Wilfried Lingenberg
Lemberg (Rheinland-Pfalz), w.lingenberg@mx.uni-saarland.de

Nichtstandardanalysis – Ein sehr alter, sehr neuer Zugang zur Differential- und Integralrechnung

Auf einer Lehrerfortbildung in Rheinland-Pfalz lernte ich vor einigen Jahren, dass man Ableitung und Integral auch mit unendlich kleinen und unendlich grossen Zahlen statt über Grenzwerte einführen kann, und war später überrascht, eine wie grosse Erleichterung das für den Analysisunterricht in der Schule bedeutet. Ich danke der Deutschschweizerischen Mathematikkommission für die Einladung, meine Erfahrungen hier vorzustellen. Das Folgende ist keine mathematisch irgendwie vollständige Darstellung; ich belasse es bei einigen ‚Appetithappen', die zum Weiterdenken oder Nachlesen anregen möchten.

1 Ein wenig Geschichte

Als Leibniz und Newton unabhängig voneinander jeweils ihre Differential- und Integralrechnung entwickelten, benutzten sie unendlich kleine Grössen. Diese blieben selbstverständliches Werkzeug der Mathematik bis tief ins 19. Jahrhundert hinein, obwohl man sich ihrer Existenz nie recht sicher war. Um 1870 wurden eine formale Definition der sogenannten reellen Zahlen sowie das heute noch übliche, nicht nur für Schüler komplizierte Grenzwert-Kalkül gefunden, das es erstmals erlaubte, Ableitung und Integral ohne unendliche Zahlen zu definieren. Doch blieb die Entwicklung der Zahlsysteme nicht stehen: Ab etwa 1960 konstruierten Curt Schmieden, Detlef Laugwitz, Abraham Robinson und Wilhelmus Luxemburg eine Erweiterung der reellen Zahlen, die genau die unendlichen Zahlen enthielt, die in Leibniz' und Newtons Kalkül gebraucht wurden. Obwohl die damit gewonnene *Nichtstandardanalysis* neue Möglichkeiten eröffnete, spielt sie in der wissenschaftlichen Mathematik bis heute kaum eine Rolle; ihr didaktischer Nutzen wird gegenwärtig aber mehr und mehr entdeckt und geschätzt, an Schule wie Hochschule.

2 Ableitung mit Infinitesimalien berechnet

Die Grundaufgabe der Differentialrechnung ist, die Steigung einer Kurve in einem Punkt zu bestimmen. Näherungswerte erhält man, indem man Sekantensteigungen berechnet; je kleiner das Steigungsdreieck, desto besser die Näherung. Was muss man tun, damit aus den Näherungen ein genauer Steigungswert wird? Verblüffenderweise antworten Schüler auf diese Frage häufig: „Das Dreieck muss unendlich klein werden!" Als ich noch Standard unterrichtete, musste ich dann erwidern: „Das wäre schön, geht nur leider nicht; aber wir können da etwas tricksen", und es folgte der Grenzwertformalismus. Nichtstandard lautet die Antwort einfach: „Genau. Machen wir das." Man braucht also unendlich kleine Zahlen, über die man an dieser Stelle im Unterricht nicht viel mehr wissen muss, als dass ihr Betrag kleiner als jede positive reelle Zahl ist, sie aber ungleich Null sein können und man mit ihnen nach den gleichen Regeln rechnet wie mit reellen Zahlen.

Bezeichnet man eine solche infinitesimale, von Null verschiedene Zahl nach der noch auf Leibniz selbst zurückgehenden Tradition mit der zweibuchstabigen Variablen dx, so liefert ein unendlich kleines Steigungsdreieck folgende Näherung für die Steigung der quadratischen Normalparabel an der Stelle x:

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}=\frac{x^2+2x\,dx+dx^2-x^2}{dx}=\frac{2x\,dx+dx^2}{dx}=2x+dx.$$

Der Unterschied zwischen diesem Ergebnis und der reellen Zahl $2x$ ist kleiner als jede reelle Zahl (man sagt, $2x+dx$ und $2x$ seien *infinitesimal benachbart*, und schreibt: $2x+dx\simeq 2x$); solange einen in der realen Welt nur reelle Zahlen interessieren, wird man also mit der Steigung $2x$ rechnen dürfen. Daraus lässt sich die Definition der Ableitung verallgemeinern:

Wenn der Quotient $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ *für jedes infinitesimale* $dx \neq 0$ *zur selben reellen Zahl infinitesimal benachbart ist, so heisst diese Zahl die* Ableitung von f an der Stelle x.

Der Unterschied zur Standardherleitung ist offensichtlich: Die Rechnung ist klarer und einfacher, da keine Grenzübergänge, sondern nur elementare Termumformungen notwendig sind, und vor allem: Statt einer vielwöchigen Unterrichtsreihe „Folgen und Grenzwerte" setzt diese Herleitung der Ableitung lediglich fünf Minuten „Unendlich kleine Zahlen" voraus. Ich komme darauf am Ende noch einmal zurück.

3 Infinitesimalien gibt es wirklich

Die Konstruktion der Zahlbereichserweiterung beginnt recht einfach. Ähnlich wie man aus zwei ganzen Zahlen eine rationale Zahl „baut", entsteht aus unendlich vielen reellen Zahlen eine hyperreelle Zahl: Eine unendliche, mit den natürlichen Zahlen durchnumerierte Aneinanderreihung von Zahlen heisst eine Folge; jede reelle Folge beschreibt eine *hyperreelle Zahl*. Zwei Folgen, die sich in nur endlich vielen Gliedern unterscheiden, beschreiben dieselbe hyperreelle Zahl. Verknüpfungen und Ordnungsrelation werden gliedweise definiert, konstante Folgen identifizieren wir mit reellen Zahlen. In dieser Konstruktion ist die durch $(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots)$ definierte hyperreelle Zahl *grösser als Null*, da jedes Folgenglied grösser als Null ist, aber *kleiner als jede reelle Zahl*, da $\frac{1}{n}$ nur für endliche viele n grösser oder gleich einer konstant gegebenen reellen Zahl sein kann. So hat man in wenigen Schritten die erste von Null verschiedene infinitesimale Zahl gefunden. Kehrwerte infinitesimaler Zahlen sind unendlich gross und heissen *infinit*; ein Beispiel ist die Zahl $(1; 2; 3; 4; \ldots)$.

Die mathematische Arbeit ist damit noch nicht zu Ende; wenn die hyperreellen Zahlen einen (nullteilerfreien) Körper bilden sollen, muss im Produkt $(1; 0; 1; 0; \ldots) \cdot (0; 1; 0; 1; \ldots)$ einer der Faktoren dieselbe hyperreelle Zahl beschreiben wie $(0; 0; 0; 0; \ldots)$, und das heisst, dass sich zwei Folgen, die zur selben Zahl gehören, auch in unendlich vielen Gliedern unterscheiden können. Das zu erreichen ist mathematisch etwas aufwendiger, allein: Im Unterricht spielen solche Fälle nirgends eine Rolle.

4 Beispiele für Nichtstandardherleitungen

Der Nichtstandardzugang macht manche Rechnungen leichter, manche sogar überhaupt erst möglich. In den folgenden drei Beispielen benutzen wir die Kurzschreibweise $df := f(x + dx) - f(x)$, die auch $f(x + dx) = f(x) + df$ impliziert.

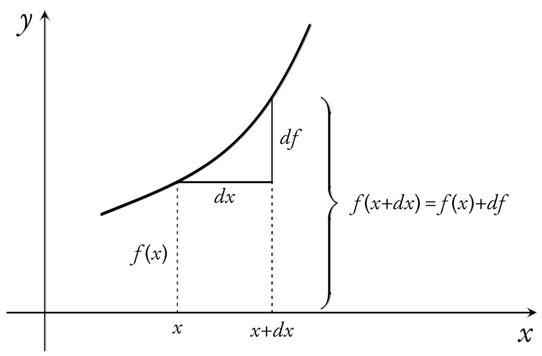

Abbildung 1: Zur Schreibweise *df* (Quelle: Lingenberg 2023, S. 19)

Stetige Funktionen sind dadurch charakterisiert, dass die zu einer infinitesimalen Änderung dx des Arguments gehörende Änderung df des Funktionswerts ebenfalls infinitesimal ist. Das gilt dann insbesondere auch für differenzierbare Funktionen.

4.1 Kettenregel

Für den Beweis der Kettenregel notiere ich nur die zentralen Umformungen:

$$\begin{aligned} \frac{d(f(g))}{dx} &= \frac{f(g(x+dx))-f(g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(g(x)+dg)-f(g(x))}{dx} \\ &= \frac{f(g(x)+dg)-f(g(x))}{dg}\cdot\frac{dg}{dx} \\ &\simeq f'(g(x))\cdot g'(x). \end{aligned}$$

Der letzte Schritt nutzt aus, dass bei einer differenzierbaren Funktion f der Bruch $\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$ gemäss Definition zur reellen Zahl $f'(x)$ infinitesimal benachbart ist; das gilt nämlich auch an der Stelle $g(x)$ und wenn man für dx das infinitesimale dg einsetzt.

4.2 Sinus und Kosinus

Die Ableitungen der trigonometrischen Funktionen lassen sich standardbasiert im Schulunterricht nicht mit vertretbarem Aufwand präzise herleiten; nichtstandardbasiert ergeben sie sich ziemlich schnell und aufgrund rein elementargeometrischer Überlegungen aus einer geeigneten Skizze:

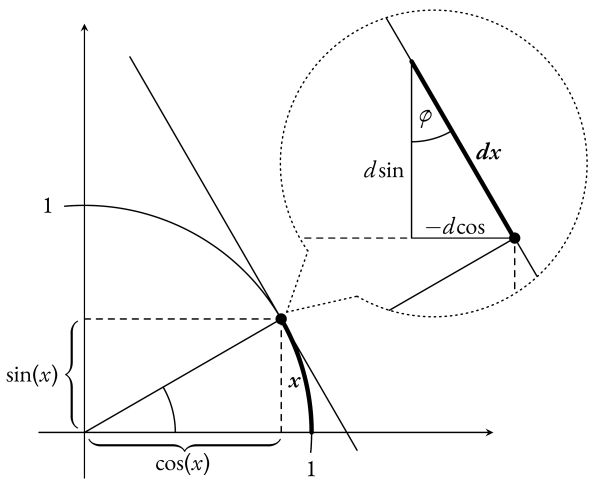

Abbildung 2: Ableitungen von Sinus und Kosinus (Quelle: Lingenberg 2023, S. 38)

Der Skizzenausschnitt muss, damit das infinitesimale dx sichtbar wird, mit einem infiniten Faktor vergrössert werden. Die Krümmung des Einheitskreises wird dabei infinitesimal, die Kreislinie erscheint im Ausschnitt gerade, und geometrische Überlegungen, die auf der Annahme der Geradlinigkeit basieren, sind bis auf einen lediglich infinitesimalen Fehler korrekt.[1] Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke sind φ und der zur Bogenlänge x gehörende Ursprungswinkel gleich. Da der Kosinus im betrachteten Abschnitt fällt, also $d\cos$ negativ ist, die elementaren Definitionen der trigonometrischen Funktionen aber nur für positive Seitenlängen anwendbar sind, ist die Länge der waagrechten Kathete als $-d\cos$ anzusetzen. Damit liest man aus der Skizze ab: $\frac{d\sin}{dx} \simeq \cos\varphi = \cos x$ und $\frac{-d\cos}{dx} \simeq \sin\varphi = \sin x$. Gemäss Definition folgen die Ableitungen: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

[1] Ähnliches hatte Leibniz schon vermutet; streng bewiesen wurde das erst von K. Kuhlemann, *Über die Technik der infiniten Vergrößerung und ihre mathematische Rechtfertigung*, Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik 10, 2018, 47–65; https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-14260.

4.3 Hauptsatz

Mindestens ebenso eindrucksvoll ist die Vereinfachung im Falle des Hauptsatzes, der standardbasiert über eine kunstvolle Abschätzung unter Verwendung des Mittelwertsatzes bewiesen zu werden pflegt. Nichtstandardbasiert ist wieder kaum mehr als eine Skizze notwendig. Mit

$$I_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

und einem infinitesimalen $dx \neq 0$ ist

$$dI_a = I_a(x+dx) - I_a(x) = \int_a^{x+dx} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+dx} f(t)\,dt.$$

Das ist gerade der Zuwachs der Integralfläche von x bis $x + dx$:

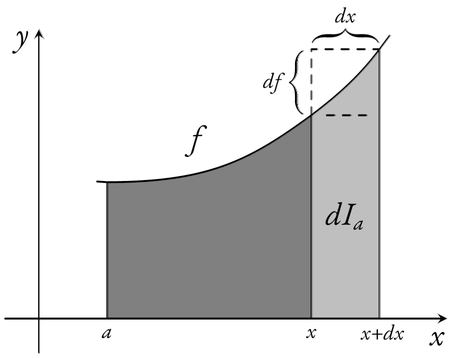

Abbildung 3: Hauptsatz (nach Lingenberg 2023, S. 36)

Die Zuwachsfläche dI_a besteht aus einem Rechteck mit den Kantenlängen $f(x)$ und dx und einer Restfläche, die innerhalb eines Rechtecks mit den Kanten df und dx liegt (wir stellen uns der Einfachheit halber $f(x)$, dx und df als positiv vor). Da df im Verhältnis zu $f(x)$ infinitesimal ist, ist auch $df \cdot dx$ im Verhältnis zu $f(x) \cdot dx$ infinitesimal, und erst recht gilt dies für die Restfläche im Verhältnis zur erstgenannten Rechteckfläche. Wenn man also dI_a durch das Rechteck $f(x) \cdot dx$ ersetzt, macht man einen nur infinitesimalen Fehler, und der Hauptsatz ergibt sich in einer halben Zeile:

$$\frac{dI_a}{dx} \simeq \frac{f(x) \cdot dx}{dx} = f(x).$$

Ein besonderer Charme dieser Herleitung liegt darin, dass er so klar wie nur irgend möglich die eigentliche Aussage des Hauptsatzes sichtbar macht: „Der Wert der Funktion bestimmt den momentanen Zuwachs der unter dem Graphen liegenden Fläche“ (Lingenberg 2023, S. 35).

5 Warum Nichtstandardanalysis im Unterricht?

Weil es für die Schüler leichter ist und weil es Zeit spart. Konkret: Einen Analysiskurs mit dem Thema „Folgen und Grenzwerte“ anzufangen kostete mich früher sechs bis acht Wochen Unterrichtszeit, und es fiel den Schülern quälend schwer. Nichtstandardbasiert beginnt der Kurs unmittelbar mit dem Ableitungsbegriff, und die Folgen werden später mit einer oder zwei Wochen Zeitaufwand im Zusammenhang mit den hyperreellen Zahlen eingeführt. Dabei scheint die statische Vorstellung einer Folge als *Zahl* den Schülern deutlich weniger Mühe zu machen als die dynamische als *Entwicklung* auf einen (möglicherweise nie erreichten) Grenzwert zu. Das Thema ‚Grenzwert‘ selbst schiebe ich gern auf die

Zeit unmittelbar vor den Abschlussprüfungen. Die Schüler sind dann zwei Jahre älter und erfassen den Begriff und den Umgang damit innerhalb weniger Unterrichtsstunden. Unterm Strich bleibt eine Zeitersparnis von einigen Wochen, ohne dass irgendwelcher Stoff geopfert worden wäre.

Erstaunlicherweise habe ich bei den Schülern noch nie irgendwelche Berührungsängste gegenüber unendlich kleinen und unendlich grossen Zahlen beobachtet — ganz anders als mit der Grenzwertmathematik, der ich im Unterricht kaum je echte Freunde gewinnen konnte. Mir persönlich kommt der Nichtstandardzugang auch mathematisch schöner und philosophisch befriedigender vor, aber das liegt vollständig im Bereich individueller Vorlieben. Im übrigen darf man nicht vergessen, dass sich die Entscheidung „Standard oder Nichtstandard" ausschliesslich auf die Definitionen, Herleitungen und Beweise auswirkt; der zeitlich weit überwiegende Teil eines Analysiskurses, der sich mit Anwendungen und Übungen befasst, bleibt davon unberührt.

Zum Weiterlesen

Eine Fülle an Informationen und Materialien findet man

- auf der Netzseite www.nichtstandard.de und
- in einer von P. Baumann, T. Bedürftig und V. Fuhrmann herausgegebenen Handreichung, die aus den rheinland-pfälzischen Fortbildungen hervorging; abrufbar unter www.nichtstandard.de/Downloads.html.

Da ich mir für die erste Einarbeitung eine bequem lesbare und auf das Notwendige konzentrierte Darstellung gewünscht hätte, habe ich mittlerweile selbst eine solche geschrieben:

- W. Lingenberg, *Nichtstandardanalysis für die Schule*, Norderstedt ^{2}2023; ISBN 9783757847111.

Wer sich für Entstehung und Entwicklung der Nichtstandardanalysis interessiert, erhält einen detaillierten Überblick im zweiten Kapitel von

- K. Kuhlemann, *Nichtstandard in der elementaren Analysis. Mathematische, logische, philosophische und didaktische Studien zur Bedeutung der Nichtstandardanalysis in der Lehre*, Diss. Hannover 2022; http://dx.doi.org/10.15488/12105

oder im dritten Kapitel der daraus hervorgegangenen Monographie:

- K. Kuhlemann, *Nonstandard-Analysis: In der Hochschul-Didaktik, Logik und Philosophie*, Berlin–Boston: De Gruyter 2024; https://doi.org/10.1515/9783111229027.

Weitere Literatur jeweils in den Literaturverzeichnissen.