Thomas Genoud
Collège du Sud, Bulle, thomas.genoud@studentfr.ch

Inégalités de Bell : De La Théorie à l'Expérience

Présentation du Travail de Maturité de Thomas Genoud

Introduction

Malgré ses succès technologiques, la mécanique quantique soulève des interrogations fondamentales sur la nature de la réalité. En particulier, son caractère intrinsèquement probabiliste et l'apparente non-localité de certains phénomènes ont longtemps défié les intuitions héritées du réalisme classique.

Albert Einstein, avec Podolsky et Rosen, soulignait en 1935 cette tension dans le paradoxe EPR, plaidant pour l'existence de variables cachées permettant de rétablir une vision déterministe et locale. À l'opposé, l'interprétation de Copenhague défendait l'idée que la fonction d'onde contient toute l'information physique, et qu'aucune réalité physique n'existe indépendamment de l'acte de mesure.

Ce débat est longtemps resté d'ordre philosophique, jusqu'à ce que John S. Bell montra que toute théorie à variables cachées locales devait obéir à une inégalité vérifiable expérimentalement, dont la mécanique quantique prédit la violation dans certains cas intriqués.

Nous présentons ici une expérience visant à tester ces inégalités. Après avoir exposé le cadre théorique, nous décrivons notre dispositif expérimental, présentons nos résultats et discutons leurs implications sur la localité et le réalisme.

Fondements théoriques

État quantique d'un photon

En mécanique quantique, l'état d'un photon est représenté par un vecteur appartenant à un espace de Hilbert sur les complexes. Ce vecteur peut être décomposé sur une base d'états propres associés à une observable donnée, elle-même modélisée par un opérateur autoadjoint.

Dans notre cas, nous nous intéressons à la polarisation du photon. Elle peut être décrite dans les bases $\{|H\rangle, |V\rangle\}$, correspondant respectivement aux états de polarisation horizontale et verticale.

L'état général d'un photon polarisé peut alors s'écrire sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle \quad \text{avec} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Ce formalisme illustre le principe de superposition. Avant toute mesure, le photon n'a pas de polarisation définie, mais se trouve dans une combinaison cohérente des deux états possibles. La probabilité d'obtenir un résultat donné correspond au carré du module du coefficient associé.

États à deux photons et intrication

Lorsqu'on considère un système constitué de deux photons, l'espace d'état global est donné par le produit tensoriel des espaces de Hilbert individuels. Et la base canonique de ce nouvel espace est formée par les états $|HH\rangle, |HV\rangle, |VH\rangle, |VV\rangle$, où la première lettre correspond à la polarisation du premier photon et la seconde à

celle du second. Certains états de ce système ne peuvent pas être écrits comme un produit de deux états individuels : ce sont les états intriqués. Un exemple typique d'état intriqué est l'état EPR :

$$|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HH\rangle + |VV\rangle\right).$$

Dans un tel état, chaque photon pris isolément semble non polarisé, mais des corrélations fortes apparaissent lorsque des mesures sont réalisées conjointement. Ce sont précisément ces corrélations, incompatibles avec toute théorie locale à variables cachées, que les inégalités de Bell permettent de tester expérimentalement.

Inégalités de Bell

Le théorème de Bell montre que les corrélations observées entre deux systèmes intriqués sont soumises à des contraintes spécifiques si l'on suppose que la nature obéit à une description locale et déterministe. Ces contraintes prennent la forme d'une inégalité statistique, dont la violation, prédite par la mécanique quantique, signifie qu'il est impossible de reproduire les résultats expérimentaux tout en conservant à la fois réalisme et localité.

Cette inégalité fait intervenir un paramètre observable S, construit à partir des fonctions de corrélation $E(a,b)$, qui quantifient la dépendance statistique entre les résultats de mesures effectuées avec différentes orientations a, a', b, b' des polariseurs :

$$S(a,a',b,b') = |E(a,b) - E(a,b')| + |E(a',b) + E(a',b')|.$$

Dans notre cas, ces corrélations sont évaluées à partir des coïncidences de détection. Nous enregistrons les événements où deux photons intriqués sont détectés simultanément après avoir traversé chacun un polariseur orienté selon un angle donné. La fonction $E(a,b)$ correspond alors à l'espérance du produit des résultats binaires (+1 ou –1) issus de ces détections conjointes.

Dans une théorie à variables cachées locales, chaque photon est associé à un paramètre λ contenant toute l'information déterminant le résultat des mesures. Les fonctions $A(a,\lambda)$ et $B(b,\lambda)$, prenant les valeurs ± 1, modélisent les résultats aux détecteurs en fonction de ce paramètre λ et de leur orientation a ou b. En intégrant sur toutes les valeurs possibles de λ, pondérées par une densité de probabilité $\rho(\lambda)$, on obtient la fonction de corrélation classique

$$E(a,b) = \int A(a,\lambda)B(b,\lambda)\rho(\lambda)d\lambda.$$

Sous ces hypothèses, la quantité S est toujours bornée par

$$S \leq 2.$$

En revanche, dans le cadre quantique, où les résultats ne sont pas prédéterminés, la corrélation prédite pour l'état $|\Psi_{\mathrm{EPR}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HH\rangle + |VV\rangle\right)$ est donnée par

$$E_{QM}(a,b) = \cos[2(a-b)],$$

ce qui permet d'atteindre une valeur maximale de :

$$S \leq 2\sqrt{2}.$$

Une mesure expérimentale donnant $S > 2$ exclut donc toute théorie fondée sur des variables cachées locales. Elle ne valide pas pour autant de manière exclusive la mécanique quantique, mais indique qu'au moins l'un des postulats de réalisme ou de localité doit être abandonné.

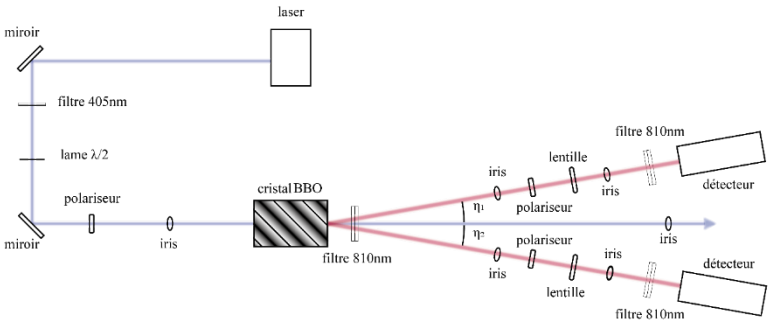
Dispositif Expérimental et Méthodologie

Configuration de l'expérience

Le montage expérimental repose sur un schéma optique standard pour la génération de photons intriqués par conversion paramétrique descendante spontanée (SPDC). Un laser de longueur d'onde 405 nm est d'abord filtré pour supprimer toute lumière parasite, puis traverse une lame demi-onde ($\lambda/2$), qui permet de faire basculer la polarisation linéaire du faisceau dans une direction diagonale, à 45° par rapport à l'axe horizontal. Cette orientation est ensuite contrôlée par un polariseur avant l'entrée dans un cristal non linéaire de β-borate de baryum (BBO).

Au sein du cristal, le processus de SPDC type I produit des paires de photons intriqués dans un état de type EPR, chacun émis dans des directions opposées. Un filtre centré à 810 nm, placé à la sortie, permet de sélectionner les photons convertis en éliminant ceux issus du rayonnement résiduel du laser.

Chaque photon issu de la paire est dirigé vers un bras optique muni d'un polariseur réglable, permettant de définir précisément l'angle de mesure de polarisation. Les photons sont ensuite détectés par des photodiodes capables de détecter des photons uniques grâce au principe d'avalanche dans des semi-conducteurs. Les signaux générés sont ensuite traités pour enregistrer uniquement les coïncidences de détection, indispensables au calcul des corrélations.



Méthodologie de mesure

Pour chaque configuration d'angles α et β des polariseurs, le dispositif enregistre le nombre de coïncidences de détection entre les deux photodiodes durant une période fixe de 20 secondes. Les angles sont ajustés manuellement à l'aide de montures rotatives, puis stabilisés pendant la durée de comptage.

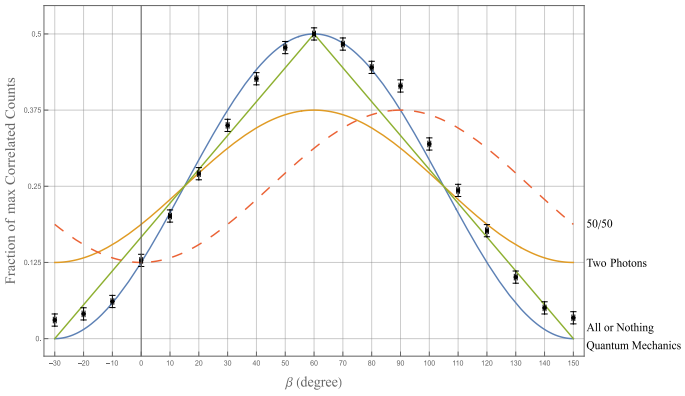
Ces coïncidences correspondent aux événements où deux photons issus d'une même paire sont détectés simultanément, après avoir traversé les polariseurs orientés respectivement selon les angles α et β. Le comptage est ensuite répété pour différentes paires d'orientations (a, b), (a, b'), (a', b), (a', b'), afin de permettre le calcul des fonctions de corrélation $E(a, b)$, à partir desquelles la valeur de S est déterminée. Les fonctions de corrélation sont ensuite évaluées selon la relation

$$E(a, b) = \frac{N_{\parallel} - N_{\perp}}{N_{\parallel} + N_{\perp}} ,$$

où $N_{\parallel}$ correspond aux coïncidences interprétées comme corrélées, et $N_{\perp}$ à celles interprétées comme anticorrélées, en fonction des orientations choisies des polariseurs.

Analyse des Résultats et Discussion

Comparaison des modèles



La figure ci-contre présente les taux de coïncidences mesurés pour $\alpha = 60°$, en fonction de l'angle β, comparés aux prédictions de quatre modèles théoriques, chacun fondé sur une hypothèse différente concernant la polarisation des photons :

QM (mécanique quantique) : prédictions issues d'un état intriqué, non réductible à une description locale ;

Two photons : modèle à variables cachées avec distribution uniforme de la polarisation $\lambda \in [0, \pi]$. Il postule que chaque photon a une polarisation bien définie, mais inconnue ;

50/50 : mélange de paires polarisées horizontalement ($\lambda = 0$), soit verticalement ($\lambda = \pi/2$) ;

All or Nothing (AN) : scénario artificiel où un photon est détecté uniquement si sa polarisation est proche de celle du polariseur.

Visuellement, seul le modèle quantique reproduit fidèlement la structure des données expérimentales. Pour appuyer cette observation, nous avons effectué un test du χ^2, qui mesure l'écart entre les données et les prédictions de chaque modèle. Pour la série de mesures avec $\alpha = 60°$, nous obtenons

$$\chi^2_{\mathrm{QM}} = 0.071 \quad \chi^2_{\mathrm{2Ph}} = 0.636 \quad \chi^2_{50/50} = 1.412 \quad \chi^2_{\mathrm{AN}} = 0.190\,.$$

Le modèle quantique présente la plus faible divergence statistique. Bien que le modèle AN affiche un χ^2 relativement bas, il n'a aucune base physique réaliste. Ces résultats confirment que, parmi les modèles testés, la mécanique quantique décrit le plus fidèlement les phénomènes observés.

Violation de l'inégalité de Bell

À partir des séries de mesures correspondantes, les fonctions de corrélation $E(a, b)$ ont été calculées selon la méthode décrite dans la section Méthodologie de mesure, puis combinées suivant la formule donnée dans la section Inégalités de Bell. La valeur obtenue est

$$S \approx 2.56 \pm 0.12\,.$$

Cette valeur dépasse clairement la limite de $S \leq 2$ imposée par les théories locales à variables cachées, confirmant une violation significative des inégalités de Bell.

Signification statistique

Pour estimer la probabilité qu'un tel écart résulte d'une fluctuation aléatoire dans un cadre classique, nous avons appliqué la borne décrite dans *Random numbers certified by Bell's theorem* (Pironio et al., 2010). Cette approche repose sur l'idée de quantifier, à partir d'un ensemble de n essais indépendants, la probabilité d'obtenir une valeur moyenne empirique $\hat{I}$ supérieure au seuil classique fixé (ici, 2) :

$$P\left(\hat{I} \geq 2 + \delta\right) \leq \exp\left(-\frac{n(\hat{I}-2)^2}{72}\right).$$

Cette borne est adaptée aux situations où les résultats sont binaires et les choix de mesures aléatoires et indépendants. En appliquant cette formule à notre expérience, nous obtenons

$$P \leq 7.33 \times 10^{-25}\,.$$

Cette valeur rend extrêmement improbable que la violation observée de l'inégalité de Bell résulte d'une simple fluctuation statistique dans un cadre local.

Conclusion

Cette étude expérimentale a permis de tester les inégalités de Bell dans un contexte accessible et contrôlé, en s'appuyant sur la génération de paires de photons intriqués via un cristal de BBO et l'analyse de leurs corrélations à l'aide de polariseurs réglables et de détecteurs de photons uniques.

La valeur mesurée de $S \approx 2.56$ dépasse nettement la borne classique imposée par les théories locales à variables cachées, et la probabilité qu'un tel résultat provienne d'une fluctuation statistique dans un cadre classique est estimée à moins de 7.33×10^{-25}. Ces résultats expérimentaux excluent toute interprétation locale et déterministe des corrélations mesurées. Ils mettent en évidence la non-classicité de la lumière et confirment, dans les limites de notre dispositif, la nature non locale des phénomènes quantiques.

Certaines limitations expérimentales persistent, notamment l'absence de séparation stricte entre les mesures (faille de localité) et l'efficacité insuffisante des détecteurs (faille de détection). Leur prise en compte dans des dispositifs plus avancés permettrait de renforcer encore la portée de ces résultats.

Au-delà de cet enjeu fondamental, l'intrication démontrée ici constitue un socle des technologies quantiques modernes, de la cryptographie à l'informatique, illustrant comment une interrogation, presque philosophique au départ, peut conduire à des avancées technologiques majeures.

Remerciements

Nous souhaitons remercier le Dr. Chi ZHANG, dép. Physique de l'Université de Fribourg, Soft Matter and Photonics Group (chi.zhang2@unifr.ch) de nous avoir accordé son temps et son know-how, et de nous avoir mis à disposition le laboratoire ainsi que des sources précieuses, ayant pu rendre possible la réalisation de ce travail. Nous exprimons également toute notre reconnaissance à Dr. David TAJ (david.taj@edufr.ch) pour la direction de ce travail.