

Georg Keller
georg.keller@shinternet.ch

Formel von Faà di Bruno: Eine alternative Herleitung

1. Einleitung

Wenn $h_1(x), h_2(x)$ genügend reguläre Funktionen sind, besagt die Produktregel der Differentialrechnung, dass $(h_1 \cdot h_2)' = h_1' \cdot h_2 + h_1 \cdot h_2'$ ist. Und für höhere Ableitungen und/oder das Produkt von mehr als zwei Funktionen gilt die wohlbekannte verallgemeinerte Produktregel

$$\frac{d^n}{dx^n} (h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_m) = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_m=n \\ i_k \geq 0}} \frac{n!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \dots \cdot i_m!} \cdot h_1^{(i_1)} \cdot h_2^{(i_2)} \cdot \dots \cdot h_m^{(i_m)}, \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

welche im Spezialfall $h_1(x) = h_2(x) = \dots = h_m(x) =: h(x)$ zur Formel

$$\frac{d^n}{dx^n} (h(x))^m = \sum_{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n}^{m, n} \frac{n! \cdot m!}{\prod_{j=0}^n [(j!)^{\varepsilon_j} \cdot \varepsilon_j!]} \cdot (h^{(0)})^{\varepsilon_0} \cdot (h^{(1)})^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot (h^{(n)})^{\varepsilon_n}, \text{ für alle } n, m \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

führt, wobei in der Summe $\sum_{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n}^{m, n}$ über alle Folgen $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ mit $\sum_{j=0}^n \varepsilon_j = m$ und $\sum_{j=0}^n j \cdot \varepsilon_j = n$ summiert wird.

Vor einigen Wochen machte mich einer meiner Bekannten darauf aufmerksam, dass es nicht nur bei *Produkten* von Funktionen (vgl. (1)), sondern überraschenderweise auch bei der *Verkettung* $f(g(x))$ zweier Funktionen f und g eine bemerkenswerte, elegante Formel zur direkten Bestimmung der höheren Ableitungen gibt. Diese „Formel von Faà di Bruno“¹ könne aber nicht mehr so einfach wie (1) hergeleitet werden², sondern erfordere auch Ideen, die nicht wirklich naheliegend seien. - Obwohl ich diese Formel in meinen mathematisch/physikalischen Berufsjahrzehnten nie gebraucht oder vermisst hatte, war ich aus Strukturverständnisgründen doch neugierig geworden, und ich setzte mir zum Ziel, diese mir unbekannte Formel eigenständig herzuleiten. Und als dieses Ziel erreicht war, verglich ich meine Herleitung mit denjenigen, welche ich ohne grossen Aufwand in der mathematischen Literatur (vgl. z.B. [3]) fand. Es zeigte sich, dass sich meine Herleitung mindestens im vielleicht zentralsten Punkt meiner Argumentation³ von den anderen Herleitungen unterscheidet. Obwohl meine Herleitung weder die kürzeste noch die raffinierteste ist, ist es hoffentlich trotzdem sinnvoll, sie im nachfolgenden Kap. 2 vorzustellen, weil sie erstens ziemlich direkt ist und zweitens - wenigstens aus Sicht von Personen, denen das Thema „erzeugende Funktionen“ nicht fremd ist - nur auf eigentlich naheliegenden Ideen beruht, also ohne spezielle, glückliche Eingebungen auskommt⁴. Ausserdem scheint es mir denkbar zu sein, dass im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach und bei adäquater Vorbildung der SchülerInnen (wozu ich u.a. ein gewisses Verständnis für Induktionsbeweise zähle) sowohl die grundsätzliche Strategie als auch einige ausgewählte Detailspekte meiner Herleitung erörtert werden könnten.

¹ Francesco Faà di Bruno (1825 – 1888), italienischer Offizier, Mathematiker, Ingenieur, Erfinder, Erzieher, Komponist und Geistlicher [1]. 1855 publizierte er die nach ihm benannte Formel [2], jedoch noch ohne Beweis; einen solchen legte er 1859 vor [3]. Er war aber weder der erste, welcher „seine“ Formel aufstellte, noch der erste, welcher sie bewies; allerdings scheint es nicht klar zu sein, ob und (falls ja) wieviel Faà di Bruno von den z.T. Jahrzehnte früher erschienenen Arbeiten seiner Vorgänger wusste [3].

² Sofern im Mathematikunterricht (wohl am ehesten im Schwerpunkt- oder Ergänzungsfach „Anwendungen der Mathematik“) induktive Beweisverfahren thematisiert werden, könnte der Beweis von (1) ein lohnendes Betätigungsfeld sein.

³ Vgl. die (in Kap. 3 erläuterte) Motivation für (7) und den (in Kap. 2 geführten) Beweis von (7).

⁴ Dies im Gegensatz zu anderen Herleitungen, so z.B. zur gemäss [3] bekanntesten Herleitung.

2. Formel von Faà di Bruno: Formulierung, Beweis

- Satz (Formel von Faà di Bruno): Wenn $f(x)$ und $g(x)$ zwei hinreichend reguläre Funktionen sind, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{m=1}^n f^{(m)}(g(x)) \cdot \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \left[\frac{n!}{\prod_{j=1}^n (j!)^{\varepsilon_j} \varepsilon_j!} \cdot \prod_{k=1}^n (g^{(k)}(x))^{\varepsilon_k} \right] , \quad (3)$$

wobei in der Summe $\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^{m,n}$ über alle Folgen $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j = m$ und $\sum_{j=1}^n j \cdot \varepsilon_j = n$ summiert wird.

- Der Beweis dieses Satzes verläuft in drei Schritten:

1. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat $\frac{d^n}{dx^n} f(g(x))$ die Form

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \sum_{m=1}^n f^{(m)}(g(x)) \cdot a_{n,m} , \quad (4)$$

wobei die Koeffizienten $a_{n,m}$, $1 \leq m \leq n$, folgende Eigenschaften haben:

$$\square a_{n,m} \text{ ist ein Polynom m. Grades in } g^{(1)}(x), g^{(2)}(x), \dots, g^{(n)}(x) \quad (5)$$

$$\square \text{ genauer: } \begin{cases} a_{n,1} = g^{(n)}(x) \\ a_{n,m} = (a_{n-1,m})' + g'(x) \cdot a_{n-1,m-1} , \text{ für } 1 < m < n \\ a_{n,n} = (g^{(1)}(x))^n \end{cases} \quad (6)$$

Beweis: Via Induktion in n , wobei wir für den Induktionsschritt $((n-1) \rightarrow n)$ benützen, dass

$$\frac{d^n}{dx^n} f(g(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(g(x)) \right) \text{ ist. } \blacksquare$$

- Bemerkung:
- Anhand von (4)&(6) kann man in systematischer Weise alle höheren Ableitungen von $f(g(x))$ rekursiv berechnen; zur Illustration sind in Kap. 4 die Resultate für die Koeffizienten $a_{n,m}$, $1 \leq n \leq 6$, aufgelistet.
 - Die Formel (4) weist genau die in (3) behauptete Grundstruktur auf, und für eine Minderheit der Koeffizienten $a_{n,m}$ kennt man gemäss (6) ihre explizite Form. Um auch für die restlichen Koeffizienten $a_{n,m}$ eine explizite Darstellung zu finden, kann man sich z.B. durch einige beispielhaft berechnete $a_{n,m}$ (vgl. Kap. 4) inspirieren zu lassen. Dies klappte sehr gut für $a_{n,n-1}$, für die übrigen $a_{n,m}$ aber im Wesentlichen nicht. Als erfolgreich erwies sich hingegen die Idee, diejenigen Konsequenzen zu analysieren, welche die Rekursionsbeziehung (6) für die erzeugende Funktion der Koeffizienten $a_{n,m}$ nach sich zieht (vgl. Kap. 3). Dies ist eine Idee, welche nicht wirklich fern liegt, sofern man schon Bekanntschaft mit erzeugenden Funktionen geschlossen hat, und auf diese Weise gelangte ich zur Vermutung, dass die in (7) formulierte Aussage wahr sein könnte.

2. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $1 \leq m \leq n$ kann $a_{n,m}$ wie folgt geschrieben werden:

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \quad (7)$$

Beweis: Via Induktion in n :

- Induktionsverankerung ($n=1$): Wenn $n=1$ ist, gibt es für m nur den Fall $m=1$; und für $n=m=1$ ergibt die rechte Seite von (7) $\left(\frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} [\lambda \cdot g'(x)] \right) \Big|_{\lambda=0} = g'(x)$, was gemäss (6) tatsächlich gleich $a_{1,1}$ ist.

- Induktionsschritt $((n-1) \rightarrow n$ für $n \geq 2$): Betreffend m müssen wir die drei Fälle $m = 1$ resp. $1 < m < n$ resp. $m = n$ untersuchen:

$\Rightarrow$ Der Fall $m = 1$: Die rechte Seite von (7) lautet $\left(\frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0}$, was dank der Bedingung $\lambda = 0$ einfach $g^{(n)}(x)$ ergibt; gemäss (6) stimmt dies mit $a_{n,1}$ überein.

$\Rightarrow$ Der Fall $1 < m < n$: Sofern dieser Fall nichttrivial sein soll, muss $n \geq 3$ sein; im Folgenden wollen wir daher von $n \geq 3$ ausgehen. Mit Hilfe der Rekursionsbeziehung in (6) und der (nicht explizit formulierten) Induktionsvoraussetzung kann $a_{n,m}$ wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} a_{n,m} &\stackrel{(6)}{=} (a_{n-1,m})' + g'(x) \cdot a_{n-1,m-1} \\ &\stackrel{(7)}{=} \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \right) \\ &\quad + g'(x) \cdot \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \end{aligned} \quad (8)$$

Jetzt vertauschen wir in der Zeile (8) die zusätzliche Ableitung nach x mit denjenigen nach λ :

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \cdot \lambda \cdot g'(x) \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \\ &\quad + g'(x) \cdot \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} \left[\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} . \end{aligned}$$

Mit $h_1(\lambda) := \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)}$ und $h_2(\lambda) := \lambda \cdot g'(x)$ sehen wir via (1), dass $\left(\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} [h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda)] \right) \Big|_{\lambda=0} = g'(x) \cdot m \cdot \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} h_1(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=0}$ ist; also gilt:

$$= \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0} ,$$

womit (7) auch für $1 < m < n$ bewiesen ist.

$\Rightarrow$ Der Fall $m = n$: Weder die Induktionsvoraussetzung noch die Bedingung $\lambda = 0$ verwendend, aber die Tatsache, dass die n . Ableitung sowohl nach x als auch nach λ berechnet werden soll, ist die rechte Seite von (7) offenbar gleich $\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} [\lambda^n \cdot (g'(x))^n] = (g'(x))^n$, was gemäss (6) gleich $a_{n,n}$ ist. ■

3. Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $1 \leq m \leq n$ kann (7) deutlich einfacher, nämlich als

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m} (g(x))^m \right) \Big|_{g=0} \quad (9)$$

geschrieben werden, wobei die Bedingung " $g = 0$ " bedeutet, dass jeder Summand, in dem ein Faktor $g(x)$ auftritt, gleich Null gesetzt wird.

Beweis: Gemäss (7) ist $a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0}$. Via (1), und die Reihenfolge der Ableitungen nach x resp. λ vertauschend, erhalten wir

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} e^{\lambda \cdot g(x)} \right) \cdot \frac{\partial^{m-k}}{\partial \lambda^{m-k}} e^{-\lambda \cdot g(x)} \right] \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left((g(x))^k \cdot e^{\lambda \cdot g(x)} \cdot (-g(x))^{m-k} \cdot e^{-\lambda \cdot g(x)} \right) \right] \right) \Big|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^k \cdot (-g(x))^{m-k} \right] .
\end{aligned} \quad (10)$$

Für $k < m$ enthält der jeweilige Summand von (10) einen Faktor $g(x)$; weil wir aufgrund von (5) wissen, dass im Schlussresultat für $a_{n,m}$ *keine* Summanden mit einem Faktor $g(x)$ auftreten, können wir die Auswertung von (10) wie folgt vereinfachen: Erstens streichen wir alle Summanden mit $k < m$, d.h. das Resultat für $a_{n,m}$ scheint gleich dem Summanden mit $k = m$, d.h. gleich $\frac{1}{m!} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m$, zu sein. Dieses Resultat weist allerdings noch einen Fehler auf: Beim Berechnen von $\frac{1}{m!} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m$ entstehen für $m \geq 2$ u.a. Summanden, welche einen Faktor $g(x)$ enthalten, wobei (5) garantiert, dass sich diese Summanden mit ihren Pendanten aus dem Indexbereich $k < m$ zu Null addieren; weil bei uns diese Pendanten jetzt aber fehlen, ist nicht mehr automatisch garantiert, dass nach dem Berechnen von $\frac{1}{m!} \frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m$ keine Summanden mit einem Faktor $g(x)$ auftreten. Diese Eigenschaft von $a_{n,m}$ müssen wir daher, zweitens, wohl oder übel von Hand erzwingen, was zu (9) führt. ■

Folgerung: Auf der rechten Seite von (9) die Ableitungen via (2) durchführend, bemerken wir, dass sich die Bedingung " $g = 0$ " elegant dadurch realisieren lässt, dass wir nur diejenigen Summanden mit $\varepsilon_0 = 0$ berücksichtigen:

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} (g(x))^m \right) \Big|_{g=0} = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}^{m,n} \left[\frac{n! \cdot m!}{\prod_{j=1}^n (j!)^{\varepsilon_j} \cdot \varepsilon_j!} \cdot \prod_{k=1}^n (g^{(k)}(x))^{\varepsilon_k} \right] . \quad (11)$$

Aus (4), (9) und (11) erhalten wir schliesslich (3). ■

3. Eine formale Begründung für die Formel (7)

- In diesem Kapitel werden wir der Einfachheit halber *formal* rechnen, d.h. mit den auftretenden Funktionen und Reihen so umgehen, als seien sie hinreichend regulär resp. konvergent. Ob sie es auch wirklich sind, werden wir aber nie abklären, denn es geht hier nicht um einen *Beweis*, sondern nur um ein hoffentlich plausibles *Erraten* von (7). Wie man die Richtigkeit von (7) dann tatsächlich beweisen kann, haben wir im Anschluss an (7) gesehen.
- Wir betrachten die erzeugende Funktion $G(z, w; x)$ der Koeffizienten $a_{n,m}$, d.h. die Potenzreihe

$$G(z, w; x) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n a_{n,m}(x) z^n w^m , \quad (12)$$

wobei wir ausnahmsweise $a_{n,m}(x)$ statt nur $a_{n,m}$ geschrieben haben, um ausdrücklich auf die x -Abhängigkeit der $a_{n,m}$ aufmerksam zu machen und damit die Schreibweise $G(\cdot, \cdot; x)$ zu rechtfertigen. Wir setzen (6) auf der rechten Seite von (12) ein und erkennen nach kurzer Rechnung, dass $G(z, w; x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial x} G(z, w; x) = \left(\frac{1}{z} - g'(x) w \right) \cdot G(z, w; x) - g'(x) w \quad (13)$$

gehört. Daher kann $G(z, w; x)$ geschrieben werden als Summe der (aufgrund von Randbedingungen noch geeignet zu justierenden) allgemeinen Lösung $G_{\text{hom}}(z, w; x)$ des homogenen Teils von (13) und irgendeiner partikulären Lösung $G_{\text{part}}(z, w; x)$ von (13). $G_{\text{hom}}(z, w; x)$ hat die Form $G_{\text{hom}}(z, w; x) = C(z, w) \cdot e^{\frac{x}{z} - g(x) w}$; und $G_{\text{part}}(z, w; x)$ bestimmen wir via Variation der Konstanten, d.h. $G_{\text{part}}(z, w; x) = D(z, w; x) \cdot e^{\frac{x}{z} - g(x) w}$, wobei $D(z, w; x)$ die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial x} D(z, w; x) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x) w} \right) \cdot e^{-\frac{x}{z}}$ erfüllt. Also ist $-D(z, w; x) = \int \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x) w} \right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} dx$; und mittels partieller

Integration (wobei wir den Faktor $\left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x)w}\right)$ nicht etwa integrieren, sondern ableiten) erhalten wir $-D(z, w; x) = -z \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} + \int z \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} dx$. Iteration der partiellen Integration führt schliesslich zu

$$-D(z, w; x) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-\frac{x}{z}} + Q(z, w), \quad (14)$$

wo wir die beliebig wählbare Integrationskonstante $Q(z, w)$ der Einfachheit halber gleich Null setzen.

- Fazit: Unsere obigen formalen Überlegungen suggerieren, dass

$$\begin{aligned} G(z, w; x) &= G_{\text{hom}}(z, w; x) + G_{\text{part}}(z, w; x) \\ &\stackrel{(14)}{=} C(z, w) \cdot e^{\frac{x}{z} - g(x)w} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w} \end{aligned} \quad (15)$$

ist. Via Reihenentwicklung von $e^{\frac{x}{z}}$ sehen wir, dass der erste Summand auf der rechten Seite von (15) als $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \cdot \frac{C(z, w) \cdot x^k \cdot e^{-g(x)w}}{k!}$ geschrieben werden kann. Weil gemäss (12) in der gesuchten Lösung von (13) nur *positive* Potenzen von z auftreten und weil auch der zweite Term auf der rechten Seite von (15), d.h. die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}$, nur *positive* Potenzen von z aufweist, müssen alle Koeffizienten $\frac{C(z, w) \cdot x^k \cdot e^{-g(x)w}}{k!}$ gleich Null sein, und zwar für alle x und w . Also müssen wir $C(z, w) = 0$ setzen, d.h.

$$G(z, w; x) \stackrel{(15)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}. \quad (16)$$

Gemäss (12) und (16) ist daher $\sum_{m=1}^n a_{n,m} w^m = \left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}$, d.h.

$$a_{n,m} = \left(\frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial w^m} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{g(x)w}\right) \cdot e^{-g(x)w}\right]\right) \Big|_{w=0}. \quad \blacksquare$$

4. Ergänzung

Entweder rekursiv mittels (6), oder direkt anhand von (9)&(11) resp. (3), erhält man die folgende Liste der Koeffizienten $a_{n,m}$ mit $1 \leq n \leq 6$ (wobei wir der einfacheren Lesbarkeit halber jeweils nur $g^{(j)}$ statt $g^{(j)}(x)$ schreiben):

$a_{1,1} = g^{(1)}$	$a_{4,1} = g^{(4)}$	$a_{6,1} = g^{(6)}$
	$a_{4,2} = 3 (g^{(2)})^2 + 4 g^{(1)} g^{(3)}$	$a_{6,2} = 10 (g^{(3)})^2 + 15 g^{(2)} g^{(4)} + 6 g^{(1)} g^{(5)}$
$a_{2,1} = g^{(2)}$	$a_{4,3} = 6 (g^{(1)})^2 g^{(2)}$	$a_{6,3} = 15 (g^{(2)})^3 + 60 g^{(1)} g^{(2)} g^{(3)} + 15 (g^{(1)})^2 g^{(4)}$
$a_{2,2} = (g^{(1)})^2$	$a_{4,4} = (g^{(1)})^4$	$a_{6,4} = 45 (g^{(1)})^2 (g^{(2)})^2 + 20 (g^{(1)})^3 g^{(3)}$
		$a_{6,5} = 15 (g^{(1)})^4 g^{(2)}$
$a_{3,1} = g^{(3)}$	$a_{5,1} = g^{(5)}$	$a_{6,6} = (g^{(1)})^6$
$a_{3,2} = 3 g^{(1)} g^{(2)}$	$a_{5,2} = 10 g^{(2)} g^{(3)} + 5 g^{(1)} g^{(4)}$	
$a_{3,3} = (g^{(1)})^3$	$a_{5,3} = 15 g^{(1)} (g^{(2)})^2 + 10 (g^{(1)})^2 g^{(3)}$	
	$a_{5,4} = 10 (g^{(1)})^3 g^{(2)}$	
	$a_{5,5} = (g^{(1)})^5$	

Referenzen

- [1] https://de.wikipedia.org/wiki/Francesco_Faà_di_Bruno (28.11.25)
- [2] https://de.wikipedia.org/wiki/Formel_von_Faà_di_Bruno (28.11.25)
- [3] Warren P. Johnson: „The Curious History of Faà di Bruno’s Formula”, Amer. Math. Monthly 109 (2002) p. 217-234