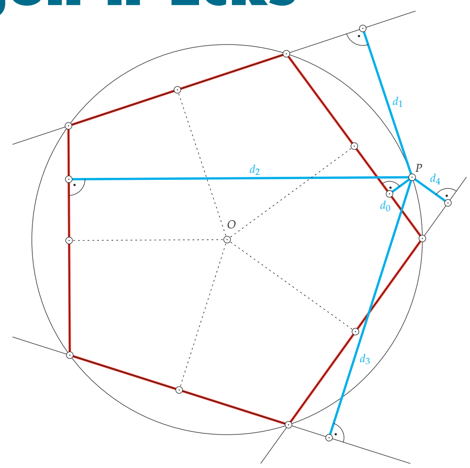
Peter Gallin
peter@gallin.ch

Summe der Quadrate der Abstände von einem Umkreispunkt zu den Seitengeraden eines regelmässigen n-Ecks



Gegeben sei ein regelmässiges n-Eck ($n > 2$), das im Einheitskreis mit Zentrum O einbeschrieben ist. Gesucht ist die Summe S aller Quadrate der Abstände, die von einem beliebigen Punkt P des Einheitskreises aus zu den Seitengeraden des Vielecks gemessen werden:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} d_k^2$$

Da wir mit komplexen Zahlen rechnen werden, ist eine mathematische Vorbereitungen notwendig.

Summenformeln

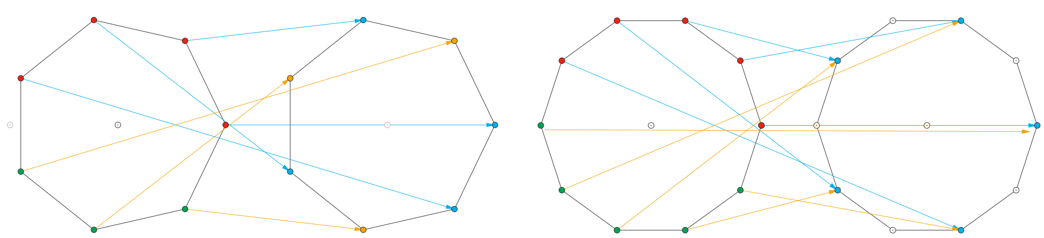
Wir betrachten in der komplexen Zahlenebene für $\phi = \frac{2\pi}{n}$ und $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ die n n-ten Einheitswurzeln $\lambda_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi}$, die ein regelmässiges n-Eck im Einheitskreis bilden. Es gilt $\lambda_k \lambda_1 = \lambda_{k+1}$, so dass für die Summe $s = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k$ gilt $s\lambda_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1}$. Da nun $\lambda_n = 1 = \lambda_0$, folgt $s\lambda_1 = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k$ und somit $s = s\lambda_1$ oder $s(1-\lambda_1) = 0$. Da $\lambda_1 \neq 1$, folgt $s = 0$, was physikalisch klar ist, da der Schwerpunkt von n Einheitsmassen in den Ecken des n-Ecks im Ursprung liegt. Wir halten für beliebiges β fest:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\cos(k\phi + \beta) + \mathrm{i} \cdot \sin(k\phi + \beta)) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\phi+\beta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \cdot s = 0$$

Das bedeutet für den Real- und Imaginärteil $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\phi + \beta) = 0$ und $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\phi + \beta) = 0$. Nun gilt aber auch für $n > 2$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\phi+\beta)})^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\phi})^2 = 0\ .$$

Anhand der folgenden Bilder macht man sich klar, dass das Verdoppeln der Zentriwinkel bei allen Ecken eines regelmässigen n-Ecks, also beim Quadrieren der n-ten Einheitswurzeln, im Fall n ungerade die Ecken des gleichen regelmässigen n-Ecks erreicht werden und die Summe demzufolge Null ist. Im Fall, dass n gerade ist, werden die Ecken eines $\frac{n}{2}$-Ecks doppelt belegt, was wiederum die Summe Null zur Folge hat. Natürlich könnte man diese Tatsache auch rein rechnerisch nachweisen.



Damit erhalten wir einerseits

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2(k\phi+\beta)} = 0 \quad \text{also} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \cos(2(k\phi + \beta)) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2(k\phi + \beta)) = 0$$

und andererseits

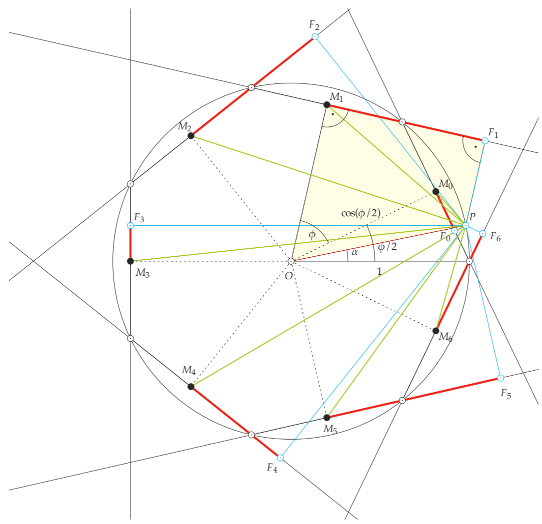
$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\phi+\beta)})^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos(k\phi + \beta) + \mathrm{i} \sin(k\phi + \beta))^2 = 0 \quad \text{oder}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi+\beta) - \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi+\beta) + 2\mathrm{i} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\phi+\beta)\cos(k\phi+\beta) = 0 \ .$$

Der dritte Summand $2\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\phi+\beta)\cos(k\phi+\beta)$ kann als $\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2(k\phi+\beta))$ geschrieben werden und ist gemäss der ersten obigen Folgerung gleich Null. So erhalten wir die bemerkenswerte Beziehung, dass sie Summen für Sinus und für Cosinus gleich sind: $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi+\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi+\beta)$. Zusammen mit $\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi+\beta) + \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi+\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\phi+\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2(k\phi+\beta) = \frac{n}{2} \ .$$

Berechnung von T und S



Kehren wir zurück zum regelmässigen n-Eck, dessen Ecken die n-ten Einheitswurzeln in der komplexen Ebene sind. Zuerst berechnen wir in der nebenstehenden Figur die Summe T der Quadrate der k rot eingezeichneten Strecken M_kF_k, welche zwischen den Seitenmitten M_k und den Lotfusspunkten F_k liegen. Der Punkt P habe den Winkel α gegenüber der reellen Achse. Da $|OP| = 1$ sieht man am besten im Fall $k = 1$ mit Hilfe des gelben rechtwinkligen Trapezes, dass $|M_1F_1| = \sin(\frac{3\phi}{2} - \alpha)$. Für $k = 2$ ist der Winkel $\frac{5\phi}{2} - \alpha$ bereits stumpf. Trotzdem ist $|M_2F_2| = \sin(\frac{5\phi}{2} - \alpha)$. Die Formel gilt auch für $k = 0$ und die übrigen k. Somit sind die Längen der roten Strecken $\sin(\frac{\phi}{2} - \alpha), \sin(\frac{3\phi}{2} - \alpha), \sin(\frac{5\phi}{2} - \alpha), \ldots, \sin(\frac{(2n-1)\phi}{2} - \alpha)$. So erhalten wir mit $\beta = \frac{\phi}{2} - \alpha$ und der vorangehenden Berechnung

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{(2k+1)\phi}{2} - \alpha\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(k\phi + \frac{\phi}{2} - \alpha\right) = \frac{n}{2} \ .$$

Nun ist das Trägheitsmoment J_O der n Einheitsmassen in den Seitenmitten (schwarze Punkte) bezüglich O gleich $J_O = n \cdot \cos^2\frac{\phi}{2}$ und bezüglich P nach dem Satz von Steiner

$$J_P = n \cdot \cos^2\frac{\phi}{2} + n \cdot 1^2 = n(1 + \cos^2\frac{\phi}{2}) \ .$$

Es ist aber J_P gleich der Summe der Quadrate der grün eingezeichneten Strecken, da wir Einheitsmassen auf die schwarzen Punkte gesetzt haben. Daher ist die Summe der Quadrate der blauen Lotstrecken, also S, nach dem Satz von Pythagoras gleich die Summe der grünen Quadrate minus die Summe der roten Quadrate.

$$S = n(1 + \cos^2\frac{\phi}{2}) - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} + n\cos^2\frac{\phi}{2} \ .$$

Im Spezialfall $n = 3$ ist $\phi = 120°$ und somit $S = \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ also $S = h^2$ ($h =$ Höhe des Dreiecks).

Die gefundene Formel für S könnte auch als Trägheitsmoment interpretiert werden, nämlich der n Einheitsmassen bezüglich eines beliebigen Punktes Q, der auf einem zum Einheitskreis konzentrischen Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$ liegt. Ausgehend von J_P wäre dann wiederum nach dem Satz von Steiner

$$J_Q = n \cdot \cos^2\frac{\phi}{2} + n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{n}{2} + n\cos^2\frac{\phi}{2} \ .$$