

Yves Roisin

Collège St-Michel, Fribourg, yves.roisin@edufr.ch

Initiation à la modélisation mathématique d'un phénomène

Jean-Pierre Gabriel, professeur retraité de l'Université de Fribourg, a souvent regretté le faible pourcentage des bacheliers qui poursuivent des études de mathématiques après la maturité. Il a régulièrement entendu dire que c'était dû au manque d'utilité concrète que les élèves trouvent aux mathématiques. Après avoir consulté différents ouvrages destinés aux élèves du secondaire 2, il a constaté que peu d'espace y était accordé à la modélisation mathématique. Aussi, il a eu envie d'y consacrer un texte en se donnant comme défi de le rendre accessible aux élèves préuniversitaires.

Afin de garantir que le texte soit adapté au public visé, il a proposé à deux enseignants du secondaire 2, Yves Dubey et Thomas Fournier, de le rédiger avec lui. Le fruit de leur travail est le livre [1], qu'il me semble intéressant de présenter dans ce bulletin. En effet, cela permettra de lui donner une visibilité, afin que les enseignants puissent le conseiller aux élèves enthousiastes qui les questionnent au sujet de l'utilité des mathématiques.

Les auteurs ont choisi de présenter la modélisation mathématique au travers du phénomène de la désintégration radioactive. D'une part parce que le modèle déterministe de la désintégration radioactive est abordé dans la plupart des livres d'analyse, et d'autre part parce qu'ils pouvaient aussi présenter un modèle stochastique du même phénomène. Ils ont développé une approche originale et hypothético-déductive qui porte une attention particulière aux hypothèses nécessaires. Les hypothèses avancées reposent à la fois sur les expériences et les observations du phénomène, sur l'intuition des auteurs ainsi que sur leur volonté de simplifier au mieux la mathématique. Le but des modélisations présentées est de prédire l'évolution temporelle d'un échantillon de noyaux instables, c'est-à-dire susceptibles de se désintégrer en émettant une particule. Étant donné la taille initiale de l'échantillon, il s'agit donc de prédire le nombre de noyaux non encore désintégrés à n'importe quelle époque ultérieure. Les différentes modélisations ci-dessous concernent la désintégration radioactive d'un échantillon de noyaux instables de même nature. Elles sont présentées presque identiquement dans le livre [1], et je remercie les auteurs de m'avoir autorisé à recopier une partie de leur travail.

Modèle déterministe de la désintégration radioactive

Au temps $t = 0$, nous considérons un paquet de $n(0)$ noyaux instables. Le but est de prédire le nombre $n(t)$ de noyaux encore instables en un temps quelconque $t > 0$. Voici les réflexions qui conduiront aux hypothèses propres au modèle.

- (1) Le temps est continu, i.e. $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (par opposition à un temps discret comme par exemple $t \in \mathbb{N}$).
- (2) La fonction $n(t)$ prend des valeurs entières et fait un saut vers le bas de grandeur -1 lors de chaque désintégration, ce qui entraîne sa décroissance. Afin de simplifier cette première approche mathématique, nous supposons que $n(t)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Cela permet de faciliter le travail analytique, car nous pouvons alors supposer que $n(t)$ est dérivable. Ce faisant nous commettons volontairement une erreur, mais la pertinence de ce choix se justifie a posteriori en comparant les prédictions du modèle aux observations physiques effectuées en laboratoire.

- (3) La démarche ci-dessous repose sur une approche intuitive ainsi que des choix de simplification. Notons qu'une des relations les plus simples entre deux grandeurs variables est la proportionnalité : l'une est un multiple de l'autre et réciproquement. Nous en faisons usage ici pour sa simplicité. Son bien-fondé, à nouveau, résulte de la confrontation entre le modèle et les observations.

Pour $t \geq 0$ (fixé) et $h > 0$ (variable), notons $D_{(t,t+h]}$ le nombre de noyaux qui se désintègreront à une époque appartenant à l'intervalle $(t, t+h]$. À l'évidence, $D_{(t,t+h]}$ dépend à la fois de $n(t)$ et de h . En effet, plus le nombre de noyaux est grand en t , plus il y aura de candidats à la désintégration et plus $D_{(t,t+h]}$ sera grand. Il en ira de même pour la longueur h de l'intervalle, car plus celle-ci sera grande, plus l'intervalle $(t, t+h]$ pourra contenir d'époques de désintégration.

Comme nous passerons à la limite avec $h \downarrow 0$, nous supposons que $D_{(t,t+h]}$ est à peu près proportionnel à h pour des petites valeurs positives de cette variable. Plus précisément, $D_{(t,t+h]}$ sera de la forme Ch pour un nombre $C > 0$, avec une possible correction additionnelle $o(h)$ qui tend vers 0 plus vite que h , i.e. $\lim_{h \downarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Ainsi $D_{(t,t+h]} = Ch + o(h)$ mais, en vertu de ce qui précède, $D_{(t,t+h]}$ dépend aussi de $n(t)$, le nombre de candidats à la désintégration au début de l'intervalle. Comme $o(h)$ disparaît avec $h \downarrow 0$, il suffit de considérer la dépendance $C = C(n(t))$. En faisant à nouveau appel à la proportionnalité, nous posons $C(n(t)) = \lambda n(t)$ où $\lambda > 0$ est une constante, plus précisément un paramètre qui gouverne la vitesse de désintégration des noyaux du type considéré. Ainsi, pour $h \downarrow 0$

$$D_{(t,t+h]} = \lambda n(t)h + o(h).$$

De ce qui précède, nous retenons les hypothèses ci-dessous pour le modèle déterministe.

Hypothèses pour le modèle déterministe

- (H1) t est le temps et $n(t)$ le nombre de noyaux encore instables en t .
 (H2) t et $n(t)$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
 (H3) La fonction $n(t)$ est décroissante et dérivable.
 (H4) On a

$$-D_{(t,t+h]} = n(t+h) - n(t) = -\lambda n(t)h + o(h),$$

le signe « $-$ » étant imposé par la décroissance de $n(t)$.

- (H5) t est une variable connue, $n(t)$ est une variable inconnue, $\lambda > 0$ et $n(0) \geq 0$ sont des paramètres dont les valeurs sont à choisir selon la situation à décrire.

Conséquences des hypothèses

Des hypothèses ci-dessus nous déduisons

$$\frac{n(t+h) - n(t)}{h} = -\lambda n(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

Puisque la fonction $n(t)$ est supposée dérivable et que la limite d'une somme finie de termes qui convergent est la somme des limites, en faisant tendre h vers 0 on obtient l'équation

$$\dot{n}(t) = -\lambda n(t).$$

Nous avons donc une équation qui relie la variable inconnue $n(t)$ à sa dérivée $\dot{n}(t)$ et au paramètre λ . Cette équation est de la forme

$$\dot{n}(t) = f(n(t))$$

où f est une fonction connue. Il est démontré dans le livre [1], que pour $n(0) \geq 0$ et $f(n(t)) = \lambda n(t)$, l'unique solution de cette équation différentielle est

$$n(t) = n(0)e^{-\lambda t}.$$

Ainsi la variable inconnue $n(t)$ est une fonction de la variable connue t et des paramètres λ et $n(0)$. Dans ce modèle, $n(t)$ ne s'annule jamais si $n(0) > 0$. Cette propriété pose problème pour définir l'époque t^* de la dernière désintégration telle que $n(t^*) = 0$. C'est le prix à payer pour avoir travaillé dans $\mathbb{R}_+$ au lieu de $\mathbb{N}$. Heureusement, le modèle stochastique fournira une solution exacte à ce problème.

Époques de désintégration

Plus que la demi-vie, le modèle déterministe permet de calculer l'époque exacte de chaque désintégration, ainsi que la durée entre deux désintégrations successives.

Notons t_i l'époque de la i -ème désintégration ($1 \leq i \leq n(0) - 1$) avec $d_i = t_i - t_{i-1}$ la durée entre la i -ème désintégration et la précédente ($2 \leq i \leq n(0) - 1$) et avec $d_1 = t_1$. Ainsi avec cette nouvelle suite t_i , le temps de demi-vie $T_{\frac{1}{2}}$ correspond à $t_{\frac{n(0)}{2}}$ si $n(0)$ est pair et se situe entre $t_{\frac{n(0)-1}{2}}$ et $t_{\frac{n(0)+1}{2}}$ si $n(0)$ est impair. On trouve les époques et durées suivantes :

$$\begin{aligned} n(t_i) &= n(0) \cdot e^{-\lambda t_i} = n(0) - i \\ \Rightarrow -\lambda t_i &= \ln \left(\frac{n(0) - i}{n(0)} \right) \\ \Rightarrow t_i &= \frac{\ln(n(0)) - \ln(n(0) - i)}{\lambda} \\ d_i = t_i - t_{i-1} &= \frac{\ln(n(0) - i + 1) - \ln(n(0) - i)}{\lambda} \end{aligned}$$

On remarque que l'époque de dernière désintégration n'est pas définie, et devrait prendre la valeur $+\infty$, tout comme la durée entre l'avant-dernière et la dernière désintégration.

Modèle stochastique de la désintégration radioactive

Les notions de probabilités nécessaires à la compréhension du modèle qui suit sont présentées dans le livre [1]. Nous choisissons à nouveau le temps continu $t \in \mathbb{R}_+$. Dès l'époque $t = 0$, nous observons un unique noyau instable et notons T l'époque de sa désintégration. Dans cette approche, la désintégration est un phénomène aléatoire et ainsi T devient une variable aléatoire. Les études expérimentales suggèrent que ce processus n'a pas de mémoire, en ce sens que la transition est spontanée et ne dépend pas de l'âge du noyau.

Hypothèses pour le modèle stochastique

- (H1) Le temps $t \in \mathbb{R}_+$ est continu.
- (H2) Au temps $t = 0$, nous considérons $n(0)$ noyaux instables, tous étant de la même substance. Ces noyaux sont numérotés de 1 à $n(0)$.
- (H3) Nous noterons $T_i (= T_i(\omega))$ l'époque aléatoire de la désintégration du i -ème noyau ($1 \leq i \leq n(0)$). Les noyaux étant du même type, ces v.a. sont identiquement distribuées.
- (H4) Les noyaux n'interagissant pas entre eux, les v.a. T_i ($1 \leq i \leq n(0)$) sont indépendantes.

(H5) Reconsidérons un noyau instable en $t = 0$ et l'époque aléatoire T de sa désintégration. Par hypothèse, cette dernière est gouvernée par un processus spontané (sans vieillissement et donc sans mémoire) que nous traduisons en exigeant

$$(a) P(T > 0) > 0,$$

$$(b) \forall s, t \geq 0 \text{ avec } P(T > t) > 0, P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s).$$

La condition (a) fait sens, car pour une v.a. $T \geq 0$, sa négation serait $P(T > 0) = 0$ qui entraînerait $P(T = 0) = 1$, donc un cas sans intérêt.

L'événement $\{T > t\}$ signifie être encore instable en t puisque la désintégration a lieu après t . Interprétons « être instable » par « être en vie », se « désintégrer » par « mourir » et « spontané » par « sans vieillissement ».

La condition (b) signifie alors que *la probabilité de vivre au moins s unités de temps depuis t , sachant que l'on est en vie en t , est égale à la probabilité de vivre au moins s unités de temps depuis 0*. Dans ce modèle, un vieillard centenaire en vie aurait la même probabilité qu'un nouveau-né de vivre encore au moins une année.

Conséquences des hypothèses

Considérons à nouveau un unique noyau instable en $t = 0$ et notons T l'époque aléatoire de sa désintégration.

1. La fonction $t \mapsto P(T > t)$ est non négative et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $P(T > 0) = 1$.

Preuve. Une probabilité est toujours non négative et il est clair que

$$\forall s, t \geq 0, \{T > t + s\} \subset \{T > t\}$$

car être en vie en $t + s \geq t$ implique être en vie en t . Une probabilité étant monotone, c'est-à-dire $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, il s'ensuit la décroissance en t de la fonction $P(T > t)$.

Une première conséquence des hypothèses est $P(T > 0) = 1$. En effet, pour $s = t = 0$ et en vertu de (a) et (b)

$$P(T > 0) = P(T > 0 + 0 \mid T > 0) = \frac{P(T > 0)}{P(T > 0)} = 1.$$

2. $P(T > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve. Justifions d'abord cela par un argument phénoménologique. Le cas $t = 0$ est imposé par (a) et s'il existait $t_0 > 0$ tel que $P(T > t_0) = 0$ alors, par non-négativité et décroissance de la fonction, $P(T > t) = 0$ pour $t > t_0$. Ceci impliquerait $P(T \leq t_0) = 1$ pour l'événement complémentaire, donc un âge limite fini universel en contradiction avec l'idée de mort sans vieillissement. Par conséquent, $P(T > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

Voici une démonstration plus formelle.

On peut démontrer que la fonction de répartition $F_X(t) = P(X \leq t)$ d'une v.a. X est continue à droite en t . Il en ira donc de même de $P(X > t) = 1 - F_X(t)$. Ainsi, $P(T > 0) > 0$ implique l'existence d'un intervalle $[0, h)$ avec $h > 0$ sur lequel $P(T > t) > 0$. Cette dernière fonction étant non croissante, si elle s'annule en $t > 0$ elle restera nulle sur $[t, +\infty)$. Soit

$$t_* := \inf\{t > 0 ; P(T > t) = 0\}.$$

Nous savons que $t_* > 0$ et, par l'absurde, supposons que $t_* < +\infty$. Alors, par continuité à droite, on a $P(T > t_*) = 0$. Montrons que ceci est impossible.

A l'évidence, si $P(A) = 0$, alors pour tout B , les inégalités $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ impliquent $P(A \cap B) = 0$. Si de plus $P(B) > 0$, alors $P(A | B) = 0$. Pour $0 < h < t_*$, nous avons $P(T > t_* - h) > 0$. La remarque qui précède et (b) conduisent à la contradiction :

$$\begin{aligned} 0 &= P(T > t_*) = P(T > t_* | T > t_* - h) \\ &= P(T > (t_* - h) + h | T > t_* - h) = P(T > h) > 0. \end{aligned}$$

Nous concluons donc que $P(T > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

3. Il existe $\lambda > 0$ tel que pour $t \geq 0$, $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ i.e. $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Preuve. L'inclusion $\{T > t + s\} \subset \{T > t\}$ implique $\{T > t + s\} \cap \{T > t\} = \{T > t + s\}$, d'où (pour $s, t \geq 0$) :

$$P(T > s) = P(T > t + s | T > t) = \frac{P(\{T > t + s\} \cap \{T > t\})}{P(\{T > t\})} = \frac{P(T > t + s)}{P(T > t)}$$

et finalement $P(T > t + s) = P(T > t)P(T > s)$.

En notant $\phi(t) := P(T > t)$, nous retrouvons l'équation fonctionnelle

$$\forall s, t \geq 0, \quad \phi(t + s) = \phi(t)\phi(s)$$

avec $\phi(t)$ monotone (décroissante) et $\phi(0) = P(T > 0) = 1$. Dans [1], les auteurs montrent que les seules solutions de cette équation, qui ne s'annulent jamais, sont les fonctions e^{bt} , $b \in \mathbb{R}$. Comme ϕ est décroissante, b doit être négatif et en notant $b := -\lambda < 0$, nous obtenons $P(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$.

Magnifique conséquence des résultats précédents : sous nos hypothèses, la v.a. T n'a pas d'autre choix que d'être exponentielle. Cet exemple est une très belle illustration de la puissance de l'approche mathématique.

4. Considérons maintenant les $n(0)$ noyaux instables en $t = 0$ avec leurs époques de désintégration respectives $T_1, T_2, \dots, T_{n(0)}$. En vertu de nos hypothèses, chaque T_i ($1 \leq i \leq n(0)$) est une v.a. exponentielle de paramètre λ_i . Tous les noyaux étant de la même substance, les paramètres λ_i sont tous identiques et nous noterons λ leur valeur commune ($\lambda > 0$). Par conséquent les v.a

$$T_1, T_2, \dots, T_{n(0)}$$

sont indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

5. Notons N_t le nombre (aléatoire) de noyaux encore instables en t et D_t le nombre (aléatoire) de désintégrations entre 0 et t . Nous avons la relation

$$N_t(\omega) = n(0) - D_t(\omega).$$

Déterminons $P(D_t = k)$ pour $0 \leq k \leq n(0)$. La probabilité que le noyau i ne se désintègre pas entre 0 et t est $P(T_i > t) = e^{-\lambda t}$ et celle qui se désintègre est $P(T_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Calculons d'abord, pour la numérotation choisie, la probabilité pour que les k premiers noyaux se désintègrent et les $n(0) - k$ noyaux restants ne le fassent pas. Par l'indépendance des variables aléatoires, on a

$$\begin{aligned} &P(T_1 \leq t, T_2 \leq t, \dots, T_k \leq t, T_{k+1} > t, \dots, T_{n(0)} > t) \\ &= P(T_1 \leq t)P(T_2 \leq t) \cdots P(T_k \leq t)P(T_{k+1} > t) \cdots P(T_{n(0)} > t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n(0)-k} \end{aligned}$$

La probabilité est la même pour toutes les configurations avec k noyaux désintégrés entre 0 et t . Le nombre de configurations est donné par le nombre de possibilités de choisir k objets parmi $n(0)$ objets distincts, c'est-à-dire $\binom{n(0)}{k} = \frac{n(0)!}{k!(n(0)-k)!}$. Les différentes configurations étant incompatibles deux à deux, par l'additivité d'une probabilité

$$P(D_t = k) = \binom{n(0)}{k} (1 - e^{-\lambda t})^k (e^{-\lambda t})^{n(0)-k}.$$

Ainsi D_t est une v.a. binomiale

$$D_t \sim \text{Bin}(n(0), 1 - e^{-\lambda t})$$

et son espérance est donc $E(D_t) = n(0)(1 - e^{-\lambda t})$.

Dans le modèle stochastique $n(0)$ est un nombre, mais N_t et D_t sont des v.a.. Puisque l'espérance d'une somme est égale à la somme des espérances et l'espérance d'une constante est cette constante, nous avons

$$N_t = n(0) - D_t \Rightarrow E(N_t) = E(n(0)) + E(D_t) = n(0) - n(0)(1 - e^{-\lambda t})$$

d'où

$$E(N_t) = n(0)e^{-\lambda t}.$$

L'espérance du nombre de noyaux instables en t du modèle stochastique coïncide avec la solution du modèle déterministe.

Discussion autour d'un paradoxe du modèle déterministe

Physiquement parlant, la durée de vie, notée $\gamma_{n(0)}$, d'un échantillon de $n(0)$ noyaux est bien définie. Il s'agit de l'époque de la désintégration du dernier noyau instable. Comme, dans ce modèle, $n(t)$ admet aussi des valeurs non entières, la traduction de cette notion n'est pas évidente. L'égalité $n(\gamma_{n(0)}) = 0$ ne fait pas sens car dans ce cas $\gamma_{n(0)} = +\infty$. On ne sait pas a priori quel niveau dans $(0, 1)$ fournirait un bon critère. On peut, par exemple, définir la durée de vie d'un échantillon comme le temps $\gamma_{n(0)}$ pour atteindre un seul noyau restant. On peut facilement justifier que

$$\gamma_{n(0)} = t_{n(0)} = \frac{\ln(n(0)) - \ln(1)}{\lambda} = \frac{\ln(n(0))}{\lambda}.$$

Dans le modèle déterministe, le paradoxe suivant apparaît : si on considère $2n(0)$ noyaux initiaux, le calcul nous donne

$$\gamma_{2n(0)} = \frac{\ln(2n(0))}{\lambda} = \frac{\ln(2) + \ln(n(0))}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda} + \gamma_{n(0)},$$

alors que si on divise l'échantillon en deux échantillons de taille $n(0)$, ils ont chacun une durée de vie de $\gamma_{n(0)}$, et on a donc $\gamma_{2n(0)} = \gamma_{n(0)}$. Ces deux estimations diffèrent d'exactly une demi-vie déterministe $T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$.

Dans le modèle stochastique, cette contradiction disparaît. Sans le démontrer ici, en séparant les $2n(0)$ noyaux dont la durée de vie est une variable aléatoire $\Gamma_{2n(0)}$ en deux échantillons de tailles $n(0)$ de

durée de vies respectives Γ_1 et Γ_2 , qui sont indépendantes et de même loi que $\Gamma_{n(0)}$, on obtient avec la relation $\Gamma_{2n(0)} = \max\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

$$E(\Gamma_1) = E(\Gamma_2) = \frac{H_{n(0)}}{\lambda} < \frac{H_{2n(0)}}{\lambda} = E(\Gamma_{2n(0)})$$

avec $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Le livre [1] ne fournit pas seulement les modèles présentés ci-dessus. Une large place est attribuée à la construction du modèle déterministe, en présentant différentes tentatives de modélisation infructueuses. Cette partie de livre me semble particulièrement pertinente pour les élèves. En effet, on y découvre graduellement les mécanismes qui permettent de proposer des modèles. Le livre contient aussi une étude de la durée de vie stochastique d'un échantillon, en analysant notamment sa variance et en offrant une étude approfondie de sa densité. La comparaison des deux modèles est illustrée par des exemples, des graphiques et des tableaux. Enfin, quelques pages sont dédiées à la loi de Poisson et à son utilisation dans ce contexte.

J'espère avoir suscité de l'intérêt pour cet ouvrage, disponible à la commande dans toutes les librairies de Suisse et dont la couverture est reproduite ci-dessous.

Yves Roisin

La modélisation mathématique d'un phénomène

Les approches déterministe et stochastique de la désintégration radioactive

La modélisation d'un phénomène représente la transformation de sa compréhension en une structure mathématique. Elle est un équilibre entre sa réalité complexe et son abstraction. Les auteurs présentent deux approches de la désintégration radioactive : celle, déterministe, fréquemment vue dans les études préuniversitaires, et celle, stochastique, nécessitant l'introduction des variables aléatoires. Les modèles présentés font l'objet d'une description minutieuse et d'une validation approfondie, tandis que chaque hypothèse sous-jacente est examinée avec rigueur. L'analyse de fonctions exponentielles, d'équations différentielles du premier ordre ainsi que des probabilités, donnera au lecteur des outils essentiels à la création de modèles mathématiques.

Cet ouvrage s'adresse à tous les amateurs des mathématiques souhaitant approfondir leurs connaissances.



Mathématiques
·
La modélisation mathématique d'un phénomène

La modélisation mathématique d'un phénomène

Les approches déterministe et stochastique de la désintégration radioactive

Jean-Pierre Gabriel, Yves Dubey, Thomas Fournier



Références

- [1] J.-P. GABRIEL, Y. DUBEY et T. FOURNIER, *La modélisation mathématique d'un phénomène. Les approches déterministe et stochastique de la désintégration radioactive*. Éditions Yves Carré, 2024.