Guido Lob
CMSI, guido.lob@edu.ti.ch

Il problema isoperimetrico per la famiglia dei triangolo

Il problema classico dell'*isoperimetria*[1] consiste nel determinare, all'interno di una famiglia di figure aventi lo stesso perimetro, le caratteristiche di quella di area massima.

Risolvere il problema isoperimetrico per la famiglia dei rettangoli è molto semplice: fissato il perimetro p, l'area $\mathcal{A}$ del rettangolo in funzione di un suo lato x è data da

$$\mathcal{A}(x) = x \cdot \left(\frac{p}{2} - x\right).$$

Questa è una funzione quadratica che, come si può facilmente verificare, assume il suo valore massimo per $x = \frac{p}{4}$, ossia quando il rettangolo è un quadrato (poligono regolare).

Nel caso del triangolo il problema isoperimetrico è più difficile da risolvere, in quanto esistono più gradi di libertà per la misura dei lati.

Ricordiamo che, detti a, b, c i lati del triangolo e fissato il semiperimetro $s = \frac{a+b+c}{2}$, possiamo calcolare l'area del triangolo tramite la *formula di Erone*

$$\mathcal{A}(a, b, c) = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

Per la soluzione del problema isoperimetrico per la famiglia dei triangoli possiamo intuire che la soluzione sia data dal triangolo equilatero (poligono regolare, in analogia con il caso della famiglia dei rettangoli). Nel seguito daremo tre diverse dimostrazioni a sostegno della nostra intuizione.

Una dimostrazione algebrica elementare

Notiamo dapprima che nella formula di Erone appaiono i fattori $s-a$, $s-b$ e $s-c$, la cui somma è un numero fisso:

$$(s-a) + (s-b) + (s-c) = 3s - (a+b+c) = s. \tag{1}$$

Dimostriamo ora che la media aritmetica di tre numeri reali non negativi è sempre maggiore della o uguale alla media geometrica degli stessi numeri.[2]

Lemma 1 (Disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica per tre numeri)**.** *Dati tre numeri reali non negativi a, b, c vale*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c};$$

l'uguaglianza vale se $a = b = c$.

Dimostrazione. Scomponendo in fattori $A^3 + B^3 + C^3 - 3A \cdot B \cdot C$ otteniamo

$$\begin{aligned} A^3 + B^3 + C^3 - 3A \cdot B \cdot C &= (A+B+C) \cdot (A^2 + B^2 + C^2 - A \cdot B - B \cdot C - C \cdot A) \\ &= \frac{1}{2}(A+B+C) \cdot ((A-B)^2 + (B-C)^2 + (C-A)^2) \geq 0, \end{aligned}$$

[1] Dal greco *ísos*: uguale, *peri*: intorno e *mètron*: misura.
[2] Vedi `https://math.stackexchange.com/questions/973679/proving-am-gm-for-the-special-case-n-3`.

dove l'uguaglianza vale se $A = B = C$. Di conseguenza

$$\frac{A^3 + B^3 + C^3}{3} \geq A \cdot B \cdot C$$

e, sostituendo A^3 con a, B^3 con b e C^3 con c, otteniamo

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}\,. \qquad \square$$

Grazie al Lemma 1 possiamo concludere quanto segue.

Lemma 2. *Il prodotto di tre numeri non negativi aventi somma costante è massimo se i tre numeri sono uguali.*

Dimostrazione. Siano a, b, c tre numeri reali non negativi e sia $p = a + b + c$ il valore della somma costante. Dal lemma 1 segue subito che

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

e che

$$\frac{p}{3} = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

se $a = b = c$, ossia il massimo del prodotto dei tre numeri si ottiene ponendo $a = b = c = \frac{p}{3}$. $\square$

Tornando ai fattori $s - a$, $s - b$ e $s - c$ che appaiono nella formula di Erone possiamo dire che, grazie al lemma 2, il loro prodotto sarà massimo quando

$$s - a = s - b = s - c\,,$$

ossia quando $a = b = c$. In tal caso però il triangolo in questione è equilatero e quindi la soluzione del problema isoperimetrico per i triangoli è il triangolo equilatero.

Una dimostrazione mediante i moltiplicatori di Lagrange

In questa seconda dimostrazione intendiamo massimizzare la funzione $\mathcal{A}(a, b, c)$ che fornisce l'area del triangolo di lati a, b, c mediante la formula di Erone. Per risolvere problemi di ottimizzazione possiamo utilizzare una tecnica generale, nota come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange.* Dapprima definiamo la funzione

$$f(a, b, c) :- \frac{\mathcal{A}^2(a, b, c)}{s} = (s - a)(s - b)(s - c).$$

Essendo a, b, c, s numeri reali positivi e $\mathcal{A}$ una funzione positiva, massimizzare f è equivalente a massimizzare $\mathcal{A}$.

Grazie alla relazione $a + b + c = 2s$ possiamo definire la funzione

$$g(a, b, c) :- a + b + c - 2s$$

e introdurre il vincolo[3]

$$g(a, b, c) = 0\,.$$

[3] In realtà andrebbero aggiunti anche i vincoli $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, ma siccome sul bordo di questi il triangolo diventa degenere possiamo non includerli nella lagrangiana.

A questo punto la funzione da massimizzare $f(x)$ e il vincolo $g(x)$ formano la lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(a,b,c,\lambda) &= f(a,b,c) + \lambda \cdot g(a,b,c) \\ &= (s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c) + \lambda(a+b+c-2s). \end{aligned}$$

Cerchiamo ora i punti stazionari della lagrangiana rispetto alla famiglia di variabili estesa:

$$\nabla L(a,b,c,\lambda) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial c} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -(s-b)(s-c) + \lambda = 0 \\ -(s-a)\cdot(s-c) + \lambda = 0 \\ -(s-a)\cdot(s-b) + \lambda = 0 \\ a+b+c = 2s \end{cases}$$

Uguagliando il primo membro delle due prime due equazioni otteniamo

$$(s-b)\cdot(s-c) = (s-a)\cdot(s-c)$$

e, siccome $s \neq c$ (altrimenti sarebbero $a = 0$ e $b = 0$), segue subito $a = b$. Procedendo in modo analogo, dalla seconda e dalla terza equazione otteniamo $b = c$. Concludendo abbiamo ottenuto che $a = b = c$, ossia il triangolo in questione è equilatero e quindi la soluzione del problema isoperimetrico per i triangoli è il triangolo equilatero.

Osservazione: avremmo potuto scrivere il vincolo nella forma $c = 2s - a - b$ e inserirlo nella funzione originale, massimizzando questa unicamente in funzione di a, b senza vincoli.

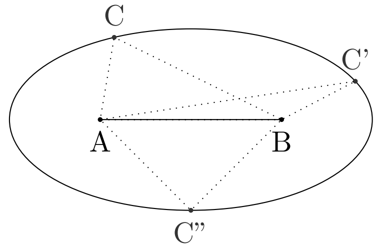
Una dimostrazione analitica mediante semplificazione geometrica

In questa ultima dimostrazione sfrutteremo un'osservazione geometrica che permetterà di ridurre il numero di variabili e risolvere il problema isoperimetrico per i triangoli come problema a variabile singola.

Vogliamo trovare il triangolo ABC di area massima e perimetro fisso p. Fissato il lato AB, notiamo che l'insieme di tutti i punti C per i quali il triangolo ABC ha perimetro p è l'insieme di tutti i punti C che soddisfano l'equazione

$$\overline{CA} + \overline{CB} = p - \overline{AB}\ .$$

che è l'equazione di un'ellisse di fuochi A e B e asse maggiore $p - \overline{AB}$.



Siccome l'area del triangolo ABC dipende solo all'altezza del punto C è evidente[4] che il triangolo di area massima si otterrà quando C è sull'asse del segmento AB, ossia quando ABC è isoscele. Questo

[4]Si può dimostrare mediante la disequazione triangolare o per simmetria.

ci permette di ridurre il problema a una sola incognita: se denotiamo con $a$la base del triangolo isoscele avremo poi

$$b = c = \frac{p-a}{2} = s - \frac{a}{2}\,.$$

A questo punto la formula di Erone diventa

$$\mathcal{A}(a,b,c) = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}.$$

Come fatto nella dimostrazione con i moltiplicatori di Lagrange, invece di massimizzare la funzione $\mathcal{A}$ ne massimizziamo una che ha gli stessi estremi ma è più semplice da trattare. Sia

$$f(a) :- \frac{4\mathcal{A}^2(a,b,c)}{s} = (s-a)\cdot a\cdot a\,.$$

Possiamo dunque cercare i punti stazionari di f calcolando la derivata e uguagliandola a zero:

$$f'(a) = -a^2 + (s-a)\cdot 2a = -a\cdot(3a-2s) \stackrel{!}{=} 0.$$

Siccome $a = 0$ implicherebbe un triangolo degenere non resta che $a = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}$ come soluzione, il che implica a sua volta

$$b = c = s - \frac{a}{2} = s - \frac{s}{3} = \frac{2s}{3} = \frac{p}{3}\,.$$

Concludendo abbiamo ottenuto che $a = b = c$, ossia il triangolo in questione è equilatero e quindi la soluzione del problema isoperimetrico per i triangoli è il triangolo equilatero.

Osservazione 1. È un esercizio lasciato al lettore verificare che il punto stazionario trovato è effettivamente un massimo.