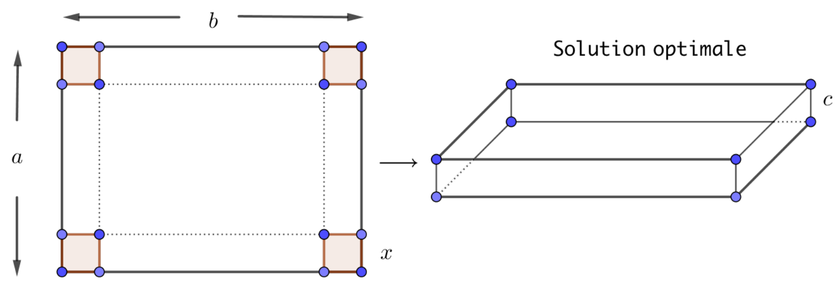
Christian Aebi
Collège Calvin, christian.aebi@edu.ge.ch

Pavés droits diophantiens optimisés

Un problème d'optimisation classique que l'on soumet volontiers à nos élèves est le suivant : prendre une feuille de papier rectangulaire de dimensions $a \times b$ avec $a < b$, découper un carré de côté x dans chaque coin, replier les bords pour obtenir un pavé droit et déterminer la valeur de x pour que le volume du pavé soit optimal [1, Ex. 4.45]. Si a, b et x sont des entiers et que $x = c$ correspond à la valeur maximale pour a et b fixés alors le pavé droit est dit diophantien optimisé.



L'objectif de cette note est de fournir une paramétrisation de l'ensemble des pavés droits diophantiens optimisés.

Théorème. *Toute solution du problème ci-dessus s'obtient en choisissant deux entiers positifs s et t et en posant*

$$a = s(s+2t)k \qquad b = t(t+2s)k \qquad c = \frac{kst}{2},$$

où $k = 1$ si $st \equiv 0 \pmod 2$ et $k = 2$ sinon.

Démonstration. Avec les notations ci-dessus, le volume du pavé est donné par $V(x) = x(a-2x)(b-2x)$. On vérifie aisément que les points critiques de V remplissent les deux conditions ci-dessous pour que les solutions soient entières

$$4(a+b)^2 - 12ab = d^2 \quad \text{avec} \quad d \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 12 \mid 2(a+b) - d, \tag{1}$$

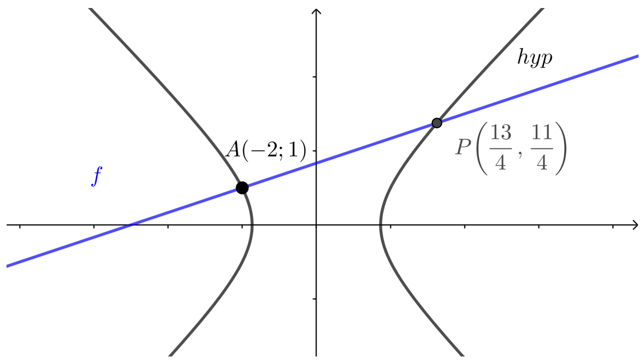
puisque $\frac{1}{12}(2(a+b) \pm d)$ sont respectivement l'abscisse du minimum et du maximum local de V. Afin d'identifier d, posons $a + b = n$ et $b - a = m$ d'où $\frac{1}{4}(n^2 - m^2) = ab$, $b = \frac{n+m}{2}$, $a = \frac{n-m}{2}$. Observons que $0 < m < n$ et qu'ils appartiennent aux entiers naturels. La substitution dans (1) donne

$$3m^2 + n^2 = d^2 \iff 3 = \left(\frac{d}{m}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right)^2.$$

En déterminant l'intersection de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 3$ avec une droite de pente rationnelle p, passant par exemple par $A(-2,1)$, c'est-à-dire $y = p(x+2)+1$, on obtient alors une paramétrisation de tous les points à coordonnées rationnelles de l'hyperbole du premier quadrant à condition que $\sqrt{3} - 2 < p < 1$.

Par exemple, la droite bleue ci-dessous a une pente de $\frac{1}{3}$ et détermine le point $P(13/4, 11/4)$. Il est aisé de démontrer que l'intersection de la droite de pente p avec l'hyperbole du premier quadrant est

$$\left(\frac{2(p^2+p+1)}{1-p^2}, \frac{p^2+4p+1}{1-p^2}\right).$$



Si $p = \dfrac{s}{t}$ alors $x = \dfrac{2(s^2+st+t^2)}{t^2-s^2}$, $y = \dfrac{s^2+4st+t^2}{t^2-s^2}$ et donc

$$n = (s^2+4st+t^2)k \qquad m = (t^2-s^2)k \qquad d = 2k(s^2+st+t^2).$$

En substituant les expressions ci-dessus on obtient finalement

$$a = \frac{n-m}{2} = ks(s+2t) \qquad b = \frac{n+m}{2} = kt(t+2s) \qquad c = \frac{kst}{2}.$$

Remarquons d'abord que $s \leq 0 < t$ implique la contradiction

$$2bc = k^2t^2s(t+2s) \leq 0,$$

puisque $\frac{|s|}{t} < 2-\sqrt{3} < \frac{1}{2}$ et $a, b, c \in \mathbb{N}$. De plus, $2(a+b) - d = 6stk$ est divisible par 12 si st est pair ou si $k = 2$. □

Remarque. En prenant $s = 1$, $t = 2$ on déduit $a = 5$, $b = 8$, $c = 1$. D'où, le plus petit parallélépipède rectangle diophantien optimisé possible a pour dimensions, $3\times6\times1$. Cette solution me semble répondre à la Question Ouverte posée dans [2] :

Open Question. *As before, a computer check has suggested that $a = 5$ and $b = 8$ are the minimal distinct integral values of a and b so that the maximum volume occurs at an integral value of s. Is this true ?*[1]

Comme laisse suggérer le titre de [2], ce dernier traite essentiellement du cas rationnel. Cependant, on trouve dans la dernière partie une caractérisation particulièrement alambiquée des solutions entières (théorème 2). L'avantage de notre résultat est de fournir une paramétrisation explicite et élémentaire.

Références

[1] C.R.M., *FUNDAMENTUM de mathématique, ANALYSE*, (2010).

[2] Philip K. Hotchkiss, *It's Perfectly Rational*, College Math. J., vol 33 (2), March 2002.

[1] **Problème ouvert.** Comme précédemment, une simulation sur ordinateur suggère que $a = 5$ et $b = 8$ sont les valeurs entières minimales de a et b, afin que le volume du pavé droit soit maximal pour en une valeur entière c. Est-ce vrai ?