

Logik? – Logisch! (Teil 2)

Armin P. Barth

3 Prädikatenlogik. Aufbau einer formalen Sprache

Abraham Lincoln sagte einmal: *It is true that you may fool all the people some of the time; you can even fool some of the people all the time; but you can't fool all of the people all the time.*¹

Es lässt sich leicht einsehen, dass die Aussagenlogik nicht stark genug ist, um diese Aussage zu formalisieren. Sie stellt nur plumpe Aussagen zur Verfügung, die dann mittels der fünf oben besprochenen Junktoren verknüpft werden dürfen. Damit lässt sich aber nicht ausdrücken, dass es *einige* Menschen gibt, die zu *allen* Zeitpunkten für dumm verkauft werden können. Wir brauchen, wollen wir anspruchsvollere Aussagen formalisieren, eine bessere Logik. Wir benötigen zum Beispiel Variablen x und t , die aus der Menge aller Menschen respektive aus der Menge aller Zeiten schöpfen. Und wir benötigen ein Prädikat (eine Relation) $P(x)$, das erfüllt ist, wenn x eine Person bedeutet, und weiter ein Prädikat $Z(t)$, das erfüllt ist, wenn t eine Zeit bedeutet, und schliesslich ein zweistelliges Prädikat $D(x,t)$, das erfüllt ist, wenn Person x zur Zeit t für dumm verkauft wird. Dann kann der erste Satz des Lincoln-Zitates so formalisiert werden:

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists t(Z(t) \wedge D(x,t)))$$

Dabei steht \forall für „für alle“ und \exists für „es existiert ein“. Erst mit diesen zusätzlichen Elementen wird die logische Sprache stark genug, um die meisten Aussagen ausdrücken zu können, denen Mathematiker bei ihrem alltäglichen Tun begegnen. Wir sehen uns daher veranlasst, im Folgenden den syntaktischen Aufbau der viel reichhaltigeren Sprache der *Prädikatenlogik* aufzubauen. Ist das einmal geschehen, fügen wir auch noch eine Semantik bei, die klären wird, was es bedeuten soll, dass eine Aussagen „gilt“. Danach loten wir die Möglichkeiten und Beschränkungen dieser neuen Sprache aus und widmen uns den faszinierenden Entdeckungen von Kurt Gödel aus dem Jahr 1931.

3.1 formale Sprache

Gegenüber der Aussagenlogik muss hier der Zeichensatz natürlich erweitert werden. Wir beschränken uns wiederum auf ein Minimum an Symbolen:

Der Zeichensatz	\neg	\wedge	\forall	$=$	$()$	'
	nicht	und	für alle	gleich	Klammern	Apostroph

Wiederum benutzen wir auch andere Zeichen gerne und zwar als Abkürzungen:

$\Phi \vee \Psi$	als Abkürzung für	$\neg(\neg\Phi \wedge \neg\Psi)$
$\Phi \rightarrow \Psi$	als Abkürzung für	$\neg\Phi \vee \Psi$
$\Phi \leftrightarrow \Psi$	als Abkürzung für	$(\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$
$\exists xP(x)$	als Abkürzung für	$\neg\forall x(\neg P(x))$
$x \neq y$	als Abkürzung für	$\neg(x = y)$

¹ zitiert aus: P. K. Stockmeyer, „What did Lincoln really mean?“, in: The College Mathematics Journal, Vol. 35, No. 2, 2004, p. 103

Zudem benötigen wir Variablen als Platzhalter für Individuen, Prädikate als Eigenschaften von Individuen und Funktionen, die Individuen neue Individuen zuweisen. Genauer:

- Wir führen eine Menge *Var* von *Variablen* ein, die wir mit x, x', x'', \dots oder – im Sinne einer Abkürzung – mit x, y, z, \dots (oder auch indiziert) bezeichnen.
- Wir führen eine endliche Menge *Präd* von *Prädikaten* ein. *Präd* enthält also Prädikate $P_i(\dots)$, wobei i eine endliche Indexmenge I durchläuft und eine Stellenzahlfunktion $\lambda : I \rightarrow \mathbb{N}$ jedem Prädikat seine Stellenzahl $\lambda(i)$ zuordnet.
- Wir führen weiter eine endliche Menge *Funk* von *Funktionen* ein. *Funk* enthält also Funktionen $f_j(\dots)$, wobei j eine endliche Indexmenge J durchläuft und eine Stellenzahlfunktion $\mu : J \rightarrow \mathbb{N}$ jeder Funktion ihre Stellenzahl $\mu(j)$ zuordnet.
- 0-stellige Funktionen wollen wir *Konstanten* nennen, und wir notieren sie so: c_k , wobei k eine Indexmenge K durchläuft.

Bei obigem Lincoln-Zitat etwa hatten wir keine Funktion, aber drei Prädikate benutzt, zwei einstellige und ein zweistelliges. Zum Aufbau einer formalen Sprache gehört es, dass man ganz präzise festlegt, was korrekt gebildete Terme, Formeln und Aussagen sind. Das wollen wir als nächstes in Angriff nehmen:

Definition: Alle Variablen und Konstanten sind *Terme*. Sind $\tau_1, \dots, \tau_{\mu(j)}$ schon Terme, so ist auch $f_j(\tau_1, \dots, \tau_{\mu(j)})$ ein Term. Nichts sonst ist ein Term. Mit *TM* bezeichnen wir die Menge aller Terme.

Es ist klar, dass wir damit genau unsere alltägliche Vorstellung von Termen realisiert haben. Immer neue Terme entstehen ja aus Variablen und Konstanten dadurch, dass man diese irgendwelchen Funktionen unterwirft und so neue Terme erzeugt. Auch bei der Definition von Formeln lassen wir uns wieder vom Alltag leiten:

Definition:

- Sind σ und τ Terme, so ist $\sigma = \tau$ eine *Formel*.
- Sind $\tau_1, \dots, \tau_{\lambda(i)}$ Terme, so ist $P_i(\tau_1, \dots, \tau_{\lambda(i)})$ eine *Formel*.
Formeln vom Typ i. und ii. heissen *Primformeln*.
- Sind Φ und Ψ Formeln, so sind auch $\neg\Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Phi \leftrightarrow \Psi$, $\exists x\Phi$ und $\forall x\Phi$ Formeln.
- Nichts sonst ist eine Formel.

Mit *FML* bezeichnen wir die Menge aller Formeln.

Zur Vereinfachung erlauben wir uns immer wieder Abkürzungen wie zum Beispiel $\forall x, y, z$ statt $\forall x \forall y \forall z$ oder $\exists x, y, z$ statt $\exists x \exists y \exists z$ oder $\tau_1 P_i \tau_2$ statt $P_i(\tau_1, \tau_2)$ usw. Wenn wir uns noch einmal das Lincoln-Zitat vor Augen führen, so fällt auf, dass sich das auch anders verstehen lässt. Unsere erste Formalisierung war ja

$$\forall x (P(x) \rightarrow \exists t (Z(t) \wedge D(x, t)))$$

Der erste Satz des Zitates könnte aber – obwohl wenig wahrscheinlich – auch so verstanden werden, dass es einen speziellen Zeitpunkt gibt, an dem alle Menschen gleichzeitig für dumm verkauft werden können. Dann allerdings lautet die Formalisierung so:

$$\exists t (Z(t) \wedge \forall x (P(x) \rightarrow D(x, t)))$$

Was immer Lincoln sagen wollte, beides sind Beispiele korrekt gebildeter Formeln der Prädikatenlogik.

Unser nächstes Ziel ist es, *Aussagen* zu definieren. Dazu lohnt sich ein Vorüberlegung: Die Formel (1) $x^2 + 7x + 5 = 0$ entspricht nicht unserer intuitiven Vorstellung einer Aussage, da sie nicht entweder wahr oder falsch ist. Der Wahrheitswert hängt von der Zahl ab, die wir in die Variable einzusetzen gedenken. Hingegen sind die Formeln (2) $\forall x, y (x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y))$ und (3) $\forall x, y (x^2 + y^2 = (x + y)^2)$ Aussagen im intuitiven Sinn, (2) eine wahr und (3) eine falsche, falls wir an den Individuenbereich \mathbb{R} denken. Der Unterschied zwischen (1) und (2)&(3) liegt darin, dass in (1) die Variable x „frei“ (nämlich nicht an einen Quantor gebunden) vorkommt, während die Variablen in (2)&(3) „gebunden“ sind. Das macht die nächste Definition verständlich:

Definition: In den Formeln $\forall x(\Phi)$ und $\exists x(\Phi)$ heisst Φ *Wirkungsbereich* des Quantors \forall bzw. \exists . Eine Variable x in der Formel Φ heisst *gebunden*, wenn sie sich im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ befindet, sonst *frei*.

Eine *Aussage* ist eine Formel ohne freie Variablen. Mit *AUS* bezeichnen wir die Menge aller Aussagen.

In der Formel $\forall x(x < 0 \rightarrow x < y) \wedge \exists z((0 < z) \wedge (z < x))$ beispielsweise ist x in der linken Klammer gebunden und in der rechten frei, während y in der ganzen Formel frei und z in der ganze Formel gebunden ist. Insbesondere ist die Formel also keine Aussage.

Als nächstes führen wir noch zwei Konzepte ein, die wichtig sein werden: die *Substitution* und die *Sprache*.

Im mathematischen Alltag ist es überaus häufig, dass man für Variablen in Formeln irgendwelche Terme einsetzt; selbstredend ersetzt man dann jedes Vorkommen der Variablen durch denselben Term. Dieses Konzept wollen wir hier abbilden. Der Punkt ist, dass wir nur in eine freie Variable einsetzen sollten. Wir sollten unser Augenmerk überdies auf die Tatsache richten, dass bei der Substitution einer freien Variablen durch einen Term es durchaus passieren kann, dass eine im Term enthaltene Variable neu in den Wirkungsbereich eines Quantors gelangt. Ersetzen wir zum Beispiel in $\exists y(x < y)$ die freie Variable x durch einen Term, der y enthält, so gerät y in den Wirkungsbereich des Quantors. In der folgenden Definition tragen wir diesem Fall Rechnung:

Definition: Mit $\Phi(x|\tau)$ bezeichnen wir diejenige Formel, die man aus der Formel Φ erhält, wenn man jedes freie Vorkommen der Variablen x durch den Term τ ersetzt. Der Term τ heisst *frei für x in Φ* , falls durch diese Ersetzung keine Variable von τ in den Wirkungsbereich eines Quantors gerät.

Die oben eingeführten Begriffe der formalen Sprache hängen ganz wesentlich ab von den beiden Stellenzahl-funktionen $\lambda : I \rightarrow \mathbb{N}$ und $\mu : J \rightarrow \mathbb{N}$ sowie der Indexmenge K der Konstanten. In diesen „Dingen“ bündelt sich gewissermassen der reale Weltausschnitt, der durch die formale Sprache abgebildet werden soll. Da der gesamte Sprachaufbau vom Tripel (y, μ, K) abhängt, wollen wir dieses Tripel eine *Sprache* nennen:

Definition: Das Tripel $L := (\lambda, \mu, K)$ nennen wir *Sprache*. Wir schreiben $TM(L)$, $FML(L)$ und $AUS(L)$, um diese Abhängigkeit auszudrücken.

3.2 formale Beweise

Die Beschäftigung mit Logik ist darum so wichtig, weil sie jeglichem mathematischen Tun zu Grunde liegt. Wenn wir in irgendeiner mathematischen Theorie arbeiten, befolgen wir nebst den theoriespezifischen Sätzen und Axiomen immer auch die Regeln der Logik; die Logik ist die Begleiterin jeder anderen mathematischen Theorie. Die nun folgende Definition eines formalen Beweises muss dem Rechnung tragen, das heisst, unsere formale Sprache muss nebst den logischen Axiomen immer auch eine Menge von theoriespezifischen Formeln (das zu diesem Zeitpunkt bereits gesicherte Wissen der Theorie) bereitstellen. Formale Beweise basieren also letztlich auf logischen Axiomen, logischen Schlussregeln sowie dem Fundament der Theorie. Um die Axiome und Schlussregeln der Prädikatenlogik wollen wir uns nun zuerst kümmern.

Die logischen Axiome enthalten einerseits Axiome der Aussagenlogik und andererseits quantorenlogische Axiome. Bei der Aussagenlogik könnten wir uns für das Axiomensystem aus Kapitel 2.3 entscheiden, wir können uns das Leben aber auch erleichtern, wenn wir gleich alle Tautologien als Axiome zulassen. Dies wird ja durch die semantische Vollständigkeit der Aussagenlogik gerechtfertigt. Sollten wir bei irgendeinem Beweis eine aussagenlogische Tautologie verwenden, ist es praktisch, diese als Axiom zur Verfügung zu haben, anstatt sie erst aus den Axiomen der Aussagenlogik herleiten zu müssen. Als Axiome unserer formalen Sprache wählen wir diese:

Logische Axiome	
Axiome der Aussagenlogik	Alle Tautologien
Quantorenlogische Axiome	(Q1) $\forall x\Phi(x) \rightarrow \Phi(\tau)$, falls τ frei für x in Φ ist. (Q2) $\forall x(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \forall x\Psi)$, falls x nicht frei in Φ . (Q3) $\Phi(\tau) \rightarrow \exists x\Phi(x)$ (Q4) $\exists x\Phi(x) \rightarrow \neg\forall x\neg\Phi(x)$

Identitätslogische Axiome	(I1) $x = x$ (Reflexivität) (I2) $(x = y) \rightarrow (y = x)$ (Symmetrie) (I3) $(x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$ (Transitivität) (I4) $(x = y) \rightarrow (P_i(\dots, x, \dots) \rightarrow P_i(\dots, y, \dots))$ (I5) $(x = y) \rightarrow f_j(\dots, x, \dots) = f_j(\dots, y, \dots)$
---------------------------	--

Je ein Beispiel soll die ersten beiden quantorenlogischen Axiome illustrieren: Eine Anwendung von (Q1) ist etwa $\forall x(x^2 \geq 0) \rightarrow (t^2 \geq 0)$. Wenn ja für *alle* Individuen x die Ungleichung $x^2 \geq 0$ gilt, so sicher auch für ein spezielles. Bei (Q2) ist es wichtig, dass x nicht frei in Φ vorkommt. Es darf entweder gar nicht oder nur gebunden erscheinen, da es sonst in der Konklusion plötzlich des Quantors entrissen ist. Die Formel $\forall y(\forall x(y > 0 \rightarrow x + y > x)) \rightarrow \forall y(y > 0 \rightarrow \forall x(x + y > x))$ ist ein Beispiel einer Anwendung von (Q2).

All dies sind die logischen Axiome. Hat man irgendeine spezielle mathematische Theorie im Auge (Gruppentheorie, Arithmetik, Geometrie,...), die man mit Hilfe der Prädikatenlogik untersuchen will, so benötigt man natürlich weitere theoriespezifische Axiome und Sätze; die Menge dieser bezeichnen wir im Folgenden mit Σ .

Als Schlussregeln wollen wir hier wiederum die „Einsetzregel“ und den „modus ponens“ (wie schon in der Aussagenlogik) sowie die „Generalisierungsregel“ (GN) verwenden:

Einsetzregel	Φ $\Phi \rightarrow \Psi$ -----(MP) Ψ	Φ --(GN) $\forall x\Phi$
Schlussregeln der Prädikatenlogik		

Nun sind wir endlich in der Lage, ganz klar zu sagen, was ein Beweis ist:

Definition: Sei $\Psi \in FML(L)$. Ein *Beweis* von Ψ ist eine Folge $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \Psi$ von Formeln, wobei jede Formel entweder ein logisches Axiom ist, aus Σ stammt oder aus einer bzw. zwei früheren Formeln durch Anwendung einer der Schlussregeln entstanden ist. Und wir schreiben: $\boxed{\Sigma \vdash \Psi}$.

Wenn beispielsweise $\Phi \wedge \Psi$ schon zu unseren gesicherten Erkenntnissen aus Σ gehört, dann ist diese Folge ein Beweis von Φ :

$$\Phi \wedge \Psi, (\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \Phi, \Phi$$

Die erste Formel stammt ja aus Σ , die zweite ist eine Tautologie, und die dritte entsteht aus den beiden ersten durch MP. Wenn beispielsweise $\Phi \rightarrow \Psi$ und $\Psi \rightarrow \Xi$ schon zu unseren gesicherten Erkenntnissen aus Σ gehören, so ist diese Folge ein Beweis von $\Phi \rightarrow \Xi$:

$$\Phi \rightarrow \Psi, (\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow ((\Psi \rightarrow \Xi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Xi)), (\Psi \rightarrow \Xi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Xi), \Psi \rightarrow \Xi, \Phi \rightarrow \Xi$$

Die erste Formel entstammt Σ , die zweite ist eine Tautologie, die dritte entsteht durch MP, die vierte entstammt Σ , und die letzte entsteht wiederum durch MP.

Als eine weitere Illustration des formalen Beweisens betrachten wir noch den folgenden Satz:

<p><u>Satz (Deduktionstheorem):</u></p>	Sei $\Sigma \subset FML(L)$ und seien $\Phi, \Psi \in FML(L)$ Dann gilt: $\Sigma \vdash (\Phi \rightarrow \Psi) \Rightarrow \Sigma \cup \{\Phi\} \vdash \Psi$ Die Umkehrung gilt auch, falls Φ eine Aussage ist.
---	--

Der Beweis von " \Rightarrow " ist elementar: Angenommen, wir verfügen schon über einen Beweis von $\Phi \rightarrow \Psi$ aus Σ . Wir haben also eine Formelfolge vor uns, deren letztes Element $\Phi \rightarrow \Psi$ ist. Wir verlängern diesen Beweis einfach um Φ , Ψ (wobei wir den MP einsetzen), und schon haben wir einen Beweis von Ψ aus $\Sigma \cup \{\Phi\}$. Der Beweis der Umkehrung ist sehr viel trickreicher und kann etwa mit vollständiger Induktion nach der Länge des Beweises von Ψ aus $\Sigma \cup \{\Phi\}$ bewiesen werden.

3.3 Semantische Vollständigkeit des Beweisbegriffs

Bisher ist unsere formale Logik eine funktionstüchtige Maschine, die aber völlig losgelöst von realer Mathematik läuft. Es wurde kein Wort darüber gesagt, was unsere Formeln in realen Weltausschnitten bedeuten und ob sie gelten – und was das überhaupt heissen soll. G. I. Ruzavin schreibt: *Die Frage der Wahrheit eines formalen Systems ist ohne eine entsprechende Interpretation nicht zu lösen. Solche Interpretationen sind (...) für die Mathematik von Lebensinteresse, denn wenn sich ein System nicht für ernsthafte Zwecke eignet, wird sich kein Mathematiker dafür interessieren. Um eine Interpretation eines Axiomensystems oder Kalküls zu erhalten, müssen wir den Grundbegriffe oder primitiven Termen eine bestimmte Bedeutung zuordnen. Innerhalb des Axiomensystems selbst bleibt diese Bedeutung, wie wir bereits wissen, völlig unbestimmt.*²

Das Bindeglied zwischen einem abstrakten Logikkalkül und einer konkreten mathematischen Struktur ist die sog. *Interpretation*. Durch sie wird ein konkreter Bereich (sog. Individuenbereich) von Dingen (Zahlen, Mengen, Punkte, Gruppen,...) festgelegt, auf den sich die Variablen des Kalküls beziehen. Ferner werden den Kalkülkonstanten „reale“ Konstanten aus diesem Bereich, den abstrakten Kalkülprädikaten und -funktionen „reale“ Prädikate zwischen und Funktionen mit den Individuen zugewiesen. Und den Formeln werden bestimmte Wahrheitswerte zugeordnet, so dass es sinnvoll wird zu sagen, dass etwas „gilt“. Wir geben sofort ein Beispiel:

Angenommen, wir spezifizieren die Sprache L wie folgt: $L = (\lambda, \mu, K)$ mit $\lambda : I = \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\lambda(1) = 2$, ferner $\mu : J = \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}$ und $\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = 2$ und schliesslich $K = \{1, 2\}$. Einfacher gesagt: Wir haben also ein zweistelliges Prädikat, drei zweistellige Funktionen sowie zwei Konstanten. Diese Sprache kann leicht in einem realen Weltausschnitt interpretiert werden, indem wir zum Beispiel den Individuenbereich \mathbb{R} betrachten und darin die beiden Konstanten 0 und 1, die Relation $<$ und die drei Funktionen $+$, $-$, \cdot . Diese Interpretation liefert somit die konkrete Struktur $\langle \mathbb{R}; <, +, -, \cdot; 0, 1 \rangle$ des *angeordneten Körpers der reellen Zahlen*. Wenn wir (nebst den Axiomen der Prädikatenlogik) nun noch die strukturspezifischen Axiome über Anordnung und die Körperaxiome in Σ versammeln, so ist die Interpretation abgeschlossen.

Nach erfolgter Interpretation der Sprache in einer konkreten Struktur können wir sagen, was es heissen soll, dass eine Aussage „gilt“. Es bedeutet nämlich, dass die in der Aussage behauptete formale Eigenschaft für die Individuen der realen Struktur tatsächlich zutrifft. Das soll in den nächsten Abschnitten präzisiert werden, indem wir näher auf Interpretationen, Strukturen, Modelle und Gültigkeit eingehen. Belohnt werden wir hinterher durch einen berühmten Satz von Gödel.

Definition: Unter einer *Interpretation* einer Sprache $L = (\lambda, \mu, K)$ der Prädikatenlogik versteht man

- die Zuordnung eines konkreten Individuenbereichs $|\Omega|$
- zu jeder Konstanten c_k die Zuordnung einer „realen“ Konstanten $c_k^\Omega \in |\Omega|$
- zu jedem Prädikat P_i die Zuordnung eines $\lambda(i)$ -stelligen „realen“ Prädikates P_i^Ω über $|\Omega|$
- zu jeder Funktion f_j die Zuordnung einer $\mu(j)$ -stelligen „realen“ Funktion f_j^Ω über $|\Omega|$
- zu jeder Formel die Zuordnung eines Wahrheitswertes nach bestimmten Regeln (siehe unten).

Das Quadrupel $\Omega := \left(|\Omega|; (P_i^\Omega)_{i \in I}; (f_j^\Omega)_{j \in J}; (c_k^\Omega)_{k \in K} \right)$ heisst *L-Struktur*.

Bei der Aussagenlogik schmilzt diese Liste natürlich auf den ersten und letzten Punkt zusammen, da dort nur interpretierbare Aussagen und ihre Wahrheitswerte eine Rolle spielen. Durch die Interpretation wird nun jedem prädikatenlogischen Term τ und jeder Formel Φ ein „realer“ (interpretierter) Term τ^Ω und eine „reale“ Formel Φ^Ω zugeordnet. Die Definition der Gültigkeit einer Formel wird natürlich vom intuitiven Verständnis von Gültigkeit geleitet. Eine Formel ist doch dann gültig, wenn man alle möglichen Elemente des Individuenbe-

²G. I. Ruzavin, „Die Natur der mathematischen Erkenntnis“, Akademie-Verlag, Berlin, 1977, p.147

reichs einsetzen kann und „es stimmt“ jedes Mal. Genau das sollte unsere nächste Definition leisten:

Definition: Eine Abbildung b , die jeder prädikatenlogischen Variablen ein Element des Individuenbereichs $|\Omega|$ zuordnet, heisst *Belegung*. Die *Belegung eines Terms* kann rekursiv definiert werden:

$$c_k^\Omega [b] := c_k^\Omega \quad (\text{Eine Konstante bleibt natürlich unverändert.})$$

$$x^\Omega [b] := b(x) \quad (\text{für alle Variablen})$$

$$f_j^\Omega (\tau_1^\Omega, \dots, \tau_{\mu(j)}^\Omega) [b] := f_j^\Omega (\tau_1^\Omega [b], \dots, \tau_{\mu(j)}^\Omega [b]) \quad (\text{für alle Funktionen})$$

Speziell meinen wir mit $b \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$ die Belegung, die für alle Variablen ausser x genau so wirkt, wie b , aber der Variablen x das Individuum a zuordnet.

Nun lässt sich ganz präzise sagen, was es heissen soll, dass eine Formel in einer Struktur gilt. Sie gilt, wenn sie bei jeder möglichen Belegung gilt, und dies wiederum kann rekursiv erklärt werden. Alle Details sind in folgender Definition zusammengefasst:

Definition: Eine prädikatenlogische Formel Φ *gilt* in der Struktur Ω , in Zeichen: $\boxed{\Omega \models \Phi}$, wenn sie in Ω bei jeder möglichen Belegung b gilt, in Zeichen: $\Omega \models \Phi [b]$. Die *Gültigkeit der Formel bei einer Belegung b* wiederum kann rekursiv über den Aufbau einer Formel definiert werden:

$$\Omega \models (\sigma = \tau) [b] \quad :\Leftrightarrow \quad \sigma^\Omega [b] = \tau^\Omega [b]$$

$$\Omega \models P_i (\tau_1, \dots, \tau_{\lambda(i)}) [b] \quad :\Leftrightarrow \quad P_i^\Omega (\tau_1^\Omega [b], \dots, \tau_{\lambda(i)}^\Omega [b])$$

$$\Omega \models \neg \Phi [b] \quad :\Leftrightarrow \quad \Omega \not\models \Phi [b]$$

$$\Omega \models \forall x \Phi [b] \quad :\Leftrightarrow \quad \Omega \models \Phi \left[b \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \right] \quad \text{für alle } a \in |\Omega|$$

usw. über den ganzen Aufbau einer Formel.

Eine prädikatenlogische Formel heisst *allgemeingültig*, wenn sie unter jeder möglichen Interpretation gilt.

Wir interpretieren unsere formale Sprache noch einmal in der Struktur $R := \langle \mathbb{R}; <; +, -, \cdot; 0, 1 \rangle$ mit einem zweistelligen Prädikat $P_1(\dots, \dots)$, drei zweistelligen Funktionen f_1, f_2, f_3 und zwei Konstanten c_1 und c_2 . Eine Formel in der formalen Sprache könnte etwa so lauten: $\Phi := \forall x (P_1(c_1, x) \wedge P_1(x, c_2))$. Zu prüfen, ob diese Formel gilt, heisst nun, sie innerhalb der Struktur zu interpretieren. Dabei gehen die Konstanten über in $c_1^R = 0$ und $c_2^R = 1$, und das Prädikat geht über in $P_1^R = "<".$ Die Formel gilt, wenn sie unter jeder Belegung b gilt, wenn also für jede reelle Zahl a , mit der man die Variable x belegt, gilt, dass $(0 < a) \wedge (a < 1)$. Das trifft nicht zu, also gilt die Formel in dieser Struktur nicht. Insbesondere ist sie nicht allgemeingültig.

Ein weiterer wichtiger Begriff in der Semantik ist der des Modells:

Definition: Eine L -Struktur $\Omega := \left\langle |\Omega|; (P_i^\Omega)_{i \in I}; (f_j^\Omega)_{j \in J}; (c_k^\Omega)_{k \in K} \right\rangle$ heisst ein *Modell* von $\Sigma \subset \text{AUS}(L)$, falls $\Omega \models \Phi$ für alle Aussagen $\Phi \in \Sigma$, wenn also alle Aussagen von Σ in dieser Struktur gelten.

Modelle werden unter anderem dazu benutzt, die *Widerspruchsfreiheit* und *Unabhängigkeit* von Axiomensystemen einzusehen. Um die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems Σ aufzuzeigen, muss ein Modell für Σ gefunden werden, ein „Stück Wirklichkeit“, das genau nach den Regeln von Σ funktioniert. Dieses ist aus den Objekten einer Theorie aufgebaut, an deren Widerspruchsfreiheit eigentlich niemand zweifelt. Trotzdem ist ein solcher Beweis immer nur relativ, da man sich jetzt ja fragen muss, ob diese Theorie wirklich widerspruchsfrei ist. Letztlich lassen sich alle mathematischen Theorien auf die Mengenlehre zurückführen. Die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre lässt sich aber nicht durch Aufzeigen einer noch grundlegenderen Struktur als Modell nachweisen; ein Beweis der Widerspruchsfreiheit müsste direkt geschehen.

Um die Unabhängigkeit eines bestimmten Axioms von anderen zu zeigen, müssen zwei Strukturen Ω_1, Ω_2 angegeben werden, wobei Ω_1 ein Modell dieses Axioms sowie der anderen Axiome und Ω_2 ebenfalls ein Modell

der anderen Axiome sowie der Negation des in Frage stehenden Axioms ist. Nachdem zahlreiche Mathematiker Euklids Axiomensystem der Geometrie „berichtigen“ wollten, indem sie versuchten, das Parallelenaxiom aus den restlichen Axiomen herzuleiten, konnte man schliesslich die Unabhängigkeit dieses Axioms von den übrigen zeigen, als N. J. Lobačevskij und J. Bolyai ein Modell der nicht-Euklidischen Geometrie (alle Axiome der Euklidischen Geometrie ausser dem Parallelenaxiom plus die Negation des Parallelenaxioms) fanden. Gerade beim Parallelenaxiom war Euklid also im Recht.

Wir kennen nun also den Logikapparat der Prädikatenlogik und wissen, was unter einem formalen Beweis und was unter Gültigkeit zu verstehen ist. Die Frage drängt sich natürlich auf, wie gut denn unser formales System ist, das heisst ob

- (1) jede Aussage, die aus Σ innerhalb des Kalküls bewiesen werden kann, auch in jedem Modell von Σ gilt? Trifft das zu, so nennt man den Kalkül *korrekt*. Es muss betont werden, dass die ganze bisherige Arbeit vergeblich gewesen wäre, würde dies nicht zutreffen.
- (2) jede in jedem Modell von Σ gültige Aussage auch innerhalb des Kalküls bewiesen werden kann? Trifft das zu, so nennt man den Kalkül (*semantisch*) *vollständig*.

Es könnte ja immerhin sein, dass unser Beweisverfahren zu schwach ist, um alles, was gilt, zu beweisen. Es könnte ja eine ganz grundlegende Schlussregel fehlen, ohne die sich einfach nicht auskommen lässt. 1930 hat Kurt Gödel gezeigt, dass diese Sorge unbegründet ist. Es gilt nämlich der folgende Satz:

Satz (Vollständigkeitssatz von Gödel, 1930):

1. Die Prädikatenlogik ist korrekt. Falls also $\Sigma \vdash \Phi$ für eine Aussage Φ , so gilt sie auch in jedem Modell von Σ .
2. Die Prädikatenlogik ist semantisch vollständig, d.h. ist $\Sigma \subset AUS(L)$ und $\Omega \models \Phi$ für alle Modelle Ω von Σ , so folgt: $\Sigma \vdash \Phi$.
M.a.W.: Aus $\Sigma \not\vdash \Phi$ folgt zwingend die Existenz eines Modells Ω von Σ mit $\Omega \not\models \Phi$.

Ein Beweis würde an dieser Stelle viel zu viel Platz rauben. Einer der berühmtesten Beweise geht auf L. Henkin zurück und benutzt die nach ihm benannte „Henkin-Erweiterung“. Wir können hier nur eine Umformulierung des Satzes vorschlagen, die den Beweis erleichtert. Zunächst definieren wir:

Definition: Eine Aussagenmenge $\Sigma \subset AUS(L)$ heisst (*syntaktisch*) *widerspruchsvoll*, falls es eine Aussage Φ gibt, so dass $\Sigma \vdash \Phi$ und $\Sigma \vdash \neg\Phi$. Anderenfalls heisst sie (*syntaktisch*) *widerspruchsfrei*.

Nun gilt:

- Lemma:
- (i) $\Sigma \subset AUS(L)$ (*syntaktisch*) widerspruchsvoll \Leftrightarrow Jede Aussage Ψ ist aus Σ beweisbar.
 - (ii) $\Sigma \vdash \Phi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ ist (*syntaktisch*) widerspruchsvoll
 - (iii) $\Sigma \not\vdash \Phi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ ist (*syntaktisch*) widerspruchsfrei

Das lässt sich ganz leicht einsehen:

Zu (i): Die Richtung " \Leftarrow " ist trivial. Sei also Σ (*syntaktisch*) widerspruchsvoll. Es gibt folglich eine Aussage Φ , so dass $\Sigma \vdash \Phi$ und auch $\Sigma \vdash \neg\Phi$. Wir hängen diese Beweise einfach zusammen und ergänzen die Formel-folge um die Tautologie $\Phi \rightarrow (\neg\Phi \rightarrow \Phi \wedge \neg\Phi)$, woraus sich dann mit doppeltem MP $\Phi \wedge \neg\Phi$ beweisen lässt. Mit der Tautologie $(\Phi \wedge \neg\Phi) \rightarrow \Psi$ und MP erhalten wir schliesslich Ψ .

Zu (ii) und (iii): In (ii) ist die Richtung " \Rightarrow " klar. Sei also $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ syntaktisch widerspruchsvoll. Nach (i) können wir dann alles beweisen, insbesondere Φ . Folglich haben wir $\Sigma \cup \{\neg\Phi\} \vdash \Phi$. Nach dem Deduktions-theorem folgt hieraus $\Sigma \vdash (\neg\Phi \rightarrow \Phi)$. Den Beweis von $\neg\Phi \rightarrow \Phi$ verlängern wir nun einfach um die Tautolo-gie $(\neg\Phi \rightarrow \Phi) \rightarrow \Phi$ und benutzen MP, um Φ zu erhalten. (iii) ist äquivalent zu (ii). \square

Damit erreichen wir nun folgende Umformulierung des Vollständigkeitssatzes: Wir wollen ja zeigen, dass aus $\Sigma \not\vdash \Phi$ zwingen die Existenz eines Modells von $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ folgt. Wegen Lemma (iii) können wir stattdessen zeigen, dass aus der (*syntaktischen*) Widerspruchsfreiheit von $\Sigma \cup \{\neg\Phi\}$ die Existenz eines Modells von

$\Sigma \cup \{\neg, \Phi\}$ folgt. Noch einfacher müssen wir also „nur“ zeigen, dass die (syntaktische) Widerspruchsfreiheit *irgendeiner* Aussagenmenge zwingend die Existenz eines Modells dieser Aussagemenge nach sich zieht. Und eben dazu eignet sich zum Beispiel die „Henkin-Erweiterung“...

4. Die Unvollständigkeitssätze von Gödel

Die Jahre 1931 und 1936 brachten bedeutende Rückschläge für das Hilbert-Programm; es erwies sich danach als utopisch und unrealisierbar. 1931 bewies Gödel seine berühmten Unvollständigkeitssätze, die A. Fraenkel und Y. Bar-Hillel als die grössten Leistungen des abstrakten menschlichen Denkens unserer Zeit einstufte³. Henkin sagte, Gödels Sätze hätten einen Schock in der mathematischen Welt ausgelöst und die Positionen hinsichtlich des endgültigen Wertes der formaldeduktiven Methode grundlegend verändert⁴. Was war geschehen? Gödel hatte eine besonders wichtige und in der Mathematik grundlegende Interpretation der formalen Sprache betrachtet: die formale Zahlentheorie. Und er hatte bewiesen, dass diese Theorie unter gewissen harmlosen Voraussetzungen (*syntaktisch*) *unvollständig* ist, das heisst, dass es formal unentscheidbare Sätze geben muss, Sätze mit der Eigenschaft, dass weder die Sätze selbst noch ihre Negationen innerhalb des Systems beweisbar sind. Also: Nicht jeder wahre Satz der intuitiven Zahlentheorie kann innerhalb des Kalküls gewonnen werden. Das machte schmerzlich bewusst, dass „Beweisbarkeit“ und „Wahrheit“ nicht dasselbe ist, dass wir nicht erwarten können, dass durch rein formale Prozesse innerhalb eines Kalküls sich exakt das abbilden lässt, was wir inhaltlich mit „wahr“ oder „gültig“ meinen. Jeder Versuch, inhaltliche Kriterien auszuklammern und durch einen rein formalen Umgang mit Symbolen zu ersetzen, ist zum Scheitern verurteilt.

Zudem entzog Gödel der Grundlagenmathematik den Boden, indem er nachwies, dass die (natürlich stark erhoffte) Widerspruchsfreiheit der formalen Zahlentheorie niemals beweisbar sein wird mit Methoden, die innerhalb des Kalküls zur Verfügung stehen. Will man die Widerspruchsfreiheit der formalen Zahlentheorie beweisen, so muss man zwingend Methoden heranziehen, die sich nur in einem stärkeren Kalkül formalisieren lassen. So hat Gentzen 1936 die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie mit Hilfe des in der Mengenlehre formalisierbaren Prinzips der *transfiniten Induktion* bewiesen. Will man also ein System absichern, so muss man stets ein zweites, stärkeres System hinzuziehen, das das erste an Formalisierungsmitteln übertrifft. Eine Selbstgarantie eines Kalküls ist nicht möglich.

Um das alles besser zu verstehen, müssen wir jetzt präziser und detaillierter werden. Gödel untersuchte also die formale Zahlentheorie. Wovon sprechen wir genau? Er betrachtete die Struktur $Z := \langle \mathbb{N}; ', +, \cdot; 0 \rangle$ als Interpretation unserer formalen Sprache, ohne Prädikate, aber mit drei Funktionen, der einstelligen Nachfolgerfunktion $'$, der Addition und Multiplikation und der Konstanten 0. Die natürlichen Zahlen werden darin als $0, 0', 0'', 0''', \dots$ dargestellt, aber wir leisten uns immer wieder die einfacheren Notationen $0, 1, 2, 3, \dots$. In Σ versammelte er die strukturspezifischen Axiome, nämlich diese:

Σ	Peano-Axiome: (P1) $\forall x (\neg(x' = 0))$ (P2) $\forall x, y (x' = y' \rightarrow x = y)$ (P3) $\forall x, y, z (x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z))$ (P4) $\Phi(x 0) \wedge \forall x (\Phi(x x) \rightarrow \Phi(x x+1)) \rightarrow \forall x \Phi(x x)$
	Axiome der Addition: (A1) $\forall x (x + 0 = x)$ (A2) $\forall x (x + y' = (x + y)')$
	Axiome der Multiplikation: (M1) $\forall x (x \cdot 0 = 0)$ (M2) $\forall x (x \cdot y' = x \cdot y + x)$

Die Struktur Z zusammen mit diesem Axiomensystem nennen wir nun die *formale Zahlentheorie*.

³ A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel, „Foundations of Set Theory“, Amsterdam, 1952, p. 302

⁴ L. Henkin, „Completeness“, Philosophy of Science Today, Ed. Morgenbesser New York – London, 1967, p. 30

Wir müssen uns noch konsequenter als bisher bemühen, die Objektsprache und die Metasprache sauber zu trennen. Beispielsweise ist ein Ausdruck wie $\Phi \vee \Psi$ innerhalb der Objektsprache nicht bildbar, da die Symbole Φ, Ψ nicht zur Verfügung stehen. Wir meinen mit $\Phi \vee \Psi$ ja eigentlich, dass man zuerst diejenige Formel hinschreibt, die wir hier Φ nennen (und die natürlich allein mit den Symbolen der formalen Sprache auskommen muss), dann das Symbol \vee anfügt und zum Schluss noch diejenige Formel anhängt, die wir hier Ψ nennen. Quine hat ein nützliches Symbol eingeführt, das wir hier gerne benutzen wollen: $\boxed{\Phi \vee \Psi}$ meint genau das, was wir eben umständlich beschreiben mussten; dieser Ausdruck kennzeichnet nun also eine Formel der Objektsprache.

Von zentraler Bedeutung für den Beweis der Unvollständigkeitssätze ist die Tatsache, dass man jeder Formel Φ aus Z eine natürliche Zahl, die sog. *Gödelnummer*, $GN(\Phi)$, zuordnen kann und zwar so, dass auch umgekehrt aus der Nummer die Formel eindeutig rekonstruierbar ist. Dies geschieht durch folgende Codierung:

Symbol	\wedge	\rightarrow	\neg	\forall	\exists	0	=	'	+	.	()
GN	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Den Variablen x, \dots ordnet man der Reihe nach die Codes $2, 2 \cdot 2 = 4, 2 \cdot 3 = 6, \dots$ zu. Um die Eindeutigkeit der Codierung garantieren zu können, benutzt man Primzahlen. Die GN einer Formel entsteht als Produkt von potenzierten Primzahlen, wobei die Exponenten gerade die Codes der Symbole der Formel sind. Die Formel $\forall x(x = x)$ erhält so zum Beispiel die GN

$$2^{GN(\forall)} \cdot 3^{GN(x)} \cdot 5^{GN(=)} \cdot 7^{GN(x)} \cdot 11^{GN(=)} \cdot 13^{GN(x)} \cdot 17^{GN(=)} = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^{23} \cdot 7^2 \cdot 11^{15} \cdot 13^2 \cdot 17^{25}$$

Damit kann auch ein ganzer Beweis codiert werden. Ein formaler Beweis ist ja bloss eine Folge von Formeln. Man kann also wiederum mit Primzahlen arbeiten und einen Beweis durch ein Produkt aufeinander folgender potenziert Primzahlen codieren, deren Exponenten gerade die Gödelnummern der einzelnen Formeln sind. Natürlich drängt sich hier aber noch die Verwendung eines Trennzeichens auf. Wir führen noch die Bezeichnung Γ_n ein für diejenige Formel der formalen Zahlentheorie, deren GN n ist. Manchmal notieren wir auch $\Gamma_n(x)$, um anzudeuten, dass diese Formel die freie Variable x hat.

Warum ist diese sog. „Gödelisierung“ von zentraler Bedeutung? Unser Ziel ist es letztlich, innerhalb der formalen Zahlentheorie eine Formel zu konstruieren, die ihre eigene Unbeweisbarkeit aussagt, die also – metasprachlich interpretiert – über sich selber aussagt, sie könne nicht bewiesen werden. Dabei lehnen wir uns an die Epimenides-Paradoxie an, in der die Aussage „Alles, was ein Kreter äussert, ist eine Lüge“ ja auch von sich selber behauptet, sie sei eine Lüge, weil es ein Kreter ist, der sie äussert. Während dort aber eine Vermischung von Sprachen passiert (und gewollt ist), müssen wir hier tunlichst darauf achten, die Sprachen nicht zu vermischen. Das heisst, die Formel wird eine „leblose“ Verkettung von Symbolen des Kalküls sein, und erst durch Interpretation in der intuitiven Zahlentheorie wird sie ihre eigene Unbeweisbarkeit ausdrücken. Von genau dieser Formel (und nicht der metasprachlichen Deutung) lässt sich dann beweisen, dass sie innerhalb der formalen Zahlentheorie nicht entscheidbar ist, so dass die formale Zahlentheorie also (syntaktisch) unvollständig ist. Der entscheidende Trick aber, um metasprachliche Prädikate in Prädikate der formalen Zahlentheorie übersetzen zu können, ist die „Gödelisierung“!

Beispielsweise lässt sich das metasprachliche Prädikat „Die natürliche Zahl y ist GN von 0 oder von einer Variablen“ dank obiger Codierung übersetzen in $(y = 13) \vee \exists x(y = 0 \cdot x)$. Dies ist jetzt eine Formel des Kalküls und gänzlich unabhängig von einer Bedeutung, die wir ihr allenfalls geben können, indem wir sie metasprachlich interpretieren. Wir sollten bei der Trennung der Sprachen noch sorgfältiger sein und niemals in der Metasprache und der Objektsprache dasselbe Symbol benutzen. Hier haben wir ja y sowohl als natürliche Zahl (also metasprachlich), als auch als Variable innerhalb des Kalküls verwendet. Das wollen wir künftig vermeiden, indem wir weiterhin x, y, \dots für die Variablen innerhalb des Kalküls schreiben und \bar{x}, \bar{y}, \dots wenn wir diese Variablen als natürliche Zahlen interpretieren. Wir brauchen noch folgende Definition:

Definition: Sei $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ein n -stelliges Prädikat der intuitiven Zahlentheorie. Wir nennen dieses Prädikat *in der formalen Zahlentheorie ausdrückbar*, genau dann wenn es im Kalkül eine Formel Φ mit genau n freien Variablen x_1, \dots, x_n gibt, so dass

- wenn $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, dann $Z \vdash \Phi(x_1, \dots, x_n)$ und
- wenn nicht $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, dann $Z \vdash \neg \Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Es steckt unglaublich viel Arbeit darin, von wirklich anspruchsvollen Prädikaten der intuitiven Zahlentheorie zu zeigen, dass sie innerhalb des Kalküls formal ausdrückbar sind. Aus Platzgründen müssen wir hier sehr viel überspringen und können nur ohne Beweis festhalten:

Das folgende Prädikat der intuitiven Zahlentheorie ist im Kalkül formal ausdrückbar:
 $R(\bar{n}, \bar{y}) \Leftrightarrow \bar{n}$ ist GN einer Formel, die die erste Variable der Objektsprache (also x) als einzige freie Variable hat (also von $\Gamma_n(x)$), und \bar{y} ist GN eines Beweises von $\Gamma_n(n)$; das ist diejenige Formel, die aus der Formel mit GN \bar{n} entsteht, indem man für die freie Variable die Ziffer einsetzt, die der intuitiven natürlichen Zahl \bar{n} entspricht.

Lemma:

Salopp ausgedrückt ist das Prädikat $R(\bar{n}, \bar{y})$ also genau dann erfüllt, wenn die natürliche Zahl \bar{y} die GN eines Beweises derjenigen Formel ist, die aus der Formel mit GN \bar{n} hervorgeht, indem man in sie ihre eigene GN einsetzt. Da dieses Prädikat im Kalkül formal ausdrückbar ist, existiert also im Kalkül eine Formel Φ mit zwei freien Variablen n, y , so dass

- wenn $R(\bar{n}, \bar{y})$, dann $Z \vdash \Phi(n, y)$ und
- wenn nicht $R(\bar{n}, \bar{y})$, dann $Z \vdash \neg \Phi(n, y)$.

Jetzt treiben wir die Sache auf die Spitze, indem wir die Formel $\neg \forall y \neg \Phi(n, y)$ betrachten. Ihre GN sei \bar{p} . Es handelt sich also einfach um die Formel $\Gamma_{\bar{p}}(n)$. Setzen wir in diese Formel (genauer: in ihre freie Variable) nun den formalen Repräsentanten p der GN \bar{p} ein, so gelangen wir zur Formel

$$\Gamma_{\bar{p}}(p): \neg \forall y \neg \Phi(p, y)$$

die – metasprachlich interpretiert – ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet. Sie „sagt“ ja, dass es keinen Beweis gibt für diejenige Formel, die aus der Formel mit GN \bar{p} (das ist $\Gamma_{\bar{p}}(n)$) hervorgeht, indem man ihr ihre eigene GN einsetzt (das ist $\Gamma_{\bar{p}}(p)$, also die Formel selbst). In die Fänge einer Paradoxie geraten wir hierbei nicht, weil wir tunlichst darauf geachtet haben, Metasprache und Objektsprache zu trennen.

Mit $\Gamma_{\bar{p}}(p)$ haben wir nun diejenige Formel gewonnen, die die Hauptrolle im 1. Gödelschen Unvollständigkeitssatz spielt. Dieser lautet nämlich:

1. Unvollständigkeitssatz von K. Gödel (1931):

Z ω -widerspruchsfrei⁵ \Rightarrow (i) $Z \not\vdash \Gamma_{\bar{p}}(p)$
 (ii) $Z \not\vdash \neg \Gamma_{\bar{p}}(p)$
 Die formale Zahlentheorie ist also (syntaktisch) unvollständig;
 $\Gamma_{\bar{p}}(p)$ ist ein Beispiel einer formal unentscheidbaren Formel.

Wir müssen noch erklären, was man unter ω -Widerspruchsfreiheit versteht. Dann beweisen wir diesen Satz und geben noch den 2. Unvollständigkeitssatz an.

Definition: Ein Axiomensystem Σ heisst ω -widerspruchsfrei, genau dann wenn für keine Formel $\Psi(x)$ gleichzeitig zutreffen: $\Sigma \vdash \Psi(0)$, $\Sigma \vdash \Psi(1)$, $\Sigma \vdash \Psi(2)$,... und $\Sigma \vdash \neg \forall x \Psi(x)$. (Es ist klar, dass daraus die gewöhnliche syntaktische Widerspruchsfreiheit folgt.)

⁵ 1936 hat Rosser gezeigt, dass man schon aus der geringeren Voraussetzung der gewöhnlichen syntaktischen Widerspruchsfreiheit zum gleichen Resultat gelangen kann, wenn man eine etwas kompliziertere Formel als die von Gödel betrachtete benutzt.

Beweis des 1. Unvollständigkeitssatzes:

(i) Angenommen, es wäre $Z \vdash \Gamma_p^-(p)$, dann müsste es also einen Beweis für diese Formel geben; dieser Beweis habe etwa die GN \bar{k} . Dann wäre also $R(\bar{p}, \bar{k})$ erfüllt. Wegen der formalen Ausdrückbarkeit dieses Prädikates würde folgen, dass $Z \vdash \Phi(p, k)$. Mit (Q3) und MP hätte das $Z \vdash \exists y \Phi(p, y)$ zur Konsequenz. Mit (Q4) und MP hätte dies $Z \vdash \neg \forall y \neg \Phi(p, y)$ zur Folge. Dies ist gleichbedeutend mit $Z \vdash \neg \Gamma_p^-(p)$. Insgesamt würde also die Annahme $Z \vdash \Gamma_p^-(p)$ auf $Z \vdash \neg \Gamma_p^-(p)$ führen im Widerspruch zur angenommenen (syntaktischen) Widerspruchsfreiheit des Kalküls (welche ja aus der ω -Widerspruchsfreiheit folgt). Daher ist die Annahme falsch, und es ist also $Z \not\vdash \Gamma_p^-(p)$.

(ii) Nach (i) ist $\Gamma_p^-(p)$ innerhalb des Kalküls nicht beweisbar, das heisst keine der natürlichen Zahlen $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots$ ist GN eines Beweises dieser Formel. Insbesondere erfüllt also keines der Paare $(\bar{p}, \bar{0}), (\bar{p}, \bar{1}), (\bar{p}, \bar{2}), \dots$ das Prädikat R . Wegen der formalen Ausdrückbarkeit bedeutet dies: $Z \vdash \neg \Phi(p, 0)$ und $Z \vdash \neg \Phi(p, 1)$ und $Z \vdash \neg \Phi(p, 2)$ und so weiter. Wegen der Definition der ω -Widerspruchsfreiheit hat dies zur Folge, dass $Z \not\vdash \neg \forall y \neg \Phi(p, y)$, das heisst $Z \not\vdash \neg \Gamma_p^-(p)$. Genau das galt es zu zeigen. □

Der zweite Gödelsche Unvollständigkeitssatz birgt mindestens gleich viel Zündstoff in sich:

2. Unvollständigkeitssatz von K. Gödel (1931):

Z widerspruchsfrei \Rightarrow Die Widerspruchsfreiheit von Z kann nicht innerhalb des Kalküls bewiesen werden.

Wie gesagt, hat dieser Satz einen wesentlichen Teil des Hilbert-Programms zunichte gemacht. Eine Selbstgarantie unseres formalen Systems ist nicht zu erbringen. Schlimmer noch, es gibt aus der unangenehmen Situation keinen Ausweg, dass unser Kalkül entweder widerspruchsfrei ist und dies nicht bewiesen werden kann, oder dass er widerspruchsvoll ist und damit alles bewiesen werden kann, sogar – paradoxerweise – seine eigene Widerspruchsfreiheit.

Beweisidee:

Der Kalkül ist widerspruchsfrei, sobald wir irgendeine in Z beweisbare Formel Υ finden, für die nicht gleichzeitig $\neg \Upsilon$ beweisbar ist. Die Aussage, dass $\neg \Upsilon$ in Z unbeweisbar ist, wird bekanntlich durch $\neg \exists y \Phi(k, y)$ formal ausgedrückt, wobei \bar{k} die GN von $\neg \Upsilon$ sei. Diese Aussage wollen wir hier kurz *WID* nennen, weil sie ja in gewissem Sinne die Widerspruchsfreiheit des Kalküls ausdrückt.

Im Beweis des 1. Unvollständigkeitssatzes wurde ein metasprachlicher Beweis erbracht für die Aussage „Wenn der Kalkül widerspruchsfrei ist, dann ist $\Gamma_p^-(p)$ im Kalkül unbeweisbar“. Durch unseren Übersetzungsprozess können wir nun diese Aussage innerhalb der formalen Zahlentheorie selber darstellen: Die Prämisse „Der Kalkül ist widerspruchsfrei“ wird dabei ersetzt durch die Formel *WID*, das „wenn...dann“ wird ersetzt durch \rightarrow und die Konklusion „ $\Gamma_p^-(p)$ ist im Kalkül unbeweisbar“ wird ersetzt durch die Formel $\Gamma_p^-(p)$ selbst, da sie ja bei inhaltlicher Deutung gerade ihre eigene Unbeweisbarkeit behauptet. Die Übersetzung in die formale Zahlentheorie liefert also die Formel $\neg \text{WID} \rightarrow \Gamma_p^-(p)$.

Es kann nun gezeigt werden, dass $\neg \text{WID} \rightarrow \Gamma_p^-(p)$ ein innerhalb des Kalküls beweisbarer Satz ist. Angenommen, man könnte jetzt die Widerspruchsfreiheit innerhalb des Kalküls beweisen, so gäbe es also einen formalen Beweis für *WID*. Durch Anwendung des MP würde daraus ein formaler Beweis von $\Gamma_p^-(p)$ folgen im Widerspruch zum 1. Unvollständigkeitssatz. Daher kann die Widerspruchsfreiheit nicht innerhalb des Kalküls nachgewiesen werden.