufbrechen oder reformieren lässt und dass eine so hohe Konzentration von Macht in einem kleinen Knoten die freie Entfaltung eines gesunden Wettbewerbs behindert.

Es erhebt sich die Frage, ob wir verstehen können, was die Autoren genau unter „Kontrolle" verstehen und wie berechnet werden konnte, welcher Konzern über „wie viel Kontrolle" im Netz der Weltwirtschaft verfügt. Glücklicherweise zeigt eine vertiefte Lektüre der Originalarbeit, dass ein wenig Graphentheorie und Matrixrechnung ausreichen, um diese Fragen zu beantworten. Damit öffnet sich eine aktuelle und heissdiskutierte Problemsituation für eine gewinnbringende Behandlung im gymnasialen Mathematikunterricht. Die folgenden Abschnitte sollen zeigen, wie reizvoll es für Schülerinnen und Schüler sein kann, zu sehen, dass mathematische Methoden, die ihnen unter Umständen entrückt und weltfremd erscheinen, plötzlich für tiefgreifende neue Erkenntnisse und weltumspannende Schlagzeilen sorgen.

[1] http://www.bvdep.com/en/ORBIS

[2] Stefania Vitali, James B. Glattfelder, Stefano Battiston, „*The network of global corporate control*", Systems Design, ETH Zurich, Switzerland

Eine riesige Matrix

Die Autoren der Studie beginnen damit, eine Matrix $W = [w_{i,j}]$ zu entwerfen, die die gegenseitigen Besitzverhältnisse aller berücksichtigten Firmen abbildet. Dabei drückt $w_{i,j} \in [0,1]$ den Prozentsatz der Firma j aus, die sich im Besitz der Firma i befindet.

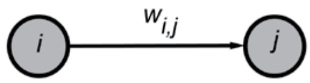


Abb. 1

Die in der Originalstudie untersuchte Matrix ist riesig! In der Tat bildet sie 1'006'987 Pfeile von und zu insgesamt 600'508 Knoten ab, und das rückt die Relevanz solch gigantischer mathematischer Strukturen eindrücklich ins Bewusstsein. Ist nun v_j der Marktwert der Firma j, so hält Firma i also $w_{i,j} \cdot v_j$ Anteile der Firma j. Besitzt Firma j ihrerseits $w_{j,l}$ Prozente der Firma l, so besitzt Firma i indirekt $w_{i,j} \cdot w_{j,l} \cdot v_l$ des Wertes von Firma l.

Im abgebildeten Beispiel ist offenbar $w_{1,2} = 0.9$, $w_{2,3} = 0.51$ und $w_{2,4} = 0.45$, während alle restlichen Matrixeinträge Null sind, so dass also

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.51 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

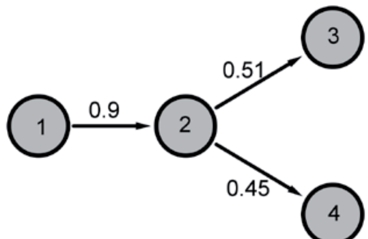


Abb. 2

Und Konzern 1 besitzt indirekt $w_{1,2} \cdot w_{2,3} = 0.9 \cdot 0.51 = 0.459$ des Wertes von Konzern 3 und gleichzeitig ebenfalls indirekt $w_{1,2} \cdot w_{2,4} = 0.9 \cdot 0.45 = 0.405$ des Wertes von Konzern 4. Da nur die Kontrolle über *andere* Konzerne untersucht wurde, bleibt die Diagonale voller Nullen.

Was ist Kontrolle?

Kontrolle ist kein genau definierter Begriff. Es ist daher unerlässlich, diesen zunächst eher diffusen Terminus zu modellieren durch eine präzise und berechenbare Grösse. Die Autoren der Originalstudie bringen gleich mehrere Modelle ins Spiel, von denen hier die beiden ersten erwähnt werden sollen. Im *linearen Modell* (LM) geht man davon aus, dass eine Aktie gleich einer Stimme und somit auch gleich einer „Kontrolleinheit" ist. Man kann dann für das Beispiel in Abb. 2 sagen, dass Konzern 1, da er ja 90% des Aktienkapitals von Konzern 2 hält, auch über 90% der Kontrolle über Konzern 2 verfügt. Im linearen Modell ist die Kontrollmatrix C also einfach identisch mit der Matrix W. Im *Threshold-Modell* (TM) dagegen wird argumentiert, dass derjenige, der die Mehrheit am Aktienkapital einer Firma hält, automatisch bestimmt, ganz egal, wie weit dieser Wert über 50% liegt. Anteile von über 50% werden also als volle Kontrolle interpretiert, und die Kontrollmatrix C entsteht somit aus W einfach dadurch, dass alle Einträge über 0.5 auf 1 erhöht und alle restlichen auf Null gesetzt werden.

Kontrollmatrix für Abb. 2 nach LM:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.51 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrollmatrix für Abb. 2 nach TM:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erstaunlicherweise sind die Ergebnisse der Studie sehr robust in Bezug auf die Wahl des Modells, was den möglichen Einwand entkräftet, sie seien bloss das Resultat einer unrealistischen Wahl des Modells.

Berechnung der Kontrollwerte

Das Hauptergebnis der Studie ist ja ein Ranking der Kontrolle, die die einzelnen Konzerne innerhalb des Netzwerks aller betrachteten Konzerne ausüben. Wie genau entsteht dieses Ranking? Zunächst wird ein noch unbekannter *Netzwerkkontrollvektor* $\overrightarrow{c^{net}} = \left(c_1^{net}, c_2^{net}, \ldots, c_n^{net}\right)^T$ eingeführt. An der beliebigen Stelle *i* steht die zu bestimmende Grösse oder Stärke der Netzwerkkontrolle, die Konzern *i* über die anderen Konzerne ausübt. Sie setzt sich zusammen aus der direkten Kontrolle, die Konzern *i* über diejenigen Konzerne ausübt, die er mitbesitzt, und andererseits aus der indirekten Kontrolle, die *i* über Drittfirmen ausübt, weil Anteile dieser im Portfolio derjenigen Firmen sind, die *i* direkt mitbesitzt. Folglich lässt sich c_i^{net} folgendermassen rekursiv formalisieren:

$$c_i^{net} = \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot v_j + \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} \cdot c_j^{net}$$

oder, in Matrixform:

$$\overrightarrow{c^{net}} = C \cdot \vec{v} + C \cdot \overrightarrow{c^{net}} \qquad (1)$$

Für das Beispiel in Abb. 2 etwa wäre nach linearem Modell

$$\begin{aligned} c_1^{net} &= C_{1,2} \cdot v_2 + C_{1,2} \cdot c_2^{net} \\ &= 0.9 \cdot v_2 + 0.9 \cdot \left(C_{2,3} \cdot v_3 + C_{2,4} \cdot v_4\right) \\ &= 0.9 \cdot v_2 + 0.9 \cdot 0.51 \cdot v_3 + 0.9 \cdot 0.45 \cdot v_4 \end{aligned}$$

Um aus (1) den gesuchten Netzwerkkontrollvektor zu gewinnen, ist etwas Matrixrechnung nötig:

$$\begin{aligned} (1) \ &\Rightarrow I \cdot \overrightarrow{c^{net}} = C \cdot \vec{v} + C \cdot \overrightarrow{c^{net}} \qquad \text{(wenn } I \text{ die Einheitsmatrix ist)} \\ &\Rightarrow \left(I - C\right) \cdot \overrightarrow{c^{net}} = C \cdot \vec{v} \\ &\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{c^{net}} = \left(I - C\right)^{-1} \cdot C \cdot \vec{v}} \qquad (2) \end{aligned}$$

Damit ist nun klar, wie die Netzwerkkontrollwerte der einzelnen Konzerne zu berechnen sind: Abhängig vom gewählten Modell wird die Matrix C aufgestellt, und dann sorgt der nach (2) berechnete Vektor für das Ranking der einzelnen Netzwerkkontrollstärken.

Beispiele

Betrachten wir das wohl einfachste aller Beispiele: Besitzt die Firma 1 die Firma 2 ganz, so ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit, wenn wir vereinfachend $v_1 = v_2 = 1$ annehmen:

$$(I - C)^{-1} \cdot C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Firma 1 hat also (natürlich) volle Kontrolle über 2, während 2 in diesem Netzwerk eine Kontrolle von 0 ausübt. Für das Beispiel in Abb. 2 ist nach dem linearen Modell

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.51 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir vereinfachend annehmen, dass $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$ ist, so führt (2) hier auf

$$(I - C)^{-1} \cdot C \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.51 & -0.45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.51 & 0.45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Während Konzerne 3 und 4 in diesem Netzwerk über keinerlei Kontrolle verfügen, übt 3 doch eine beachtliche Kontrolle aus. Netzwerkbeherrschend ist aber Konzern 1 mit einer Kontrollstärke von 1.8, was 64% der akkumulierten Gesamtkontrolle von 2.8 entspricht. Mit dieser Methode fanden die Autoren der Studie, dass nur 737 Konzerne rund 80% der gesamten weltweiten Netzwerkkontrolle akkumulieren, und dass innerhalb dieser Gruppe ein Kern von 147 Firmen fast vollständige Kontrolle über sich selber und grosse Teile der restlichen Wirtschaft ausübt.

<u>Aufgabe:</u>
In der erwähnten Studie (Supporting Information, p. 22/36, Figure S4) schlagen die Autoren die Untersuchung des rechts abgebildeten Beispiels vor. Es macht Aspekte deutlich, die in Wirklichkeit eben auch bestehen, nämlich die starke wechselseitige Verflechtung von Besitz in der heutigen Wirtschaftwelt und die „Flaschenhals-Struktur“ realer Netzwerke. Bestimmen Sie die Netzwerkkontrollwerte nach beiden in diesem Artikel vorgestellten Modellen.

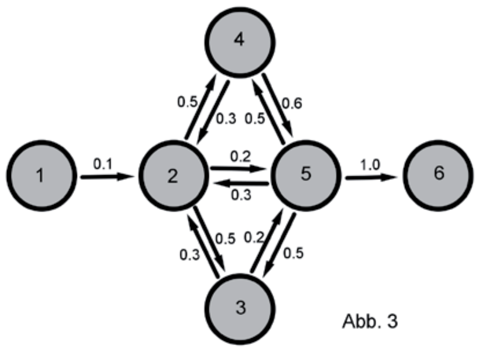


Abb. 3

„Die Mannigfalte“
Eindrücke zu einem mathematischen Theaterstück

Melissa Dornheim, Nicole Burian

Was ist Mathematik?
Leidenschaft!

Mühsam!

Etwas Weltfremdes!
Oder doch die Erklärung der Welt?

Da war ich immer schlecht drin!

Ein Rätsel!

Was ist Mathematik?

Dieser Frage geht auch die Theatertruppe *Matterhorn* in ihrem unterhaltenden Theaterstück *„Die Mannigfalte - ein algebraisches Varieté“* nach.

Wer sich auf die Reise begibt, erlebt ein Mosaik aus Tanz, Gesang, Musik und nicht zuletzt aus Mathematik. Man hört Auszüge aus Interviews mit Mathematikern in denen sie erklären, was sie unter Mathematik verstehen. Klischees werden ans Tageslicht gebracht, Anekdoten werden erzählt. Die Schauspieler schlüpfen abwechselnd in verschiedenen Rollen: Da ist die verträumte Schülerin, die zwar in Mathematik nicht gut ist und eher an ihre derzeitige grosse Liebe denkt, aber dennoch (oder gerade deswegen?) etwas der Mathematik abgewinnen kann. Oder der Mathematik Professor, der mit Begeisterung die Zuschauer mit den verschiedenen „Arten der Unendlichkeit“ vertraut macht.

Mit Witz und Charme werden auch anspruchsvolle Beweise Laien verständlich gemacht. So werden etwa die Cantorschen Diagonalargumente oder die Eulercharakteristik besprochen. Aber nicht nur inhaltlich findet man die Mathematik. „*Die Mannigfalte* ist ein einzigartiger Versuch, die szenischen Vorgänge aus Sicht einer mathematischen Logik zu entwickeln und die mathematische Logik mit Hilfe szenischer Vorgänge weiterzuführen und umzudeuten.“ erklärt die Theatertruppe. Auch die eigens für diese Produktion komponierte Musik verfolgt mathematische Prinzipien – werden Sie sie erkennen?

Matterhorn Produktionen
in Koproduktion mit der Kaserne Basel,
dem Schlachthaus Theater Bern und dem Kleintheater Luzern

DIE MANNIGFALTE
ein algebraisches Varieté

mit: Lou Bihler, Franziska von Fischer, Newa Grawit, Simone Keller, Krishan Krone, Oliver Meier.
Regie/Raum: Ursina Greuel, Kostüme/Raum: Bettina Ginsberg, Musikalisches Konzept: Simone Keller, Regieassistenz: Anna Papst, Video: Michael Spahr, Licht/Technik: Jens Seiler.

Schlachthaus Theater Bern
FREITAG 18. NOVEMBER 2011, Premiere
SA. 19. / DI. 22. / MI. 23. November 2011
jeweils um 20.30 Uhr Tickets: 031 312 60 60,
www.schlachthaus.ch oder Münstergass-Buchhandlung

Kleintheater Luzern
MI. 18. / FR. 20. / SA. 21. Januar 2012
jeweils um 20.00 Uhr
Reservation: 041 210 33 50 oder www.kleintheater.ch

Kaserne Basel
DO. 10. / SA. 12. / SO. 13.* / DI. 15. / MI. 16. Mai 2012
jeweils um 20.00 Uhr / *19.00 Uhr
Reservation: 061 666 60 00 oder www.kaserne-basel.ch

WWW.MATTERHORN.LI

Das experimentelle Stück ist für mathematisch- und theaterinteressierte Menschen geeignet, genauso wie für Schulklassen die sich in dem einen oder anderen Gebiet etwas auskennen oder etwas Neues kennen lernen möchten.

Eine Stärke hat das Stück aus unserer Sicht auf jeden Fall: Es kann aufgeschlossenen NichtmathematikerInnen die Materie schmackhaft machen und gibt auf unterhaltsame Weise, Einblick in die manchmal viel zu komplex erscheinende Mathematik sowie in die Arbeit von Mathematikerinnen und Mathematikern.

Neben den Auftritten in Bern, Luzern und Basel wird es eventuell auch Aufführungen in Zürich geben.

Interessierte finden auf www.matterhorn.li weitere Informationen.

„Das Känguru" – Der etwas andere Mathematikwettbewerb

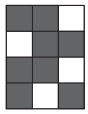
Hansjürg Stocker, Wädenswil

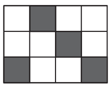
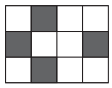
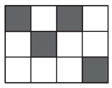
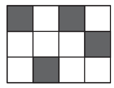
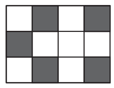
Vier Aspekte sind's, die seit eh und je den Känguruwettbewerb auszeichnen, der übrigens dieses Jahr in der Deutschschweiz just zum 10. Mal von der DMK organisiert wird. Erstens ist es ein Multiple Choice Wettbewerb, zweitens gibt es fünf Alterskategorien, drittens werden den Teilnehmenden im ersten Drittel leichte(re), im zweiten mittelschwere und erst im letzten Drittel schwierige(re) Aufgaben gestellt und viertens schliesslich ist die Themenvielfalt alle Jahre wieder sehr beeindruckend. Nebst algebraischen Aufgaben gibt es rein arithmetische, auch Gleichungen und Ungleichungen müssen gelöst oder untersucht werden, ebenso treten Funktionen auf, mit und ohne Graphen. Die Geometrie ist mit allen Facetten vertreten: ebene Geometrie, Raumgeometrie und Topologie (Stichwort: Knoten) mit zig möglichen Fragestellungen, wobei oft auch das reine Vorstellungsvermögen gefordert ist. Kombinatorische Fragestellungen können einen geometrischen oder algebraischen Hintergrund haben, aber auch im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsaufgaben vorkommen oder beim Erkennen von Wachstumsgesetzen bei Folgen von Figuren. Auf keinen Fall darf natürlich das „Kryptische, Logische und Magische" fehlen. Hingegen müssen abmachungsgemäss Probleme aus der Analysis „draussen" bleiben, obwohl etwa der Ableitungsbegriff in der obersten Alterstufe bekannt sein dürfte.

Wie der Name „Multiple Choice" ja sagt, stehen bei jeder Aufgabe mehrere Antworten zur Auswahl, fünf sind's exakt beim Känguruwettbewerb, wobei – und das ist wohl das Besondere – stets nur eine einzige korrekt ist. Und genau diesem Umstand kann, darf, ja soll sogar gelegentlich Rechnung getragen werden, wenn es darum geht, das Kreuz am richtigen Ort zu setzen. Wenn beispielsweise eine Anzahl von Möglichkeiten zu bestimmen ist, und erste Überlegungen zeigen, dass die gesuchte Zahl gerade sein muss und bei den fünf Antwortvarianten nur eine einzige gerade aufgeführt ist, so ist die richtige Antwort bereits gefunden. Der Nachweis für die Korrektheit der angekreuzten Antwort muss dann *nicht* mehr erbracht werden; beim Känguruwettbewerb entfällt er. Analog ist die Situation, wenn etwa herauszufinden ist, welche von fünf vorgeschlagenen Figuren sich unter Berücksichtigung der Vorgaben *nicht* realisieren lässt. So kann es einfacher sein, umgekehrt zu überlegen, welche Figuren sich realisieren lassen. Können dann vier der fünf bei den Distraktoren „offerierten" Figuren schnell gefunden werden, so ist die Aufgabe damit bereits gelöst; denn auch hier muss der Nachweis der Nicht-Existenz der angekreuzten Figur nicht nachgeliefert werden. Dieser Umstand löst bei Fachkolleginnen und Fachkollegen ein gelegentliches Unbehagen aus, weil der Gedankengang oder Lösungsweg lückenhaft bleibt. Dem kann entgegen gehalten werden, dass es ohne vorbereitende mathematische Überlegungen ja gar nicht möglich ist, das Kreuzchen richtig zu placieren – ausser es werde einfach geraten, was sich bei einem Fehler aufgrund der Punkteabzugsklausel in der Regel überhaupt nicht auszahlt. Ich finde es auch noch aus dem folgenden Grund nicht problematisch: erstens muss auf dieser Stufe auch nicht immer und alles restlos bewiesen werden und zweitens werden die vollständigen Lösungen in der Broschüre präsentiert, welche die SuS nach dem Känguruwettbewerb jeweils erhalten. Der Kreis schliesst sich also. Es gibt noch weitere Aufgabentypen, bei welchen eine geschickte Strategie schnell(er) zum Ziel führen kann. Wenn etwa für natürliche Zahlen herauszufinden ist, welcher der fünf angegebenen Terme den kleinsten Wert hat oder welche der angegebenen Relationen die gültige ist, so dürfen durchaus spezielle Zahlenwerte gewählt und eingesetzt werden, um die Frage beantworten zu können. Auch hier wird also im Wettbewerb der allgemeine Nachweis *nicht* verlangt.

Die folgenden zwölf Aufgaben sind nach aufsteigender Altersstufe geordnet und innerhalb derselben Stufe chronologisch nach dem Jahr des Wettbewerbs, an dem sie gestellt worden sind. Es liegt aber keine Unterteilung in leicht, mittel und schwer vor, also in 3-, 4- und 5-Punkteaufgaben. Im Anschluss daran werden jene Aufgaben gemeinsam betrachtet, die sich in gleicher oder ähnlicher Weise lösen lassen. Weiter soll demonstriert werden, dass sich gelegentlich unterschiedliche Lösungsstrategien anbieten oder zum Zuge kommen können – ein weiteres typisches Merkmal, das den Känguruwettbewerb attraktiv macht. – Wer löst das Dutzend von Aufgaben in einer halben Stunde, bevor die daran anschliessenden Ausführungen studiert werden?!

1. Stell dir vor, dass das rechts abgebildete Rechteck, das aus lauter kleinen Quadraten besteht, auf eine durchsichtige Folie gedruckt ist. Welches der unten abgebildeten Rechtecke kannst du damit so überdecken, dass dann alles dunkel erscheint?



(**A**)  (**B**)  (**C**)  (**D**)  (**E**) 

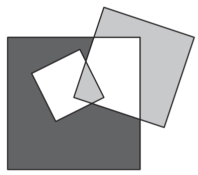
2. Aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden wir alle möglichen 5-stelligen Zahlen, wobei jede Ziffer genau einmal benutzt wird. Gesucht sind nun jene Zahlen $\overline{abcde}$ unter ihnen, für die gilt: Die Zahl $\overline{a}$ ist durch 1, die Zahl $\overline{ab}$ durch 2, die Zahl $\overline{abc}$ durch 3, die Zahl $\overline{abcd}$ durch 4 und die Zahl $\overline{abcde}$ ist durch 5 teilbar. Wie viele solche Zahlen gibt es?

(**A**) keine (**B**) eine (**C**) zwei (**D**) fünf (**E**) 60

3. Stell dir vor, du hättest einen $(9 \times 9 \times 9)$-Würfel aus 9^3 gleich großen kleinen Würfeln gebaut. Weil er so gut gelungen ist, fotografierst du den großen Würfel und fragst dich, wie viele der kleinen Würfel auf dem Foto höchstens zu sehen sind. Es sind

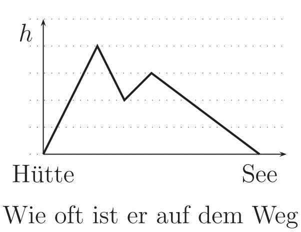
(**A**) 261 (**B**) 243 (**C**) 225 (**D**) 217 (**E**) 192

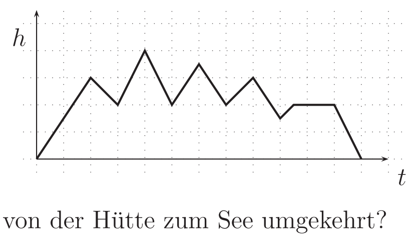
4. In einem Quadrat mit Seitenlänge 7 cm liegt ein Quadrat mit Seitenlänge 3 cm. Ein Quadrat mit Seitenlänge 5 cm schneidet beide Quadrate (*Abb. nicht maßstabsgerecht*). Um wie viel ist die schwarze Fläche größer als die Summe der beiden grauen Flächen?



(**A**) um $0\,\text{cm}^2$ (**B**) um $3\,\text{cm}^2$ (**C**) um $9\,\text{cm}^2$
(**D**) um $11\,\text{cm}^2$ (**E**) um $15\,\text{cm}^2$

5. Ein ziemlich zerstreuter Bergwanderer überquerte die links abgebildete Bergkette von der Hütte zum See, wobei er ab und zu etwas verlor und dann umkehren musste, um es einzusammeln. Sein mitgeführter Höhenmesser zeichnete sein Auf und Ab in Abhängigkeit von der Zeit t auf (rechte Abb.).





Wie oft ist er auf dem Weg von der Hütte zum See umgekehrt?

(**A**) zweimal (**B**) dreimal (**C**) fünfmal (**D**) siebenmal (**E**) neunmal

6. Beim Lösen einer Känguruaufgabe zieht Carolin die folgenden richtigen Schlüsse:

1) Wenn die Antwort (**A**) richtig ist, dann ist auch (**B**) richtig.
2) Wenn Antwort (**C**) falsch ist, dann ist auch (**B**) falsch.
3) Wenn Antwort (**B**) falsch ist, dann ist weder (**D**) noch (**E**) richtig.

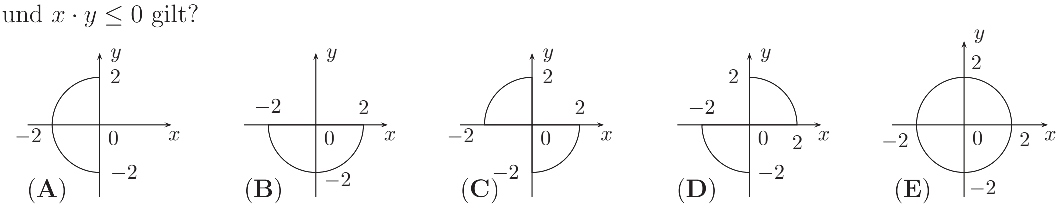
Welche der Antworten ist wahr? (Dabei ist zu berücksichtigen, dass bei den Aufgaben des Känguruwettbewerbs stets nur genau eine der Antworten richtig ist.)

(**A**) Antwort (**A**) (**B**) Antwort (**B**) (**C**) Antwort (**C**)
(**D**) Antwort (**D**) (**E**) Antwort (**E**)

7. Die Zahlen x und y sind beide größer als 1. Welcher der folgenden Brüche hat den größten Wert?

(**A**) $\dfrac{x}{y-1}$ (**B**) $\dfrac{x}{y+1}$ (**C**) $\dfrac{2x}{2y-1}$ (**D**) $\dfrac{2x}{2y+1}$ (**E**) $\dfrac{3x}{3y-1}$

8. Welches ist die graphische Darstellung der Menge aller Punkte (x, y) der Ebene, für die $x^2+y^2 = 4$ und $x \cdot y \leq 0$ gilt?



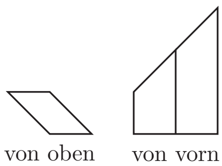
9. Beim Programmieren ihrer vier sprachbegabten Roboter ist Ines eventuell ein Fehler unterlaufen. Wahrscheinlich hat sie einen oder auch mehrere der Roboter, die sonst stets die Wahrheit sagen, so programmiert, dass sie stets lügen. Sicher gibt es viele Möglichkeiten, die fehlprogrammierten Roboter herauszufinden; sie entschließt sich zu der Frage: „Wie viele von euch lügen?" Darauf antwortet der erste Roboter: „Einer", der zweite: „Zwei", der dritte: „Drei", der vierte: „Vier". Wie viele lügen?

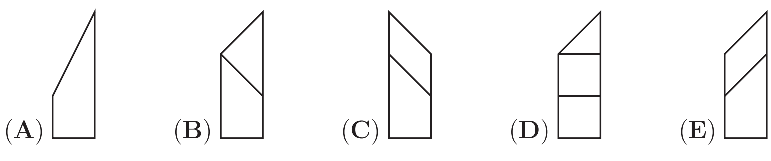
(**A**) keiner (**B**) einer (**C**) zwei (**D**) drei (**E**) alle

10. Ann, Belinda und Charles werfen nacheinander einen Würfel. Ann gewinnt, wenn sie eine 1, 2 oder 3 wirft. Belinda gewinnt, wenn sie eine 4 oder eine 5 wirft. Charles gewinnt, wenn er eine 6 wirft. Ann beginnt und gibt den Würfel an Belinda, diese gibt ihn an Charles, Charles gibt ihn an Ann usw., solange, bis jemand zum ersten Mal gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der offenbar benachteiligte Charles gewinnt?

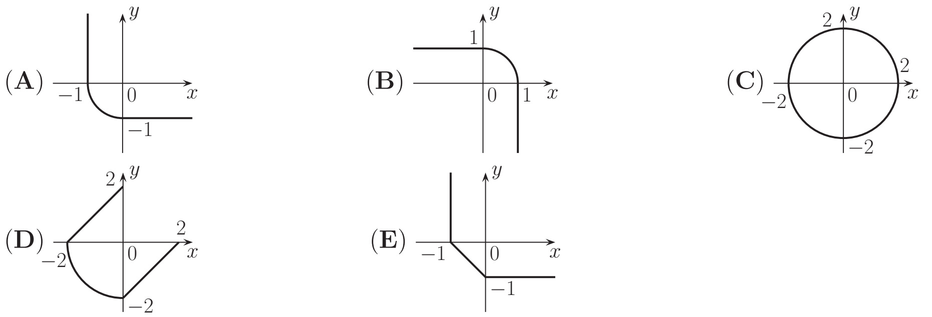
(**A**) $\dfrac{1}{6}$ (**B**) $\dfrac{3}{23}$ (**C**) $\dfrac{1}{11}$ (**D**) $\dfrac{3}{38}$ (**E**) $\dfrac{1}{13}$

11. Rechts sind zwei Skizzen desselben, von ebenen Flächen begrenzten Körpers abgebildet. Welche der folgenden Skizzen gibt den Anblick von links wieder?





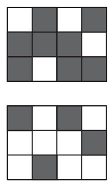
12. Welcher der in (**A**) bis (**E**) dargestellten Graphen gehört zur Lösungsmenge der Gleichung $(x-|x|)^2+(y-|y|)^2=4$?



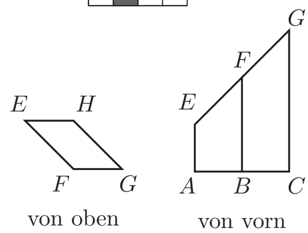
Die Lösungen der nachfolgenden Aufgaben sind im Wortlaut dieselben, wie sie in den am Schluss aufgeführten Känguru-Büchern publiziert worden sind, die ihrerseits praktisch identisch sind mit den Lösungen in den jeweiligen Broschüren, welche alljährlich im Anschluss an den Wettbewerb den SuS abgegeben werden.

Vorstellungsvermögen

Bei den ersten beiden der hier präsentierten Beispielen von Lösungen steht das reine Vorstellungsvermögen im Zentrum. Im ersten Fall müssen sich die Teilnehmenden ein gemustertes Rechteck vorstellen können, das einer Vierteldrehung im Uhr- oder Gegenuhrzeigersinn unterworfen worden ist, wenn sie aufs zeitraubende Skizzieren verzichten möchten. Und bei der zweiten Lösung muss der anhand zweier Risse dargestellte Körper in Gedanken schrittweise „aufgebaut“ und mit den inneren Augen vorgestellt werden können. Im zweiten Fallbeispiel spielt zudem das Eliminieren von Lösungsvorschlägen eine Rolle, dem wir uns dann am Schluss eingehender widmen werden.



L1. Wir drehen das neben der Aufgabe abgebildete Stück Folie um 90 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn und zeichnen es über das unter (**D**) gezeichnete, dann erkennt man sofort, dass dies die Lösung ist.



L 11. Zunächst bezeichnen wir in den gegebenen Perspektiven die sichtbaren Eckpunkte des Körpers.
In dem ebenen Viereck $EFGH$ sind die gegenüberliegenden Seiten parallel. Wären nämlich zwei gegenüberliegende Seiten nicht parallel, so würden sich die Verlängerungen dieser Seiten schneiden, also auch in der Sicht von oben, wo sie jedoch parallel erscheinen. Das Viereck $EFGH$ ist also ein Parallelogramm, welches der Sicht von vorn zufolge nach links geneigt ist. Daher ist es von links betrachtet vollständig als Parallelogramm sichtbar.
Folglich kommen nur noch die Antworten (**C**) und (**E**) in Frage. Weil E tiefer als G liegt (Sicht von vorn) und weiter hinten als G (Sicht von oben), entfällt Antwort (**C**), und (**E**) ist die Lösung.

Schrittweise und systematisch

Sehr oft bei Teilbarkeitsfragen und speziell im Bereich der Logik ist ein schrittweises und systematisches Vorgehen meist die zweckmässigste Methode. Immerhin stehen uns gelegentlich unterschiedliche Anfangsglieder in der logischen Kette von Schlussfolgerungen zur Verfügung.

L 2. Da die 5-stellige Zahl $\overline{abcde}$ durch 5 teilbar sein soll, muss $e = 5$ sein. Da die 4-stellige Zahl $\overline{abcd}$ durch 4 teilbar sein soll, muss zunächst $d = 2$ oder $d = 4$ sein. Die Zahl $\overline{abcd}$ ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $\overline{cd}$ durch 4 teilbar ist. Falls also $d = 4$ wäre, müsste $c = 2$ sein, denn weder 14 noch 34 ist durch 4 teilbar. Die Ziffer c kann aber nicht gleich 2 sein, da ja die 2-stellige Zahl $\overline{ab}$ durch 2 teilbar sein soll, und folglich $b = 2$ oder $b = 4$ sein muss. Demzufolge muss $d = 2$ sein. Folglich besteht die 3-stellige Zahl $\overline{abc}$ aus den Ziffern 1, 3 und 4. Die Summe dieser Ziffern ist jedoch nicht durch 3 teilbar, also ist $\overline{abc}$ keine durch 3 teilbare Zahl. Folglich gibt es keine Zahl mit den geforderten Eigenschaften.

L 6. Da beim Känguruwettbewerb stets nur genau eine der fünf vorgeschlagenen Antworten richtig ist, kann dies gewiss nicht (**A**) sein, da sonst nach Aussage 1 auch (**B**) richtig wäre. Nehmen wir an (**C**) wäre falsch. Dann wäre nach Aussage 2 auch (**B**) falsch, und nach Aussage 3 würden dann auch (**D**) und (**E**) falsch sein. Hieraus folgte, dass (**A**) richtig wäre, was wir ja bereits ausschließen konnten. Also war die Annahme, (**C**) wäre falsch, falsch. (**C**) ist richtig.

Wir hätten auch nach der ersten Schlussfolgerung, dass nämlich aus der Richtigkeit von Antwort (**A**) auch die von (**B**) folgte und demzufolge (**A**) nicht richtig sein kann, folgendermaßen weiter überlegen können: (**B**) kann nicht richtig sein, da sonst wegen Aussage 2 (**C**) richtig sein müsste (wieder zwei Antworten richtig, was beim Känguruwettbewerb ausgeschlossen ist). (**D**) oder (**E**) können nicht richtig sein, da sonst wegen Aussage 3 wiederum jeweils auch (**B**) richtig wäre. Also bleibt nur die Möglichkeit, dass (**C**) richtig ist.

L 9. Alle nicht fehlprogrammierten Roboter geben auf die gestellte Frage die gleiche richtige Antwort. Da es auf dieselbe Frage insgesamt vier verschiedene Antworten gegeben hat, kann höchstens einer der Roboter ohne Fehler sein, mindestens drei lügen. – Würden alle 4 Roboter lügen, wäre im Widerspruch dazu die Antwort des 4. Roboters wahr. Also sind genau 3 der Computer aufs Lügen programmiert, und nur einer ist ohne Fehler im Programm.

Unterschiedliche Lösungswege

Der volle Gehalt vieler Aufgaben erschliesst sich natürlich erst beim Studium der (in der Regel ausführlichen) Lösungen in der Broschüre – egal, ob die teilnehmenden SuS selbst darauf gekommen sind oder nicht. Es ist an sich weder erstaunlich noch überraschend, dass es bei der einen oder anderen Känguruaufgabe unterschiedliche Lösungswege gibt. Spannend wird‘s aber natürlich besonders dann, wenn zwei unterschiedliche Vorgehensweisen interessante mathematische Zusammenhänge aufdecken, wie‘s etwa in den beiden folgenden Beispielen der Fall ist.

Bei der ersten Aufgabe liefern die beiden präsentierten Lösungen einen direkten Zusammenhang zwischen der Ein- und Ausschaltformel, die der ersten Zählweise zugrunde liegt, und einer binomischen Formel, die bei der zweiten Abzählung zum Zuge kommt. – Die 2. Lösung im Nachfolgebeispiel **10** eröffnet eine mögliche Variante zur Herleitung der Summenformel und damit zur Bestimmung der Summe für die unendliche geometrische Reihe, die der 1. Lösung zugrunde liegt.

L 3. Von einem Würfel können im günstigsten Fall drei Seitenflächen gesehen werden. Die Anzahl der kleinen Würfel auf diesen drei Seiten kann „ausgezählt“ werden. Dies ist z. B. folgendermaßen möglich: Jede der drei Seiten besteht aus $9 \cdot 9 = 81$ kleinen Würfeln, das sind insgesamt 243. Davon sind jene abzuziehen, die sich auf gemeinsamen Kanten befinden, da wir sie doppelt berücksichtigt haben, also $243 - 3 \cdot 9 = 216$. Allerdings ist der Würfel, der den gemeinsamen Eckpunkt der drei Seiten bildet, nun zwar dreimal gezählt, aber auch dreimal wieder abgezogen worden. Er muss einmal wieder hinzugefügt werden, die gesuchte Anzahl ist 217.

Ein eleganterer Lösungsweg, der sich dann auch gut verallgemeinern lässt, ist der folgende:

Im günstigsten Fall können wir drei Seitenflächen eines Würfels sehen. Nehmen wir nun alle Würfelchen dieser drei Seitenflächen (Schichten) weg, so bleibt ein kleinerer Würfel zurück, nämlich ein $(8 \times 8 \times 8)$-Würfel. Für die Anzahl Würfelchen der drei Seitenflächen erhalten wir folglich das Ergebnis: $9^3 - 8^3 = 729 - 512 = 217$.

Dieser Lösungsansatz lässt sich sehr gut verallgemeinern: Wäre der große Würfel aus k kleinen aufgebaut gewesen, so hätten wir zur Berechnung der Anzahl x der sichtbaren Würfelchen wie folgt rechnen müssen: $x = k^3 - (k-1)^3$. Durch Anwendung der binomischen Formel auf den zweiten Term erhalten wir $k^3 - (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = 3k^2 - 3k + 1$. Für $k = 3$ erhalten wir Schritt für Schritt die Rechnung gemäss der ersten Abzählvariante.

L 10. Die Wahrscheinlichkeit, dass Charles bei seinem ersten Würfeln gewinnt, ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ann keine 1 oder 2 oder 3 würfelt, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass Belinda keine 4 oder 5 würfelt, und der Wahrscheinlichkeit, dass Charles dann eine 6 würfelt, also $P(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$. Hinzuzufügen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Charles bei seinem zweiten Würfeln gewinnt, also $P(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ usw. Wir finden für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 6}\right)^k = \frac{1}{5} \cdot \frac{\frac{5}{18}}{\left(1 - \frac{5}{18}\right)} = \frac{1}{13}$$

Wir geben eine 2. Lösung:

Charles gewinnt, wenn er das erste Mal an der Reihe ist, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$; mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$ wirft er keine „6“, und die Würfelei beginnt von vorn. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P gilt also die folgende Gleichung:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} P = \frac{1}{18} + \frac{5}{18} P$$

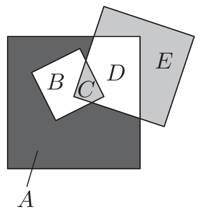
mit der Lösung $P = \frac{1}{13}$.

Spezialfälle und Einsetzproben

Es ist selbstverständlich schon nicht so, dass der (mathematische) Zweck die eingesetzten Strategien und Mittel heiligt, doch es ist eine der weiteren Facetten des Känguruwettbewerbs, dass es für den Nachweis allgemein geltender Sachverhalte durchaus genügt, geeignete Spezialfälle zu untersuchen oder besonders einfache Zahlen zur Kontrolle und Überprüfung heranzuziehen.

Die drei Quadrate in der geometrischen Aufgabe **4** dürfen bezüglich ihrer gegenseitigen Lage speziell so gewählt oder auf die Ebene gelegt werden, dass das kleinste Quadrat exakt der gemeinsamen Überschneidungsfläche des mittleren und des grossen entspricht. Dann kommen überhaupt keine weissen Teilflächen mehr vor und die graue Fläche entspricht just dem mittleren Quadrat; denn ‚grau‘ ist, was ausserhalb des grossen und innerhalb des kleinen Quadrates liegt. Die graue Fläche misst folglich 5^2 cm^2. Und für die schwarze Fläche ergibt sich der Inhalt $(7^2 - 3^2)$ cm^2. Für den Unterschied erhalten wir auch hier wie in der „offiziellen“ Lösung: 40 cm$^2 - 25$ cm$^2 = 15$ cm^2. – Die Einsetzvariante bei der Lösung vom recht anspruchsvollen Beispiel **12** führt gleichzeitig auf ein Eliminieren von angegebenen Lösungsmöglichkeiten hinaus. Ich komme am Schluss meiner Ausführungen auf dieses „Ausscheidungsverfahren“ zurück.

L 4. Wir bezeichnen die Flächenteile wie im Bild mit A bis E. Gesucht ist $A-(C+E)=A-C-E$. Bekannt sind die Flächeninhalte der 3 Quadrate:



$$\begin{aligned} A+B+C+D &= 49 \\ B+C &= 9 \\ C+D+E &= 25 \end{aligned}$$

Wir stellen die gesuchte Größe $A-C-E$ als Kombination der Quadratflächen dar:

$$\begin{aligned} A-C-E &= (A+B+C+D)-(B+C)-(C+D+E) \\ &= 49-9-25=15 \end{aligned}$$

Der gesuchte Flächeninhalt hängt nicht von der Lage der Quadrate ab. Wir könnten also auch eine ganz spezielle, zum Rechnen günstige Lage wählen.

L 12. Da genau einer der Graphen richtig ist, liegt es bei dieser Aufgabe nahe, die falschen auszuschließen. Dazu wählen wir geeignete Werte für x bzw. y. Setzen wir $x=0$, so muss $|y-|y||=2$ gelten, was nur für $y=-1$ gilt. Damit sind nur die Lösungsmöglichkeiten (**A**) und (**E**) möglich. Wir können auf dieselbe Weise ausschließen, dass (**E**) Lösung sein kann. Falls nämlich (**E**) Lösung wäre, müsste an der Stelle $x=-\frac{1}{2}$ auch $y=-\frac{1}{2}$ gelten. Jedoch ist $\left(-\frac{1}{2}-\left|-\frac{1}{2}\right|\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\left|-\frac{1}{2}\right|\right)^2=2\neq 4$.

Vergleichen und Interpretieren

Im Känguruwettbewerb kommen natürlich immer auch wieder Aufgaben vor, bei deren Lösung jegliche Originalität fehl am Platze ist; denn es geht schlicht und ergreifend nur darum, Texte, Graphiken, Figuren und (räumliche) Bilder konzentriert zu studieren oder – wie konkret bei der nachfolgenden Aufgabe – die beiden Diagramme sorgfältig miteinander in Beziehung zu setzen und richtig zu interpretieren.

L 5. Bevor der Wanderer die volle Höhe erreicht hat, steigt er abwärts. Das ist ein sicheres Zeichen, dass er umkehren musste. Nachdem die volle Höhe von 4 Höheneinheiten erreicht ist, geht der Weg abwärts bis zu einer Höhe von 2 Höheneinheiten. Der Wanderer steigt jedoch anschließend auf *mehr als* 3 Höheneinheiten hoch, also musste er auch hier umkehren. Und als er schließlich auf dem langen Abstieg ist, muss er erneut etwas vergessen haben und noch einmal umkehren, denn es ist ein Aufstieg eingezeichnet, bevor er sich eine längere Ruhepause gönnt und dann schnell abwärts zum See geht. Er ist an drei Stellen umgekehrt.

Ausschliessen und eliminieren

Wie bereits einleitend hervorgehoben, und bei den Lösungen der Aufgaben 11 und 12 schon genutzt oder erwähnt, ist beim Känguruwettbewerb das Eliminieren der falschen Antworten nicht selten eine kluge und darüber hinaus meist eine effiziente Lösungsstrategie; denn es müssen ja höchstens vier Fälle ausgeschlossen werden. Und es ist schon viel gewonnen, wenn sich zwei oder drei Lösungsvorschläge als falsch entpuppen.

Die nachfolgend präsentierte Lösung der Bruchtermaufgabe **7** liefert den Bruchterm mit dem grössten Wert in voller Allgemeinheit. Als Alternative können die sicher falschen Antworten schrittweise auch wie folgt eliminiert werden: Beim Vergleich der Antwortvorschläge (A) und (B) fällt (B) mit dem grösseren Nenner weg und ebenso (D) im Vergleich mit (C). Für die drei verbleibenden Bruchterme (A), (C) und (E) genügt es – in echter Kängurumanier – durch Einsetzen von $x=y=2$ bloss einen Spezialfall zu betrachten, womit dann beim direkten Vergleich der Brüche auch noch (C) und (D) entfallen. Viele SuS setzen natürlich schon von Anfang an einfache Zahlen für x und y ein, speziell jene, die im rechnerischen Umgang mit Brüchen gewieft sind. Dieses Beispiel hätte demnach ebenso gut in der früheren Rubrik ‚Spezialfälle und Einsetzproben' placiert werden können.

L 7. Bringen wir alle fünf Brüche auf denselben Zähler, indem wir (**A**) und (**B**) mit 6, (**C**) und (**D**) mit 3 bzw. (**E**) mit 2 erweitern, so erhalten wir:

(**A**) $\dfrac{6x}{6y-6}$ (**B**) $\dfrac{6x}{6y+6}$ (**C**) $\dfrac{6x}{6y-3}$ (**D**) $\dfrac{6x}{6y+3}$ (**E**) $\dfrac{6x}{6y-2}$

Bei gleichem Zähler ist der Bruch mit dem größten Nenner am kleinsten und der mit dem kleinsten Nenner am größten. Der gesuchte Bruch ist also (**A**).

Das letzte aufgeführte Beispiel **8** ist insofern ein Klassiker, als beim Heranziehen *einer* verlangten Eigenschaft auf Anhieb *alle vier* falschen Lösungsvorschläge „hängen" bleiben.

L 8. Die Punkte (x, y) gehören wegen $x^2 + y^2 = 4$ zu der Kreislinie mit Radius 2 um den Koordinatenursprung als Mittelpunkt. Dies trifft auf alle 5 Lösungsvorschläge zu. Der Bedingung $x \cdot y \leq 0$ genügen genau die Punkte der Kreislinie, die im II. und IV. Quadranten liegen. Damit ist (**C**) richtig.

Literatur

Sämtliche zwölf Beispiele sind den folgenden Sammelbänden entnommen worden, die im **Fachbuchverlag Leipzig** im Carl Hanser Verlag erschienen sind:

- *Mathe mit dem Känguru*, Bd 1 (2007), ISBN 978-3-446-40713-8
  1 (A4.5, p. 68 & L4.5, p. 164); **5** (A2.76, p. 52 & L2.76, p. 151);
  8 (A4.63, p. 80 & L4.63, p. 175); **9** (A5.10, p. 100 & L5.10, p. 188)
- *Mathe mit dem Känguru*, Bd 2 (2009), ISBN 978-3-446-41647-5
  3 (A3.42, p. 57 & L3.42, p. 143); **6** (A5.5, p. 85 & L5.5, p. 169);
  10 (A3.35, p. 55 & L3.35, p. 140)
- *Mathe mit dem Känguru*, Bd 3 (2012), ISBN 978-3-446-42820-1
  2 (A1.54, p. 21 & L1.54, p. 112); **4** (A4.62, p. 74 & L4.62, p. 168);
  7 (A2.58, p. 40 & L2.58, p. 129); **11** (A4.99, p. 84 & L4.99, p. 176);
  12 (A2.66, p. 42 & L2.66, p. 131)

E-mail-Adresse des Autors: hjstocker@bluewin.ch

Monika Noack, Alexander Unger, Robert Geretschläger, Hansjürg Stocker (Hrsg.)

Mathe mit dem Känguru

194 Seiten, flexibler Einband, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag 2011,

ISBN 978-3-446-42820-1, CHF 21.90

Gerade rechtzeitig im Hinblick auf die 10. Durchführung des Wettbewerbs «Känguru der Mathematik» in der Schweiz ist der dritte Sammelband erschienen. Im März des letzten Jahres haben weit über eine Million Schülerinnen und Schüler aus Deutschland, Österreich und der Schweiz am Wettbewerb teilgenommen; weltweit waren es sogar über sechs Millionen.

Kernstück dieses Wettbewerbs sind die abwechslungsreichen, witzigen, gelegentlich auch kniffligen Multiple-Choice-Aufgaben, deren attraktivsten der drei vergangenen Jahre in einem weiteren Sammelband vereinigt sind.

Cours CRP 2011: Physique quantique
21-22-23 septembre 2011
Champéry (VS)

La physique quantique est certainement l'une des théories qui a provoqué le plus d'étonnement dans la communauté scientifique. Avec ses premiers balbutiements il y a près de 100 ans, cette discipline permet aujourd'hui d'une part de prédire certains phénomènes physiques de manière extrêmement précise et d'autre part d'achever des tâches classiquement interdites.
Ce cours de formation continue avait comme objectif de rappeler les notions de base de la physique quantique dans une approche moderne et de présenter également les derniers développements du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Il a été principalement préparé afin de non seulement permettre aux professeurs du niveau secondaire II de compléter leurs connaissances dans ce domaine, mais également d'introduire eux-mêmes les idées de la physique quantique dans leurs cours ou lors de travaux de maturité.

Pour avoir le maximum de pertinence et susciter chez nos collègues physiciens l'envie de participer, nous avons opté pour une brochette de conférenciers hors norme.
Christian Ferrari (Liceo Locarno) a ouvert les feux avec des rappels très utiles sur les systèmes quantiques à deux niveaux que sont notamment la polarisation du photon et le spin de l'électron. Nous avons alors pu constater que les notions mathématiques nécessaires pour traiter ces sujets pouvaient être à la portée de nos étudiants. Michel LeBellac (Nice) nous a ensuite parlé d'interférence quantique en insistant sur le caractère universel du phénomène pour ensuite nous entretenir des expériences de choix retardé. Finalement, la première journée s'est terminée avec le discours de Jean-Marc Lévy Leblond (Nice) concernant les réflexions philosophiques qu'il faut envisager pour faire de la bonne quantique. Les problèmes de la pertinence des termes utilisés ainsi que de la persistance de vieilles conceptions datant des début de la théorie quantique furent abordés de manière magistrale.

La journée suivante, pleine de promesses, commença avec le professeur Alain Aspect (Institut d'Optique de Palaiseau). Au travers de ses fameuses expériences prouvant expérimentalement que la quantique est une théorie complète, il nous parla de manière claire et précise de l'état intriqué des particules et des inégalités de Bell. La conférence suivante a été donnée par Valério Scarani (Singapour). Le sujet était le nouveau paradigme de caractérisation "device-independent", dans lequel les inégalités de Bell, à la saveur philosophique, deviennent des outils pratiques. La journée se termina par différentes activités sportives dans la station de Champéry en Valais.

Le dernier jour du cours de formation débuta avec Nicolas Gisin (Genève) et les expériences de téléportation quantique dont il est le précurseur. Les notions de cryptographie quantique et de sécurité lors du transfert informatique de données furent également abordées. Le cours de formation se termina par une intervention de Valério Scarani, Chrisitan Ferrari et Philippe LoBello (HEP Vaud) et un débat sur les possibilités d'enseigner la physique quantique au niveau du secondaire II. Les retours concernant ce cours furent très positifs et nous espérons qu'il aura donné l'envie aux collègues d'aborder ce sujet avec leurs élèves.

Toutes les conférences ont été enregistrées et combinées avec les diapos des différentes présentations afin de réaliser un support didactique fidèle. Ces vidéos sont accessibles sur le site de la CRP : http://www.vsmp.ch/crp/.
Bon visionnement !

Stéphane Davet

DPK

Das Gesetz von Darcy zum Volumenstrom

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Definitionen sollen den Schülerinnen und Schülern nicht einfach an den Kopf geworfen werden. Definitionen wollen motiviert sein, damit die Schülerinnen und Schüler den Sinn dahinter sehen. Definitionen gehören also nicht an den Anfang eines Abschnitts, sondern ans Ende einer Einleitung. Beim elektrischen Widerstand offeriere ich eine Analogie zwischen dem elektrischen Strom durch ein Widerstandselement und der Wasserströmung beim Kaffeebrauen: Das Wasser erfährt im gemahlenen Kaffee einen Strömungswiderstand. Die Analogie leuchtet den Schülerinnen und Schülern unmittelbar ein. Aber wenn ich schon vom Widerstand einer Wasserströmung spreche, sollte ich auch ein Experiment dazu durchgeführt haben. Nach meiner Erfahrung erzählt man sonst leicht Unsinn. Ausserdem kann ein neues Schülerexperiment nie schaden und mehr Hintergrundwissen ebenso wenig.

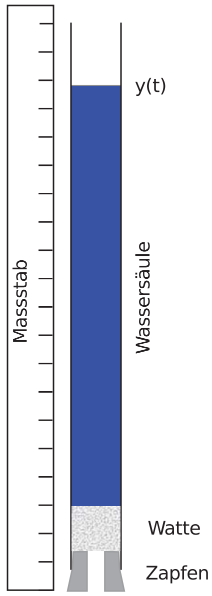


Abbildung 1: *Glasrohr mit Wasser, Wattefilter, Zapfen und Massstab.*

Theorie

Henry Philibert Gaspard Darcy (1803-1858) war französischer Wasserbau-Ingenieur. Er untersuchte laminare Strömungen durch Sandfilter und fand 1855/56 in Experimenten, dass der Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ proportional zum Druckunterschied Δp vor und nach dem Filter ist. Das Gesetz ist somit eine Analogie zum ohmschen Gesetz, d.h. der Strömungswiderstand ist unabhängig vom Volumenstrom. In der Anordnung von Abb. 1 bedeutet dies, dass die Geschwindigkeit dy/dt, mit der sich der Wasserspiegel senkt, proportional zur Höhe $y - y_F$ des Wasserspiegels über dem Filter ist. Mit der Proportionalitätskonstanten τ und der Integrationskonstanten y_0 erhalten wir folgende Differentialgleichung und Lösung:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y - y_F}{\tau} \tag{1}$$

$$\int \frac{dy}{y - y_F} = -\int \frac{dt}{\tau} \tag{2}$$

$$\ln \frac{y - y_F}{y_0 - y_F} = -\frac{t}{\tau} \tag{3}$$

$$y = (y_0 - y_F)\exp(-t/\tau) + y_F \tag{4}$$

Die Beziehung $dy \propto y$ ist von der Zinsrechnung her bekannt. Dort wissen wir ja, dass es eine Exponentialfunktion gibt, auch oh-

ne dass wir eine Differentialgleichung lösen müssen.
Als Kontrast wollen wir den reibungsfreien Fall untersuchen. Beim Torricellischen Ausflussgesetz ist die Geschwindigkeit, mit der das Wasser unten ausströmt, proportional zur Wurzel aus der Höhe: $\upsilon = \sqrt{2g(y - y_F)}$. Die Ausflussgeschwindigkeit ist proportional zum Volumenstrom und dieser somit proportional zur Wurzel aus der Höhe. Mit der Proportionalitätskonstanten a und der Integrationskonstanten t_F erhalten wir folgende Differentialgleichung und Lösung:

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2a \cdot (y - y_F)} \qquad (5)$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y - y_F}} = -\sqrt{2a} \int dt \qquad (6)$$

$$2\sqrt{y - y_F} = -\sqrt{2a}\,(t - t_F) \qquad (7)$$

$$y = \frac{1}{2} a \cdot (t - t_F)^2 + y_F \qquad (8)$$

Die Differentialgleichung entspricht jener für eine gleichmässig beschleunigte Bewegung, die Lösung lässt sich also ebenfalls durch Analogieschluss ohne höhere Mathematik herleiten.
Falls das Gesetz von Darcy zutrifft, sollte sich der Flüssigkeitsspiegel mit der Zeit exponentiell senken, falls das Gesetz von Torricelli gilt, sollte $y(t)$ eine quadratische Funktion sein.

Experiment

Ich beschaffte mir ein Plexiglasrohr von etwas über 90 cm Länge und ca. 2 cm Durchmesser. Das untere Ende verschloss ich ca. 3 cm hoch mit Watte und fixierte diese mit einem durchbohrten Gummizapfen, siehe Abb. 1. Ich stellte das Rohr vertikal auf ein Gitter und befestigte ein Blechlineal mit Millimeterskala auf der Aussenseite. Ich goss Wasser von oben ins Rohr und stoppte die Zeit t, wann der Wasserspiegel eine bestimmte Koordinate y erreicht hat. Die Zeit konnte ich auf etwa 1 s, die Position des Wasserspiegels auf etwa 1 mm genau messen. Da nicht klar ist, von wo aus die Höhe der Wassersäule gemessen werden soll, habe ich die vertikale Koordinate des Wasserspiegels gemessen und das Nullniveau (Koordinate des Watte-Filters y_F) als Regressionsparameter behandelt.
Eine Exponentialfunktion passt hervorragend zu den Messwerten, siehe Abb. 2. Dieses Ergebnis spricht für das Gesetz von Darcy. Unbedingt nötig ist aber noch die Gegenprobe: Passt eine Parabel zu den Daten? Wie Abb. 3 zeigt, ist die Strömung offensichtlich nicht reibungsfrei. Betrachtet man die Residuen der Kurvenanpassungen, siehe Abb. 4, so ist der Unterschied noch gewaltiger.
Die graphischen Darstellungen und Regressionen sind der besseren Qualität wegen mit proFit gemacht worden. Für Schülerübungen kann dasselbe auch mit Excel berechnet werden; allerdings muss für nichtlineare Fits das Add-In namens Solver geladen werden.

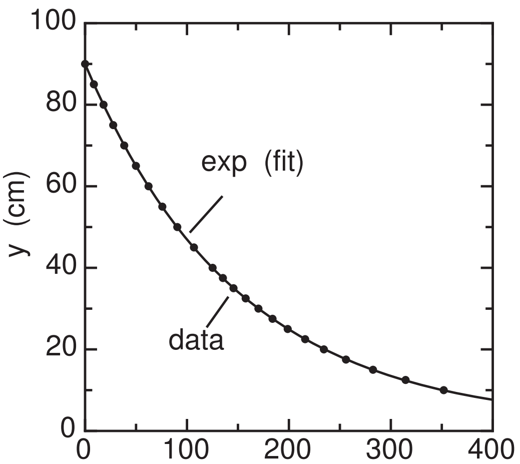


Abbildung 2: *Pegelstand y als Funktion der Zeit t. Messdaten (gefüllte Kreise) mit Fitfunktion $y = y_1 \exp(-t/\tau) + y_F$, wobei $y_1 =$* 88.53 cm, $\tau = 150.4$ s *und* $y_F = 1.45$ cm. *Die Residuen sind kleiner als die Fehlerschranken!*

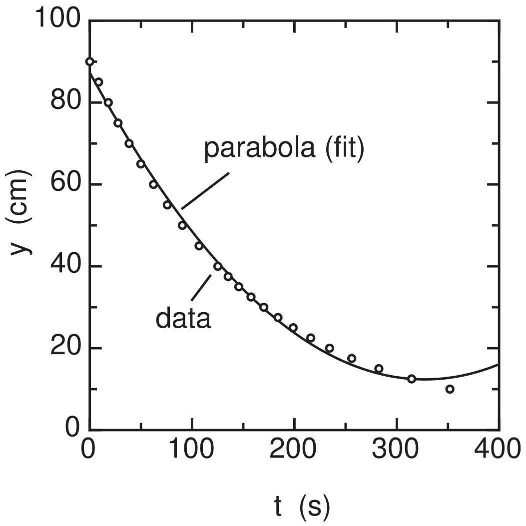


Abbildung 3: *Pegelstand y als Funktion der Zeit t. Messdaten (offene Kreise) mit Fitfunktion* $y = \frac{1}{2}a(t - t_F)^2 + y_F$*, wobei* $a = 1.398 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm/s^2}$*,* $t_F = 327\,\mathrm{s}$ *und* $y_F = 12.4\,\mathrm{cm}$*. Die Residuen sind viel grösser als die Fehlerschranken und der Wert von* y_F *macht keinen Sinn.*

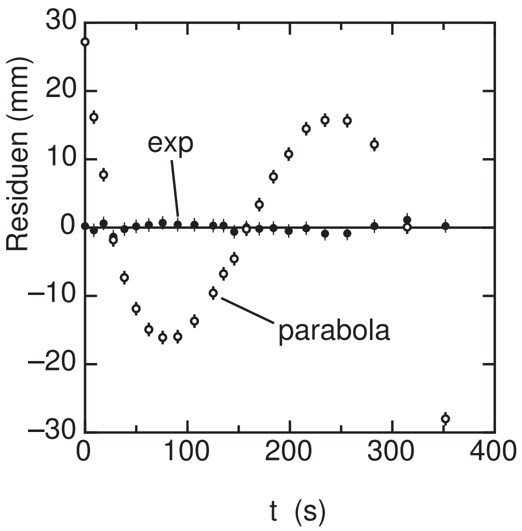


Abbildung 4: *Die Residuen bei Anpassung einer Exponentialfunktion (exp, gefüllte Kreise) sind viel kleiner als die Residuen beim Fit einer Parabel (parabola, offene Kreise).*

Schluss

Der Wasserstrom durch ein Wattefilter gehorcht dem Gesetz von Darcy: Der Volumenstrom ist proportional zum Druckunterschied respektive zur Wasserhöhe. Die Analogie zum ohmschen Gesetz ist gut.

Spektroskopie in der Astronomie

Rückblick auf den Weiterbildungskurs vom 18./19. November 2011

Der diesjährige Astronomiekurs fand im Physikzimmer des Kollegiums Brig statt, mit einer Exkursion auf die Sternwarte auf dem Simplon.

Mit 20 Teilnehmern hatte der Kurs eine angenehme Grösse. Die Schwerpunktfachschüler PAM waren sinnvollerweise ebenfalls zur Teilnahme eingeladen und machten erfreulich aktiv mit.

Der Hauptreferent PD Dr. Hans Martin Schmid von der ETH Zürich, selbst ein ehemaliger Schüler am Kollegium Brig, brachte den Teilnehmern die Grundlagen und die Bedeutung der astronomischen Spektroskopie näher. In einem weiteren spannenden Vortrag gab er uns einen Einblick in sein Forschungsgebiet Exoplaneten.

Hugo Kalbermatten und Dr. Peter Schlatter leuchteten die praktische Seite der astronomischen Spektroskopie aus (Bau eines Spektrometers, Fotografie und Auswertungssoftware)

In einem lehrreichen und amüsanten Vortrag beleuchtete Hans Roth (vgl. Bild) die Frage nach der Zeit und schilderte die Geschichte unseres Kalenders. Wussten Sie z.B., dass der Schalttag in einem Schaltjahr eigentlich nicht der 29., sondern der 24. Februar ist?

Höhepunkt war der Besuch der Sternwarte auf dem Simplon bei herrlich kaltem Wetter und wolkenlosem Himmel, also einmalig guten Bedingungen zur Beobachtung des Himmels. Die Sternwarte wurde durch die astronomische Gesellschaft Oberwallis gebaut und wird auch von ihr unterhalten. (Bild: Kursleiter Martin Henzen in der Sternwarte)

Ein herzlicher Dank geht an Martin Henzen und Paul Biner, beide Physiklehrer am Kollegium "Spiritus Sanctus" in Brig, für ihre tadellose Organisation und humorvolle und umsichtige Betreuung.

Stefan Walser, DPK

Kurs inForm 2012: Differenzialgleichungen

Titel	**Differenzialgleichungen und dynamische Systeme**
Lead	Ein neues Konzept eines anwendungsbezogenen und technologiegerechten Analysisunterrichts
Ziele	• Die Kernidee des neuen Konzepts kennen lernen • Möglichkeiten des Einsatzes neuer Technologien kennen und reflektieren • Aktuelle Fragen der Fachdidaktik diskutieren
Inhalte	• Mathematisches Modellieren mit Differenzialgleichungen • Darstellen und Untersuchen dynamischer Systeme anhand realer Beispiele • Vorstellen eines erprobten Unterrichtsskripts
Bemerkungen	*Ein Notebook oder Netbook mit der Software TI-Nspire™ CAS mitbringen. Eine kostenlose 30-Tage Version kann über* http://education.ti.com *bezogen werden.*
Ort	Bern
Termin	Mittwoch 14. März 2012, 14.30-19.00
Leitung	Märki Robert; r.maerki@hispeed.ch
Kosten	Fr. 90.-
Kurs-Nr.	12.611.401
Anmeldung	www.phbern.ch/weiterbildung/sekundarstufe2 www.phbern.ch/weiterbildung/kurse
Kontakt	hansulrich.kueng@phbern.ch

Ja - Oui - Sì ☐

Ich möchte Mitglied des Vereins Schweizerischer Mathematik und Physiklehrkräfte (VSMP) sowie des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und lehrer (VSG) werden.

J'aimerais devenir membre de la Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique (SSPMP) et de la société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (SSPES).

Desidero diventare membro della Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e Fisica (SSIMF) e della Società Svizzera degli Insegnanti delle Scuole Secondarie (SSISS).

Beitrag/Montant/Quota: Fr. 120.- (VSG -SSPES -SSISS) + Fr. 40.- (SSIMF -SSPMP -VSMP)

Frau/Mme/Sig.ra ☐ Herr/M./Sig. ☐ Prof. ☐ Dr. ☐

Name/Nom/Cognome: ....

Vorname/Prenom/Nome: ....

Adresse/Indirizzo (privat/privato): ....

Plz-Ort/NP-Ville/CAP -Luogo: ....

(Land/Pays/Paese): ....

Email: ....   (Tel): ....

(Geburtsdatum/Date de naissance/Data di nascita): ....

Sprache/Langue/Lingua: D ☐ F ☐ I. ☐

Schule/école/scuola: ....   Kanton/canton/cantone: ....

Kategorie/Catégorie/Categoria: activ/actif/attivo ☐ passive/passif/passivo ☐
Student/in, étudiant(e), studente/ssa. ☐

Einsenden an/envoyer à/inviare a:
VSG -SSPES -SSISS, Sekretariat (Frau Doris Lazzeri), 3000 Bern
oder per Internet: www.vsg-sspes.ch

Impressum

Herausgeber – *Éditeur*
VSMP / SSPMP / SSIMF

Korrespondenz – *Correspondance*
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Layout – *Mise en page*
Stéphane Davet stephane.davet@lyca.eduvs.ch
Av. Plantaud 28B Tél. 024 471 21 83
1870 Monthey

Inserateverwaltung – *Publicité*
Stefan Walser stefan.walser@alumni.ethz.ch
Weinbergstrasse 3 Tel. 055 410 62 36
8807 Freienbach

Bestimmungen für Inserate und Beilagen
– *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:	
Ganzseitige	Fr. 500.–
Halbseitige	Fr. 300.–
Beilagen:	
bis 20 g	Fr. 500.–
über 20 g	Nach Vereinbarung

Adressänderung – *Changement d'adresse*
VSMP Mitglieder – Membres de la SSPMP :
VSG – SSPES – SSISS
Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)
3000 Bern
Tel. 056 443 14 54 / Fax 056 443 06 04

Abonnenten die nicht Mitglieder der VSG sind:
Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Alpenquai 44 Tel. 079 79 89 770
6005 Luzern

Auflage – *Tirage*
900. Erscheint dreimal jährlich.

Vizepräsident VSMP – SSPMP – SSIMF
Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutschschweizerische Mathematikkommission
Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Deutschschweizerische Physikkommission
Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch
Marienstrasse 21 Tel. 031 534 66 74
3005 Bern

Commission Romande de Mathématique
Patrick Hochuli patrick.hochuli@gfbienne.ch
Alex-Moser 50 Tél. 032 365 60 15
2503 Bienne

Commission Romande de Physique
Jean-Daniel Monod jean-daniel.monod@urbanet.ch
Rue du Bugnon 14 Tél. 021 701 38 62
1030 Bussigny

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana
Arno Gropengiesser groppi@bluewin.ch
Via Vincenzo d'Alberti 13
6600 Locarno Tél. 091 751 14 47

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)
– *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 119	30.04.2012 (20.06.2012)
Nr. 120	31.07.2012 (20.09.2012)
Nr. 121	31.11.2012 (20.01.2013)

Druck und Versand – *Imprimerie*
Niedermann Druck AG
Rorschacherstrasse 290
9016 St. Gallen

Internet-Adressen – Adresses Internet

http://www.vsmp.ch — http://www.sspmp.ch — http://www.ssimf.ch