CMSI

Claudio Marsan
CMSI, claudio.marsan@bluewin.ch

# L'irrazionalità di π

L'irrazionalità di π, sebbene sospettata fin dall'antichità, fu dimostrata per la prima volta solo nel 1761 dal matematico e filosofo svizzero Johann Heinrich Lambert (1728–1777). Lambert basò la sua dimostrazione (vedi [3]) sullo sviluppo in frazione continua di $\tan x$; diversi matematici, tra i quali Gauss e Hermite, proposero poi altre dimostrazioni (alcune di queste sono presentate in [5] e in [6]).

Lo scopo di questo breve articolo è fornire una dimostrazione dell'irrazionalità di π che sia comprensibile anche a uno studente liceale che abbia delle conoscenze elementari di calcolo differenziale e integrale. Per questo motivo l'articolo si basa sulla dimostrazione per assurdo proposta nel 1949 da Ivan Niven in [4].

Ammettiamo che $\pi = a/b$ sia il quoziente di due numeri interi positivi $a$ e $b$ e che $n$ sia un numero intero non negativo.

**1.** La funzione polinomiale $g$ definita da

$$g(x) := \frac{x^n}{n!}$$

è infinitamente derivabile ed è facile dimostrare che la sua derivata di ordine $k$ vale

$$g^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-k}}{(n-k)!}, & \text{se } 0 \le k < n \\ 1, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k > n\,. \end{cases} \tag{1}$$

Possiamo notare che per $k \neq n$ vale

$$g^{(k)}(0) = 0. \tag{2}$$

Ricordiamo inoltre che per ogni numero reale $x$ vale

$$\lim_{n\to+\infty} g(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0\,. \tag{3}$$

**2.** La funzione polinomiale $h$ definita da

$$h(x) := (a - bx)^n$$

è infinitamente derivabile ed è facile dimostrare che la sua derivata di ordine $k$ vale

$$h^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}(a-bx)^{n-k}(-b)^k\,, & \text{se } 0 \le k < n \\ n!(-b)^n\,, & \text{se } k = n \\ 0, & \text{se } k > n\,. \end{cases} \tag{4}$$

Possiamo notare che per $k \neq n$ vale

$$h^{(k)}(\pi) = h^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0\,. \tag{5}$$

**3.** La funzione reale $f$ sia il prodotto delle funzioni $g$ e $h$:

$$f(x) := g(x) \cdot h(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} = \frac{(bx)^n \cdot \left(\frac{a}{b} - x\right)^n}{n!}\,. \tag{6}$$

Siccome per ogni numero reale $x \in \,]0, \pi[$ valgono

$$bx > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b} - x > 0$$

possiamo concludere che la funzione $f$ è positiva nell'intervallo aperto $]0, \pi[$.

Le derivate di ordine $k$ della funzione $f$ possono essere calcolate applicando la *regola di Leibniz* sulle derivate di ordine superiore di un prodotto (tale regola può essere dimostrata facilmente per induzione, da notare l'analogia con la formula del binomio di Newton):

$$f^{(k)}(x) = [g(x) \cdot h(x)]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot g^{(k-i)}(x) \cdot h^{(i)}(x). \tag{7}$$

Siamo interessati ai valori assunti da $f^{(k)}(x)$ nei punti $x = 0$ e $x = \pi$. Dalle espressioni (2) e (5) ricaviamo che i termini $g^{(k-i)}(x) \cdot h^{(i)}(x)$, che appaiono nella sommatoria in (7), si annullano in $x = 0$ e in $x = \pi$ quando la coppia $(k - i, i)$ è diversa da $(n, n)$, ossia se $k \neq 2n$. Nel caso $k = 2n$ per il termine di indice $i = n$ della sommatoria vale

$$\binom{2n}{n} \cdot g^{(n)}(x) \cdot h^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \cdot 1 \cdot n! \cdot (-b)^n = \frac{(2n)!}{n!} \cdot (-b)^n\,.$$

Tale termine è un numero intero che non dipende da $x$.

Riassumendo: abbiamo ricavato che la funzione $f$ e tutte le sue derivate di ordine superiore assumono valori interi nei punti $x = 0$ e $x = \pi$.

**4.** Definiamo ora la funzione polinomiale di grado $2n$

$$F(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot f^{(2k)}(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n \cdot f^{(2n)}(x)\,. \tag{8}$$

Per costruzione tutte le derivate di ordine superiore della funzione $F$ assumono valori interi nei punti $x = 0$ e $x = \pi$.

La derivata seconda della funzione $F$ vale

$$F''(x) = f''(x) - f^{(4)}(x) + f^{(6)}(x) - \cdots + (-1)^{n+1} f^{(2n)}(x)$$

(ricordiamo che $f$ ha grado $2n$ e dunque $f^{(2n+2)}(x) = 0$ per ogni $x$); la validità della relazione seguente è poi immediata:

$$F''(x) + F(x) = f(x)\,. \tag{9}$$

**5.** Consideriamo la funzione reale $G$ definita da

$$G(x) := F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x . \tag{10}$$

Deriviamo la funzione $G$, tenendo conto della (9):

$$\begin{aligned} G'(x) &= \Big(F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x\Big)' \\ &= F''(x) \cdot \sin x + F'(x) \cdot \cos x - F'(x) \cdot \cos x + F(x) \cdot \sin x \\ &= [F''(x) + F(x)] \cdot \sin x = f(x) \cdot \sin x . \end{aligned}$$

La funzione $G$ è dunque una primitiva della funzione $f \cdot \sin$. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin x \, \mathrm{d}x &= [F'(x) \sin x - F(x) \cos x]\Big|_0^\pi \\ &= [F'(\pi) \cdot \sin \pi - F(\pi) \cdot \cos \pi] - [F'(0) \cdot \sin 0 - F(0) \cdot \cos 0] \\ &= F(\pi) + F(0), \end{aligned}$$

ossia

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x = F(\pi) + F(0) , \tag{11}$$

e notare che, come visto in **4.**, $F(\pi) + F(0)$ è un numero intero.

**6.** Siccome per ogni numero reale $x \in ]0, \pi[$ valgono

- $0 < \sin x \leq 1$ ;
- $f(x) > 0$ ;
- $x^n < \pi^n = (a/b)^n$ ;
- $(a - bx)^n < a^n$ ;

possiamo scrivere

$$0 < f(x) \cdot \sin x \leq f(x) \cdot 1 = f(x) = \frac{x^n \cdot (a - bx)^n}{n!} < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} ,$$

ossia

$$0 < f(x) \sin x < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} . \tag{12}$$

Le funzioni che intervengono nella (12) sono tutte continue e quindi, dalla proprietà di monotonia dell'integrale e dalla (11), segue

$$\int_0^\pi 0 \, \mathrm{d}x < \int_0^\pi f(x) \cdot \sin x \, \mathrm{d}x < \int_0^\pi \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} \, \mathrm{d}x ,$$

ossia

$$0 < F(\pi) + F(0) < \frac{\pi^n \cdot a^n}{n!} \cdot x\Big|_0^\pi ,$$

da cui

$$0 < F(\pi) + F(0) < \frac{(a \cdot \pi)^n}{n!} \pi . \tag{13}$$

7. Se poniamo $x = a \cdot \pi$ nella (3) possiamo rendere la quantità $\frac{(a \cdot \pi)^n}{n!} \cdot \pi$ piccola a piacimento, in particolare esisterà un numero intero positivo $n$ per il quale

$$\frac{(a \cdot \pi)^n}{n!} \cdot \pi < 1\,.$$

Per questo valore di $n$ la (13) diventa

$$0 < F(\pi) + F(0) < \frac{(a \cdot \pi)^n}{n!}\pi < 1\,,$$

ma ciò è assurdo poiché non esistono numeri interi positivi minori di 1. L'assunzione iniziale che $\pi$ è razionale è falsa e dunque $\pi$ è un numero irrazionale.

## Riferimenti bibliografici


[1] David Blatner. *Le gioie del* $\pi$. Garzanti, Milano, 1999.

[2] Rudolf Fritsch. *Transzendenz von* e *im Leistungskurs*? Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **42**, pp. 75–80, 1989.

[3] Johann Heinrich Lambert. *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres (Berlin), XVII, pp. 265–322, 1768.

[4] Ivan Niven. *A simple proof that* $\pi$ *is irrational*. Bulletin of The American Mathematical Society **53**, p. 509, 1947.

[5] Denis Roegel. *Lambert's proof of the irrationality of Pi*: *Context and translation*. [Research Report] LORIA. 2020. hal-02984214.

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational` (verificato: 29.03.2024).