Hans Ulrich Keller
ehem. MNG Rämibühl, hukkeller@bluewin.ch

Wieviel Raum beansprucht ein rotierender Würfel?

Ein Würfel mit einer Kantenlänge 1 wird um eine seiner Raumdiagonalen rotiert.
Welches Volumen $V = V_1 + V_2 + V_3$ wird durch den dabei entstehenden Rotationskörper beansprucht?

Die Würfeldiagonalen haben alle je die Länge $\sqrt{3}$. Als Rotationsachse wählen wir die x–Achse vom Würfelpunkt $\mathrm{O}(0,0,0)$ zum diagonal gegenüberliegenden Würfelpunkt $\mathrm{Z}(\sqrt{3},0,0)$. Die drei nun am nächsten beim Ursprung liegenden anderen Würfelpunkte E, F und G bilden ein gleichseitiges Dreieck, welches in einer Ebene senkrecht zur x–Achse steht, wie dies aus folgender Figur 1 ersichtlich wird:

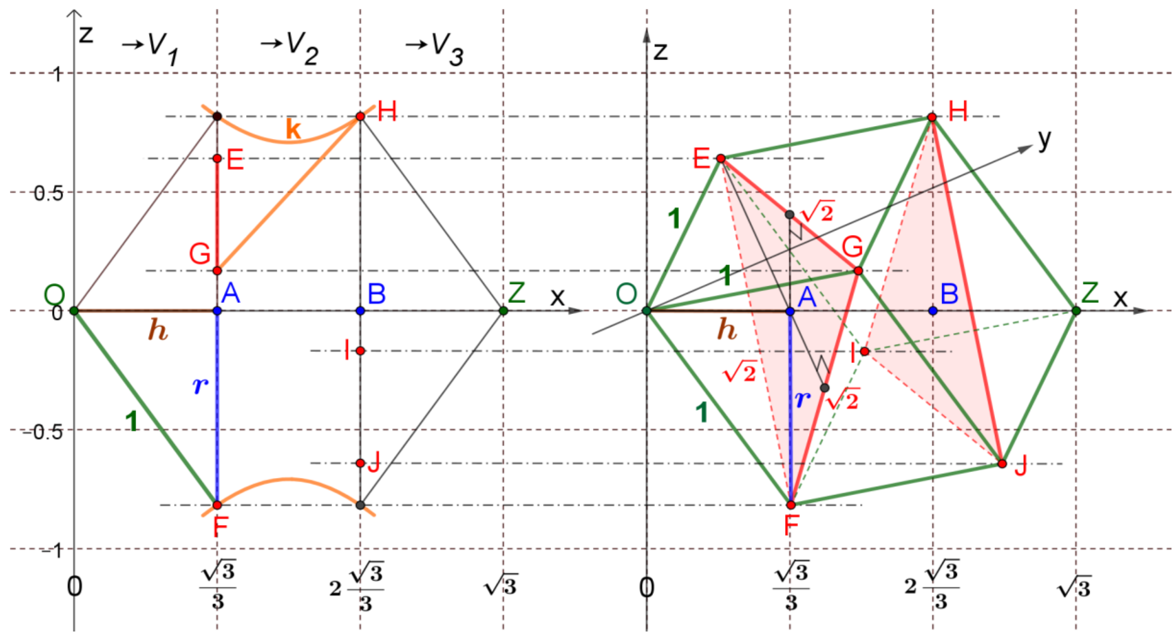

Fig. 1: Projektion auf die $x - z -$ Ebene und eine räumliche Darstellung des rotierenden Würfels.

Die drei Punkte E, F und G haben untereinander einen Abstand von je $\sqrt{2}$ und je einen Abstand 1 zum Würfelpunkt O im Ursprung. Die Ebene dieser drei Punkte hat somit einen Abstand $\mathrm{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ zum Ursprung. Die anderen drei ebenfalls nicht auf der x–Achse liegenden Würfelpunkte H, I und J liegen in einer ebenfalls senkrecht zur x–Achse stehenden Ebene, die einen Abstand $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$ vom Ursprung hat.

Der rotierende Würfelteil im ersten Drittel der Würfeldiagonale beansprucht bei der Rotation um diese Achse das Volumen eines Kegels mit der Höhe $\mathrm{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und dem Radius $\mathrm{r} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, was ein Kegelvolumen von $V_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$ ergibt. Das gleiche Volumen $V_3 = V_1$ nimmt der dazu kongruente Kegel im dritten Drittel der Diagonale ein.

Etwas schwieriger ist es, das Volumen V_2 des Rotationskörpers im Mitteldrittel des rotierenden Würfels zu berechnen. Dieses ist durch eine Kurve begrenzt, welche in der obigen Figur 1 mit k bezeichnet wurde. Diese Kurve ist die Einhüllende aller Projektionen der Verbindungsgeraden von Würfelpunkten wie z. B. G und H auf die $x-z-$Ebene.

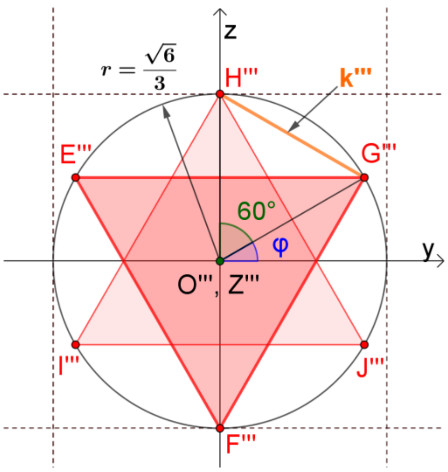

Fig. 2: Projektion des Würfels auf die $y-z-$Ebene.

Der Punkt G hat bei der Rotation um die x–Achse die Koordinaten

$$\mathrm{G}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, r\cdot\cos(\varphi), r\cdot\sin(\varphi)\right).$$

Der Punkt H ist dabei, in Blickrichtung der x–Achse, um einen Winkel von 60° verdreht, wie das in der nebenstehenden Figur 2 dargestellt ist. Der Punkt H hat darum die Koordinaten

$$\mathrm{H}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, r\cdot\cos(\varphi+60°), r\cdot\sin(\varphi+60°)\right).$$

Die Gerade GH hat damit die Gleichung $\vec{s} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ r\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ r\cdot(\cos(\varphi+60°)-\cos(\varphi)) \\ r\cdot(\sin(\varphi+60°)-\sin(\varphi)) \end{pmatrix}.$

Die Projektion dieser Geraden GH auf die $x-z-$Ebene ist die Gerade

$$\vec{s}\,''' = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 0 \\ r\cdot\sin(\varphi) \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ 0 \\ r\cdot(\sin(\varphi+60°)-\sin(\varphi)) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

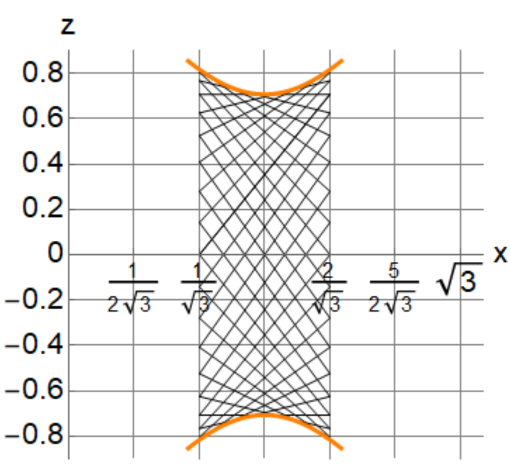

Fig. 3: Projektionen der Würfelkante GH.

Daraus kann durch Eliminieren von λ die Geradenschar

$$z(x,\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(\sqrt{3}\cdot x-1\right)\cdot\cos(\varphi)+\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\sin(\varphi)\right) \quad \text{(Gl. *)}$$

gefunden werden; die Strecke GH liegt auf einer dieser Geraden.

In der nebenstehenden Figur 3 sind für Winkelintervalle $\Delta\varphi$ von je 10° die jeweiligen Projektionen der Strecke GH in die $x-z-$Ebene wiedergegeben, zusammen mit deren in Gelb eingezeichneten einhüllenden Kurve k.

Jetzt muss diese einhüllende Kurve der Schargeraden aber noch gefunden werden! Dazu wird die Ableitung von $z(x,\varphi)$ (s. Gl. *) nach φ gleich Null gesetzt und die entstehende Gleichung nach φ aufgelöst.

Das ergibt den Winkel $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}\cdot x-1}\right)$. Dieser Term für φ wird in der Gl. * eingesetzt, was die Gleichung der Einhüllenden ergibt: $z(x) = \pm\sqrt{2-2\sqrt{3}\cdot x+2x^2}$.

Die Einhüllende ist eine Hyperbel mit der Gleichung $$\frac{z^2}{\left(\sqrt{2}/2\right)^2} - \frac{\left(x-\sqrt{3}/2\right)^2}{(1/2)^2} = 1\,.$$

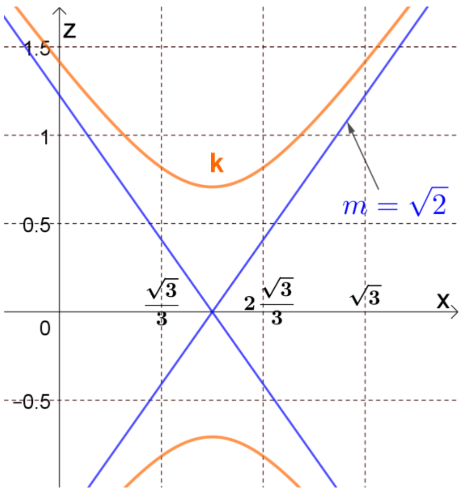

Fig. 4: Einhüllende k mit ihren Tangenten.

Ihr Graph ist die volumenbegrenzende Kurve des rotierenden Würfels im Intervall $\frac{\sqrt{3}}{3} \le x \le \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Damit kann das in diesem Intervall vom rotierenden Würfel in Anspruch genommene Volumen V_2 berechnet werden:

$$V_2 = \pi \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} z(x)^2\, dx = \pi \cdot \pi \cdot \int_{1/\sqrt{3}}^{2/\sqrt{3}} \left(2-2\sqrt{3}x+2x^2\right) dx\,.$$

Dieses Integral für V_2 ist gleich $\frac{5\pi\sqrt{3}}{27}$.

Das gesamte vom rotierenden Würfel beanspruchte Volumen V ergibt sich damit wie folgt:

$$\boxed{V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{5\pi\sqrt{3}}{27} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}}.$$

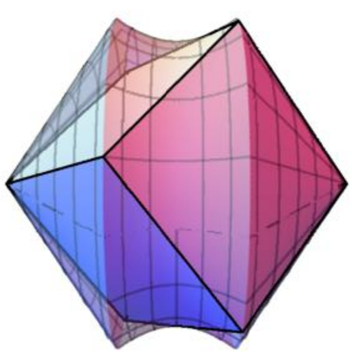

Fig. 5: Würfel mit seinem bei der Rotation beanspruchten Volumen in einer typischen Lage.

Literatur: Zum Bild in Fig. 5:

Rob Johnson, https://math.stackexchange.com/questions/115743/question-about-a-rotating-cube.