Pierik Falco
Lycée Denis-de-Rougemont (Neuchâtel), pierik.falco@rpn.ch

La Précession des Équinoxes

La précession est le nom donné au changement d'orientation de l'axe de rotation d'un corps sous l'effet d'un moment de force, ou couple, qui lui est appliqué. On peut montrer que la période de précession T_p s'exprime comme :

$$T_p = \frac{4\pi^2 \cdot I_T}{M_0 \cdot T_T}$$

où T_T est la période de rotation du corps (ici la Terre donc 24h), I_T est le moment d'inertie du corps (donc de la Terre) et M_0 est le moment de force que le corps (donc la Terre) subit. Le problème est donc d'évaluer ces trois grandeurs.

1. Approche du calcul

La précession des équinoxes est due à l'obliquité de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique et au fait que la Terre n'est pas sphérique (connu sous le terme de « renflement équatorial »). Autrement dit, si l'axe de rotation de la Terre sur elle-même était parallèle à son axe de rotation autour du Soleil, ou si la Terre était parfaitement sphérique, il n'y aurait pas de précession. L'inclinaison de l'axe de rotation sur le plan de l'écliptique vaut $\theta = 23.4°$, bien qu'il varie (très) légèrement dans le temps sur une période de 18.6 ans ; c'est la *nutation* (l'axe de rotation de la Terre décrit une petite ellipse de demi-grand axe 18.42″ et de demi-petit axe 13.72″.). Afin de décrire cette précession, on sépare la Terre en deux « hémisphères » qui ne sont pas parfaitement hémisphériques. On s'intéresse alors aux renflements équatoriaux (zones grises dans la figure 1). Le renflement de droite (de centre de masse CM_1) est le plus proche du Soleil (ou de la Lune) et est donc plus attiré par le Soleil (ou la Lune) que celui de gauche. Il en résulte un moment de force qui crée la précession. Il est donc nécessaire de caractériser ces renflements : masse et centre de gravité. Ce dernier permettra de connaître le bras de levier b, lequel permettra de déterminer le moment de force M_0. On va aussi s'intéresser à la structure de la Terre pour calculer son moment d'inertie.

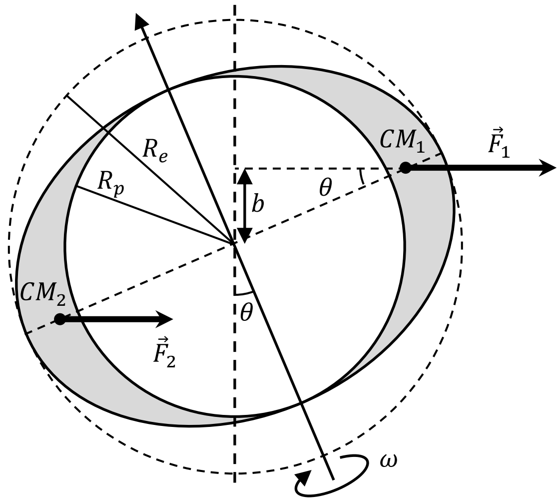

Fig. 1 : Modèle de la Terre en forme d'ellipsoïde.

2. Moment d'inertie de la Terre

La Terre n'est pas une sphère parfaite mais un ellipsoïde de rayon équatorial $R_e = 6378.1\text{km}$ et de rayon polaire $R_p = 6356.8\text{km}$. Ces rayons étant proches, une première évaluation de son moment d'inertie est de l'approximer comme une boule de rayon R_e :

$$I_T = \frac{2}{5} \cdot M_T \cdot R_e^2 = 9.71 \cdot 10^{37}\text{N} \cdot \text{m}$$

Mais la Terre n'est pas homogène dans sa structure : elle est formée de strates. On considère donc une Terre stratifiée où chaque couche a sa masse volumique propre, comme illustré sur la figure 2. On trouve donc le noyau interne (ou « graine »), le noyau externe (liquide), le manteau inférieur (solide), le manteau supérieur (solide mais déformable) et la croûte (solide). En raison de sa très faible épaisseur, quelques kilomètres, cette dernière est représentée sur la figure 2 par un simple trait plus épais. On calcule alors les masses de chacune de ces strates. Pour la masse d'une strate *externe* (ext), on retranche la sphère *interne* (int) :

$$m_{\text{ext}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3\right) \cdot \rho_{\text{ext}}$$

En sommant chacune de ces valeurs, on retrouve bien la masse de la Terre : $5.974 \cdot 10^{24}$ kg.

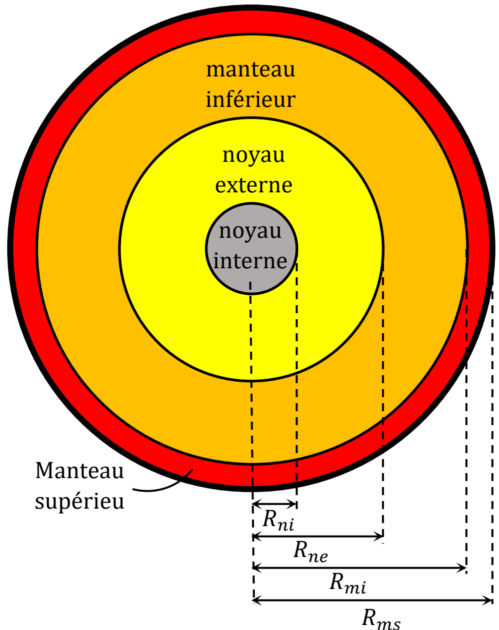

Fig. 2 : Structure stratifiée de la Terre.

On calcule ensuite le moment d'inertie de chaque strate pour déterminer le moment d'inertie total de la Terre. Pour une strate externe donnée, on a :

$$I_{\text{ext}} = \frac{2}{5} \cdot m_{\text{ext}} \cdot \left(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2\right) = \frac{8\pi}{15} \cdot \left(R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3\right) \cdot \left(R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2\right) \cdot \rho_{\text{ext}}$$

Le tableau ci-dessous donne les valeurs des rayons des différentes zones, les masses volumiques (ces deux valeurs sont tirées de la page Wikipedia « *Structure interne de la Terre* » ; les masses volumiques ont été estimées de manière à obtenir une masse de la Terre des plus proches de la réalité.), les masses et les moments d'inertie :

Enveloppe	**Rayon** (km)	**Masse volumique** $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	**Masse** $(\cdot\, 10^{24}\,\text{kg})$	**Moment d'inertie** $(\cdot\, 10^{34}\,\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
Noyau interne	1216	12′900	0.097	5.7
Noyau externe	3486	10′600	1.801	769.0
Manteau inférieur	5701	4′800	2.874	2339.1
Manteau supérieur	6361	3′900	1.178	375.0
Croûte	6378	3′000	0.026	0.23
Terre (total)			5.976	3498.6

On obtient alors comme moment d'inertie de la Terre :

$$I_T = 3.5 \cdot 10^{37}\text{N} \cdot \text{m}$$

et on remarque que cette valeur est environ 3 fois plus petite que pour une Terre homogène.

3. Moment de force subi par la Terre

Afin de calculer le moment de force subi par la Terre, il faut dans un premier temps déterminer la masse des renflements, puis ensuite trouver le centre de masse de ces renflements, pour pouvoir connaître le moment de force appliqué sur la Terre. On corrigera encore cette valeur pour tenir compte de la rotation des astres, entre la situation où le moment est nul et celle où il est maximum.

3.1. Masse des renflements

La question est donc de déterminer la masse des renflements. On estime alors avoir à faire à un ellipsoïde de demi-axes R_e, R_e et R_p. Pour simplifier l'écriture dans ce calcul, on renomme $R_e = R$ et $R_p = r$. Le volume de l'ellipsoïde se calcule comme $V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot R^2 \cdot r$ et celui de la sphère inscrite comme $V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$. On écrit le volume d'un des renflements (en gris sur la figure 3) :

$$V_r = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot r - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r \cdot (R^2 - r^2)$$

On peut alors déterminer la masse d'un renflement, en prenant la masse volumique du manteau supérieur (que l'on suppose être la zone principale déformée). On trouve une masse du renflement de $m_r = 1.41 \cdot 10^{22}$kg. On ne tient pas compte de la masse d'eau sur Terre (environ $1.4 \cdot 10^{21}$kg), soit un dixième de la masse des renflements. Mais cette eau se répartit partout sur le globe, y compris aux pôles. Ainsi, sa contribution massique est probablement très faible.

3.2. Centre de masse des renflements

En deux dimensions, on s'intéresse dans un premier temps au centre de gravité du croissant délimité par la demi-ellipse et le demi-cercle (Fig. 3). On connait les équations de ces courbes :

Ellipse : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

Cercle : $x^2 + y^2 = r^2$

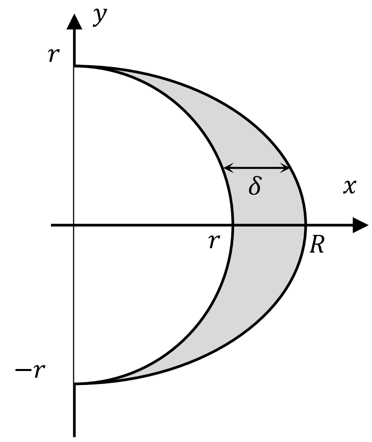

Fig. 3 : Tranche d'un renflement.

On exprime ensuite la largeur du croissant δ :

$$\delta = x_e - x_c = R \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} - r \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} = (R - r) \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}$$

et on détermine le centre de gravité x_G :

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r \cdot (R - r) \cdot x_G = \int_{-r}^{r} \bar{x} \cdot \delta \cdot \mathrm{d}y$$

où $\bar{x}$ est la position moyenne des deux courbes. On trouve :

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r \cdot (R - r) \cdot x_G = \int_{-r}^{r} \left[\frac{1}{2} \cdot (R + r) \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}\right] \cdot \left[(R - r) \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}}\right] \cdot \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (R^2 - r^2) \cdot \int_{-r}^{r} \left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) \cdot \mathrm{d}y \ = \frac{1}{2} \cdot (R^2 - r^2) \cdot \left(y - \frac{y^3}{3r^2}\right)\Bigg|_{-r}^{r}$$

On trouve donc que :

$$\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r\cdot(R-r)\cdot x_G=\frac{2}{3}\cdot(R^2-r^2)\cdot r$$

et finalement :

$$x_G=\frac{4}{3\pi}\cdot(R+r)\cong 5404.9\mathrm{km}$$

Ce résultat se retrouve très facilement en appliquant le *théorème de Guldin* :
$V=\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot r\cdot(R^2-r^2)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r\cdot(R-r)\cdot 2\pi\cdot x_G$, donc : $x_G=\frac{4}{3\pi}\cdot(R+r)$.

En trois dimensions, il faut faire tourner cette surface autour de l'axe polaire. Ceci aura pour effet de rapprocher le centre de gravité x_G du centre de la Terre. On détermine alors le vrai centre de masse CM qui découle de la rotation de ce croissant. Sur un demi-tour, le trajet parcouru par x_G est $\pi\cdot x_G$. Lorsque que x_G se trouve à la position $x=\cos\varphi\cdot x_G$, x_G parcourt un élément de chemin $\mathrm{d}L=x_G\cdot\mathrm{d}\varphi$ (comme illustré sur la figure 4). Donc :

$$CM\cdot\pi\cdot x_G=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\cdot x_G\cdot x_G\cdot\mathrm{d}\varphi\ =\sin\varphi\cdot x_G^2\Big|_{-r}^{r}=2\cdot x_G^2$$

On trouve finalement le centre de masse d'un renflement :

$$CM=\frac{2}{\pi}\cdot x_G=\frac{8}{3\pi^2}\cdot(R+r)\cong 3440.9\mathrm{km}$$

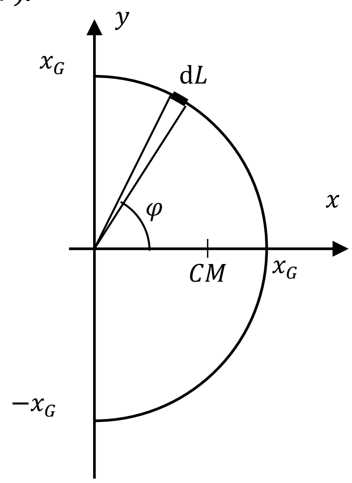

Fig. 4 : Centre de masse d'un renflement (vue depuis l'axe de rotation de la Terre).

3.3. Moment de force appliqué à la Terre par le Soleil

On dispose maintenant de toutes les données pour déterminer le moment de force appliqué à la Terre. On s'intéresse ici à celui appliqué par le Soleil. Les distances qui séparent les renflements du Soleil sont de $d_{TS}\pm\cos\theta\cdot CM$ où $d_{TS}=1.496\cdot 10^{11}\mathrm{m}$ est la distance Terre-Soleil. Comme on le voit sur la figure 1, on suppose les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ parallèles à l'axe Terre-Soleil. Ainsi, le moment de force total dû au Soleil est :

$$M_{0,S}=G\cdot M_S\cdot m_\mathrm{r}\cdot\left(\frac{1}{(d_{TS}-\cos\theta\cdot CM)^2}-\frac{1}{(d_{TS}+\cos\theta\cdot CM)^2}\right)\cdot\sin\theta\cdot CM$$

$$=G\cdot M_S\cdot m_\mathrm{r}\cdot\frac{2\cdot d_{TS}\cdot\cos\theta\cdot CM^2}{\left(d_{TS}^2-\cos^2\theta\cdot d_{CM}^2\right)^2}\cdot\sin\theta\cdot CM$$

où $\sin\theta\cdot CM=b$ est le bras de levier. Avec la masse du Soleil $M_S=1.989\cdot 10^{30}\mathrm{kg}$, on trouve :

$$M_{0,S}=0.996\cdot 10^{22}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Comme pour les marées, la Lune joue aussi un rôle. Tous les calculs précédents restent identiques, il suffit de remplacer la masse du Soleil par celle de la Lune, $M_L=7.35\cdot 10^{22}\mathrm{kg}$ et la distance Terre-Soleil par la distance Terre-Lune, $d_{TL}=3.844\cdot 10^{8}\mathrm{m}$.

On trouve alors :

$$M_{0,L}=2.105\cdot 10^{22}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Sans grande surprise, on remarque que la Lune joue en fait un rôle dominant dans ce phénomène, comme pour les marées. Le moment total qui s'applique à la Terre vaut finalement :

$$M_0 = 3.071 \cdot 10^{22} \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

3.4. Et la rotation des astres ?

Dans le mouvement des astres, tantôt les moments de force calculés ci-dessus ont ces valeurs, qui sont des maxima (aux solstices pour le couple Terre-Soleil), tantôt ils sont nuls (aux équinoxes). Ces variations sont en fait la projection d'un mouvement (quasiment) circulaire ; elles suivent donc des lois trigonométriques. On peut ainsi estimer la valeur moyenne μ de ce moment sur un demi-tour pour déterminer un moment moyen $\bar{M}_0$ que la Terre subit. Sur un demi-tour, la valeur moyenne de la fonction *cosinus* (par exemple) vaut :

$$\mu = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\pi} \cdot \sin\varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

On corrige alors le moment M_0 pour obtenir une valeur moyenne $\bar{M}_0$:

$$\bar{M}_0 = \frac{2}{\pi} \cdot M_0 = 1.955 \cdot 10^{22} \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

4. Période de précession des équinoxes

On peut enfin calculer la période de précession de la Terre en utilisant la formule présentée au début de cette discussion. On trouve :

$$\boxed{T_p = \frac{4\pi^2 \cdot I_T}{\bar{M}_0 \cdot T_T} \cong 25'800 \mathrm{ans}}$$

On voit que ce calcul, peut-être un peu long et fastidieux, est parfaitement à la portée d'élèves d'option « *Physique et Application des Mathématiques* ». La valeur connue pour la précession est d'environ $25'700$ans ; soit à moins d'un demi-pourcent du résultat obtenu. Il est important de relever que cette précision est probablement le fruit de la chance et du hasard, au vu des nombreuses approximations effectuées. Notamment, les rôles du Soleil et de la Lune dans le calcul du moment de force devraient se faire de manière plus précise en prenant en compte la composante vectorielle de cette grandeur. Malgré tout, la moyenne trigonométrique appliquée explique probablement la proximité du résultat.