

Noch mehr Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen

1 Einleitung

Im Bulletin N^o156 [1] wurden Rätsel von Sam Loyd präsentiert, die auf lineare Diophantische Gleichungen führen.

In Folgenden geht es um Rätsel, die auf nichtlineare Diophantische Gleichungen führen. Auch diese Rätsel sind in den beiden Büchern [2] und [3] von Martin Gardner enthalten.

Zur Erinnerung: Diophantische Gleichungen, benannt nach dem griechischen Mathematiker Diophantes von Alexandria (um 100 - 350 ?), sind algebraische Gleichungen, für die nur ganzzahlige Lösungen gesucht sind. In den allermeisten Fällen hat eine Diophantische Gleichung mindestens zwei Unbekannte.

2 Nichtlineare Diophantische Gleichungen

Mrs. Wiggs Kohlköpfe (Aufgabe 53 in [3])

Mrs. Wiggs erklärte der lieben Mary, dass sie jetzt ein grösseres quadratisches Kohlbeet habe als im letzten Jahr und dass sie von nun an 211 Kohlköpfe mehr anpflanzen werde. Wer von den Mathematikern und Landwirten unter uns kann daraus ersehen, wieviele Kohlköpfe Mrs. Wiggs in diesem Jahr ernten wird?

Lösung: Ist x^2 die Zahl der angepflanzten Kohlköpfe in diesem Jahr, y^2 diejenige des letzten Jahres, so erhält man die folgende Gleichung:

$$x^2 - y^2 = 211$$

211 ist eine Primzahl, mit $(x - y)(x + y) = 211$ muss $x - y = 1$ und $x + y = 211$ gelten. Dieses Gleichungssystem hat die Lösung $x = 106$ und $y = 105$.

Antwort: Mrs. Wiggs wird in diesem Jahr $106^2 = 11'236$ Kohlköpfe anpflanzen, was gegenüber den $105^2 = 11'025$ Kohlköpfen des vergangenen Jahres tatsächlich einer Zunahme von 211 Kohlköpfen entspricht.

Rätsel um Diamanten und Rubine (Aufgabe 39 in [2])

Man sollte vielleicht wissen, dass Diamanten proportional zum Quadrat ihres Gewichtes und Rubine proportional zur dritten Potenz ihres Gewichtes im Wert steigen. Beispielsweise wäre, wenn ein reiner Diamant mit einem Karat 100 Dollar wert ist, ein zweikarätiger Stein der gleichen Qualität 400 Dollar wert und ein dreikarätiger von gleicher Reinheit 900 Dollar. Wenn ein reiner orientalischer Rubin mit einem Karat 200 Dollar wert ist, wäre ein zweikarätiger 1600 Dollar wert.

Ein angesehenener Kaufmann, der sich in den Diamantenminen von Brasilien, Cape Colony und anderen auf unserem Globus gut auskannte, zeigte mir ein Paar Ohrringe, die er gegen zwei verschieden grosse Diamanten auf der Basis eines Karats im Werte von 100 Dollar, wie bereits erklärt, eingetauscht hatte. Können Sie abschätzen, wie gross die beiden Steine verschiedener Grösse waren, die er gegen ein Paar Ohrringe gleicher Grösse eintauschte? Natürlich gibt es darauf viele Antworten, daher sollen Sie die kleinstmöglichen Grössen der Steine herausfinden, die dem Wert zweier von verschiedener Grösse entsprechen, ohne jedoch mit Bruchteilen eines Karats zu rechnen.

Lösung: Wir setzen x : Anzahl Karat des grösseren Diamanten, y : Anzahl Karat des kleineren Diamanten und z : Anzahl Karat eines Ohrrings.

Wir bekommen die Gleichung

$$(100x)^2 + (100y)^2 = 2(100z)^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 2z^2 \quad (1)$$

Es ist schon lange bekannt, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{mit} \quad x, y, z \in \mathbb{N} \quad (2)$$

unendlich viele (nichttriviale) Lösungen hat, die Pythagoräischen Zahlentripel:

$x = r^2 - s^2$, $y = 2rs$, $z = r^2 + s^2$ mit natürlichen Zahlen $r > s$. Siehe zum Beispiel auf Seite 231 in [4].

Mit einem Trick können wir die Gleichung (1) auf (2) zurückführen:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2z^2 \\ 2x^2 + 2y^2 &= 4z^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 &= 4z^2 \\ (x + y)^2 + (x - y)^2 &= (2z)^2 \end{aligned}$$

Also muss $x + y = r^2 - s^2$, $x - y = 2rs$ und $2z = r^2 + s^2$ sein mit natürlichen Zahlen $r > s$, siehe oben.

$$\text{Daraus berechnet man schliesslich} \quad x = \frac{r^2 + 2rs - s^2}{2}, \quad y = \frac{r^2 - 2rs - s^2}{2} \quad \text{und} \quad z = \frac{r^2 + s^2}{2}$$

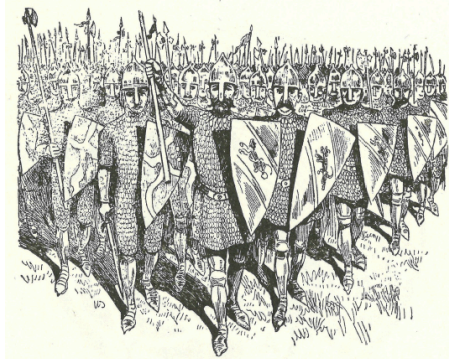
Damit x, y, z ganzzahlig werden, müssen r und s die gleiche Parität haben. Die kleinsten Werte ergeben sich für $r = 3$ und $s = 1$. So wird $x = 7$, $y = 1$ und $z = 5$.

Antwort: Der grössere Diamant hat 7 Karat (im Wert von 4900 Dollar), der kleinere Diamant hat 1 Karat (im Wert von 100 Dollar), die beiden Ohrringe je 5 Karat (im Wert von je 2500 Dollar).

Eine weitere Lösung wäre übrigens $x = 17$, $y = 7$, $z = 13$, mit $r = 5$ und $s = 1$.

Die Schlacht von Hastings (Aufgabe 68 in [2])

Alle Studenten der Geschichte wissen um die geheimnisvollen und fragwürdigen Umstände der unvergesslichen Schlacht an jenem schicksalhaften 14. Oktober 1066. Durch den Sieg Wilhelms des Eroberers bei Hastings über den Angelsachsen Harold II. kam England unter normannische Herrschaft. Dieses Rätsel beschäftigt sich mit einem kuriosen Teil der Geschichte dieser Schlacht, dem bis heute nicht die Aufmerksamkeit zuteil geworden ist, die ihm gebührt.



Die fragliche Stelle, auf die Professor Dudeney besonders verweist, lautet: „Harolds Mannen waren in Reih und Glied aufmarschiert und bildeten 13 Quadrate, jedes mit der gleichen Anzahl Männer, und wehe dem verwegenen Normannen, der gewagt hätte, ihre Befestigungen zu betreten, denn schon ein einziger Stoss eines angelsächsischen Kriegsbeils würde genügen, seine Lanze zu brechen und seinen Panzer zu durchbohren“.

Wenn Harolds Streitkräfte, die in 13 Quadrate aufgeteilt waren, mit ihm zusammen auch ein einziges grosses Quadrat hätten bilden können, wieviel Männer müssen es dann gewesen sein? Dieses Rätsel ist derart schwierig, dass wahrscheinlich nur wenige Mathematiker in der Lage sind, die richtige Lösung zu finden.

Anmerkung: Der ursprüngliche Text wurde gekürzt.

Lösung: Bezeichnen wir mit y die Anzahl Männer an jeder Seite der 13 Quadrate und x ist Anzahl Männer an der Seite des einen grossen Quadrates, dann muss

$$13y^2 + 1 = x^2 \text{ oder } x^2 - 13y^2 = 1 \tag{3}$$

gelten.

Leonhard Euler (1707-1783) hat Gleichungen dieses Typs irrtümlich nach dem Mathematiker John Pell (1611–1685) benannt; sie wurde aber zuerst von Pierre de Fermat (1607-1665) vorgestellt.

Lösungen der obigen Gleichung lassen sich mit der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{13}$ finden, siehe [4], Seite 351 ff.

Für diese Kettenbruchentwicklung wenden wir den Euklidischen Algorithmus auf $\sqrt{13}$ und 1 an:

$$\begin{aligned} \sqrt{13} &= 3 \cdot 1 + (\sqrt{13} - 3) \quad \text{mit } \sqrt{13} - 3 < 1 \\ 1 &= 1 \cdot (\sqrt{13} - 3) + (4 - \sqrt{13}) \quad \text{mit } 4 - \sqrt{13} < \sqrt{13} - 3 \\ \sqrt{13} - 3 &= 1 \cdot (4 - \sqrt{13}) + (2\sqrt{13} - 7) \quad \text{mit } 2\sqrt{13} - 7 < 4 - \sqrt{13} \\ 4 - \sqrt{13} &= 1 \cdot (2\sqrt{13} - 7) + (11 - 3\sqrt{13}) \quad \text{mit } 11 - 3\sqrt{13} < 2\sqrt{13} - 7 \\ 2\sqrt{13} - 7 &= 1 \cdot (11 - 3\sqrt{13}) + (5\sqrt{13} - 18) \quad \text{mit } 5\sqrt{13} - 18 < 11 - 3\sqrt{13} \\ 11 - 3\sqrt{13} &= 6 \cdot (5\sqrt{13} - 18) + (119 - 33\sqrt{13}) \quad \text{mit } 119 - 33\sqrt{13} < 5\sqrt{13} - 18 \end{aligned}$$

Die Terme werden scheinbar immer komplizierter, aber es gilt

$$\frac{5\sqrt{13} - 18}{119 - 33\sqrt{13}} = \frac{(5\sqrt{13} - 18)}{(119 - 33\sqrt{13})} \cdot \frac{(119 + 33\sqrt{13})}{(119 + 33\sqrt{13})} = \frac{3 + \sqrt{13}}{4} = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} \quad (\text{Vergleiche mit Zeile 2 oben.})$$

und damit werden sich die Schritte in der obigen Entwicklung wiederholen!!

Der Kettenbruch von $\sqrt{13}$ lautet also

$$[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}] = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}}$$

Die ersten Näherungsbrüche von $\sqrt{13}$ sind

$$3 = \frac{3}{1} = 3; \quad 3 + \frac{1}{1} = \frac{4}{1} = 4; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{7}{2} = 3.5; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{11}{3} = 3.\overline{6}; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{18}{5} = 3.6 ;$$

$$3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}}} = \frac{119}{33} = 3.\overline{60}; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{137}{38} \approx 3.6052; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{256}{71} \approx 3.6056;$$

und schliesslich

$$3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{393}{109} \approx 3.605504587; \quad 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}} = \frac{649}{180} \approx 3.60\overline{5}$$

Für die Zähler und Nenner dieser Brüche gilt:

$$\begin{aligned} 3^2 - 13 \cdot 1^2 &= -4 \\ 4^2 - 13 \cdot 1^2 &= 3 \\ 7^2 - 13 \cdot 2^2 &= -3 \\ 11^2 - 13 \cdot 3^2 &= 4 \\ 18^2 - 13 \cdot 5^2 &= -1 \\ 119^2 - 13 \cdot 33^2 &= 4 \\ 137^2 - 13 \cdot 38^2 &= -3 \\ 256^2 - 13 \cdot 71^2 &= 3 \\ 393^2 - 13 \cdot 109^2 &= -4 \\ 649^2 - 13 \cdot 180^2 &= 1 \end{aligned}$$

Die kleinste ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - 13y^2 = 1$ lautet also $x = 649, y = 180$.

Antwort: Die 13 Quadrate, in die Harolds Streitkräfte aufgeteilt waren, bestanden aus je 180^2 Männern, was insgesamt $421'200$ Krieger ergibt. Mit Harold zusammen waren es dann $421'201$ Männer, die ein Quadrat mit 649 Mann an jeder Seite bildeten.

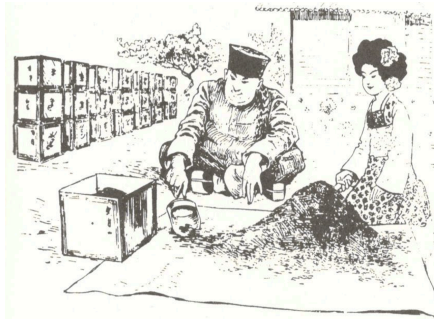
Bemerkungen:

- 421'200 Krieger! Fast nicht zu glauben, dass die Angelsachsen unter Harold II. die Schlacht bei Hastings dennoch verloren haben!! Da hat Sam Loyd doch etwas übertrieben. Nach historischen Quellen sollen es „nur“ etwa 7500 Krieger gewesen sein!
Offenbar hat Sam Loyd diese Aufgabe vom englischen Rätselexperten Henry Dudeney „geborgt“, siehe auch die entsprechende Stelle oben im Rätseltext. Bei Dudeney ist ursprünglich von 61 Quadraten die Rede. Die kleinste Lösung der Gleichung $x^2 - 61y^2 = 1$ lautet $x = 1'766'319'049$, $y = 226'153'980$, siehe bei der Antwort zu Aufgabe 68 in [2].
- Die Behauptung im Rästeltext, dass nur wenige Mathematiker in der Lage sind, die richtige Lösung zu finden, stimmt nur bedingt: Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm entsteht in wenigen Sekunden die nachstehende Tabelle, in der für die ersten 181 natürlichen Zahlen y der Ausdruck $\sqrt{1 + 13y^2}$ berechnet wird.

y	WURZEL(1+13*y^2)
1	3.741657387
2	7.280109889
3	10.86278049
4	14.45683229
...	...
178	641.7889061
179	645.394453
180	649
181	652.605547

Bei $y = 180$ taucht erstmals ein Ergebnis auf, das ebenfalls natürlich ist: $\sqrt{1 + 13 \cdot 180^2} = 649$.

Mischtee (Aufgabe 70 in [2])



Im Orient ist das Mischen von Tee eine derart exakte Wissenschaft, dass die Kombination verschiedener Teearten bis auf den millionstel Teil einer Unze ausgewogen wird! Man sagt, dass die Rezepte einiger berühmter und angesehener Teepflanzer hunderte von Jahren geheimgehalten wurden und nicht nachvollziehbar sind. Nur um die Komplikationen zu demonstrieren, die sich bei der Wissenschaft des Teemischens ergeben, und um zu zeigen, wie schwierig es ist, das Geheimnis zu durchdringen, das diese Kunst umgibt, möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf ein simples Rätsel lenken, das sich auf nur zwei Mischungen bezieht. Der Teemischer hat zwei Kisten erhalten, beide in Form eines Würfels, aber verschieden gross. Der grössere Würfel enthält schwarzen Tee, der kleinere grünen. Er hat den Inhalt beider vermischt und festgestellt, dass sich damit genau 22 würfelförmige Kisten gleicher Grösse füllen lassen. Angenommen, die Innenmasse aller Kisten können bis auf die letzte Dezimalstelle benannt werden, können Sie dann sagen, in welchem Verhältnis der grüne zum schwarzen Tee steht? (Mit andern Worten: Finden Sie zwei verschiedene ganze Zahlen, und zwar derart, dass nach Addition ihrer dritten Potenzen die daraus resultierende Summe durch 22 teilbar ist, um eine Zahl zu erhalten, die eine ganzzahlige Kubikwurzel besitzt.)

Lösung: Bezeichnen wir die drei Zahlen mit x, y, z , dann gilt:

$$x^3 + y^3 = 22z^3$$

Eine Lösung lautet $x = 25'469$, $y = 17'299$ und $z = 9'954$.

Der schwarze und der grüne Tee müssen im Verhältnis $25'469^3 : 17'299^3 \approx 3.19 : 1$ gemischt werden.

Nach Betrachtung des Bildes muss davon ausgegangen werden, dass die Teekisten die Seitenlängen von 25.469 Zoll für den Schwarztee, 17.299 Zoll für den Grüntee und 9.954 Zoll für den Mischtee haben. (1 Zoll entspricht 2.54 Zentimeter.)

Beat Jaggi (jaggibe@outlook.com) nimmt Hinweise entgegen, wie wohl Sam Loyd diese Zahlen gefunden haben könnte - notabene ohne Taschenrechner und Computer!

Zum Schluss noch ein Rätsel, welches auf ein Diophantisches Gleichungssystem führt:

Lisas Pferch (Aufgabe 45 in [3])

Wie uns von Mutter Goose bestätigt wird, entdeckte der Zimmermann, der die Schafhürde (eingezäunter Bereich für Schafe) für Miss Lisa baute, dass sich zwei Pfosten einsparen liessen, wenn er das Feld quadratisch statt rechteckig anlegte.

„In beiden hat die gleiche Anzahl Schafe Platz“, sagte er, „aber beim Quadrat wird für jedes Schaf ein Pfosten benötigt, an dem man es festbinden kann!“

Wieviele Schafe muss es in dieser berühmten Herde gegeben haben? Vorausgesetzt, die Pfosten hatten bei beiden Konstruktionen den gleichen Abstand voneinander und die Grundfläche des quadratischen und des rechteckigen Pferchs wären gleich gross und die Herde bestand aus weniger als drei Dutzend Schafen.

Lösung: Nehmen wir der Einfachheit halber an, der Abstand der Posten betrage genau ein Meter.

Für ein Quadrat mit der Seitenlänge c (Meter) braucht es dann $4c$ Pfosten, für ein Rechteck der Masse $a \times b$ (Meter \times Meter) braucht es $2a + 2b$ Pfosten.

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ab &= c^2 \\ 2a + 2b &= 4c + 2 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung entnehmen wir $2c = a + b - 1$ oder $4c^2 = a^2 + b^2 + 1 + 2ab - 2a - 2b$, was nach der ersten Gleichung gleich $4ab$ sein muss.

So ergibt sich

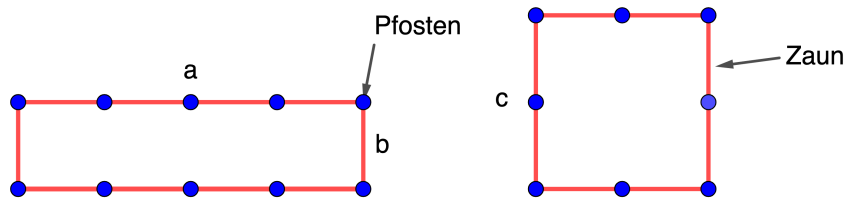
$$a^2 + b^2 + 1 - 2ab - 2a - 2b = a^2 - 2(b+1)a + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 2(b+1)a + (b-1)^2 = 0,$$

und daraus $a = \frac{2(b+1) \pm \sqrt{4(b+1)^2 - 4(b-1)^2}}{2} = b + 1 \pm 2\sqrt{b} = (\sqrt{b} \pm 1)^2$.

Damit wird $c^2 = ab = b(\sqrt{b} \pm 1)^2 = (b \pm \sqrt{b})^2$.

Zusammengefasst: b muss eine Quadratzahl sein. Mit $b = m^2$ wird $a = (m \pm 1)^2$ und $c = m(m \pm 1)$. Wir betrachten die Lösungen mit $+$, da m und $m + 1$ zu gleichen Ergebnissen führt wie m und $m - 1$.

$m = 1$ ergibt $a = 4$, $b = 1$ und $c = 2$.



Für das Rechteck mit den Abmessungen 4 Meter \times 1 Meter braucht es 10 Pfosten, für das Quadrat mit den Abmessungen 2 Meter \times 2 Meter nur 8. In diesem Fall besteht die Herde aus 8 Schafen. (Anmerkung: Im Sinne des Tierschutzes ist zu hoffen, dass der Abstand zwischen den Pfosten mehr als 1 Meter betrug!!)

Mit $m = 2$ wird $a = 9$, $b = 4$ und $c = 6$.

Für das Rechteck mit den Abmessungen 9 Meter \times 4 Meter bräuchte es $2(9 + 4) = 26$ Pfosten, für das flächengleiche Quadrat mit den Abmessungen 6 Meter \times 6 Meter reichten $4 \cdot 6 = 24$ Pfosten. (Diese zweite Lösung fehlt in [3])

Literatur

- [1] Jaggi Beat: *Rätsel von Sam Loyd und Diophantische Gleichungen*, Bulletin des VSMP, 156, September 2024
- [2] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2020
- [3] Loyd, Sam und Gardner, Martin: *Vom Küken zum Ei, Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele*, Dumont Taschenbücher, 2015
- [4] Niven, Ivan; Zuckerman Herbert S.; Montgomery Hugh L.: *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, Inc. 1991

Für [4] siehe auch

<https://editorialdinosaurio.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/03/itn-niven.pdf>