

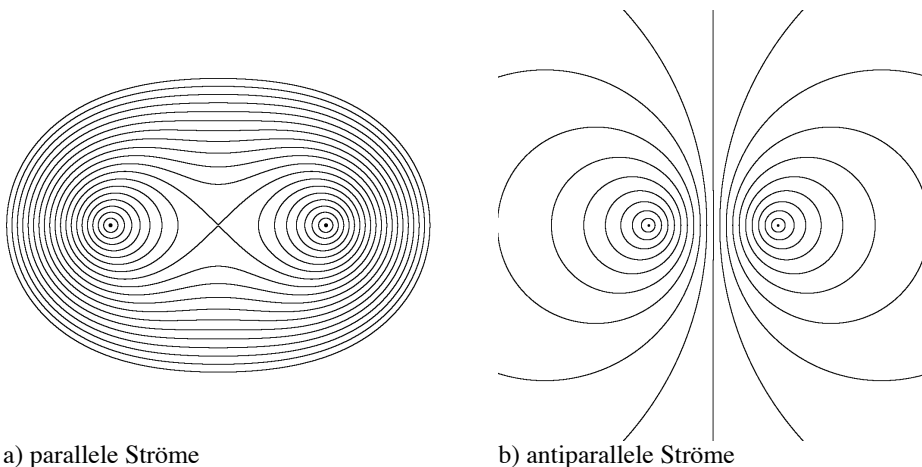
Magnetische Feldlinien paralleler Drähte

Martin Lieberherr

Mathematisch Naturwissenschaftliches Gymnasium Rämibühl, 8001 Zürich

Einleitung

Ab und zu revidiere ich meine Unterlagen und ersetze Diagramme, die ich aus irgendwelchen Quellen zusammenkopiert hatte, durch eigene. Natürlich packt mich dann der Ehrgeiz, diese Diagramme - falls möglich - exakt zu berechnen. Und wenn ich dann ein Programm habe, fange ich an zu spielen und finde oft etwas, das mich interessiert und das ich nachrechne. Das Resultat ist meistens ein ausgefüllter Nachmittag und ein Ergebnis, das in der Literatur schon längst bekannt ist. So auch im folgenden Beispiel: Ich wollte die Feldlinien in der Umgebung zweier paralleler Stromleiter darstellen (Abb. 1). Die Ströme sollten gleich stark sein und in derselben resp. entgegengesetzter Richtung fließen.



a) parallele Ströme

b) antiparallele Ströme

Abb. 1: Magnetische Feldlinien unendlich langer, paralleler, gerader, dünner Drähte mit gleicher Stromstärke. Die Drähte sind senkrecht zur Zeichenebene.

Abbildung 1a) zeigt sehr schön, dass die Feldlinien in der Nähe eines einzelnen Drahtes Kreise um diesen Draht sind. Von weitem gesehen wirken die Drähte mit gleich gerichteten Strömen wie ein einzelner Leiter und deshalb gehen die Feldlinien um beide Drähte herum. Dazwischen gibt es den Grenzfall, der mich an eine Lemniskate erinnerte. Da ich oft in mathematischen Formelsammlungen etwas suche, wusste ich auch, dass die Lemniskate ein Spezialfall eines cassinischen Ovals ist und dass diese Kurven so ähnlich aussehen wie die gezeichneten Feldlinien. Einen Nachmittag später hatte ich diese Vermutung bewiesen und nochmals fünf Minuten später lieferte mir Google die Bestätigung. Ich möchte aber trotzdem zeigen, wie der Beweis geht.

Oval von Cassini

Cassinische Ovale sind Kurven, welche folgender Gleichung gehorchen:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4 \text{ mit den freien Parametern } a \text{ und } b.$$

Cassini-Ovale entstehen z.B. als Schnitt einer Ebene mit einem geeignet orientierten Torus. Wird die Definitionsgleichung nach x abgeleitet, so folgt:

$$2(x^2 + y^2 + a^2) \cdot \left(2x + 2y \frac{dy}{dx}\right) - 4a^2 \cdot 2x = 0 \text{ respektive}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \left(\frac{2a^2x}{x^2 + y^2 + a^2} - x \right) \text{ Differenzialgleichung eines Cassini-Ovals}$$

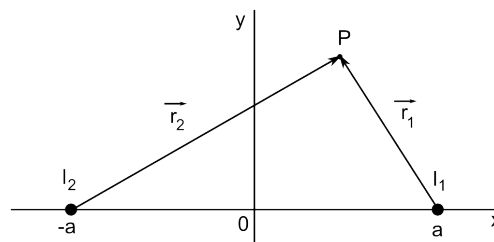
Im Spezialfall $a = b$ erhält man die Bernoulli-Lemniskate. Sie hat in Polarkoordinaten die Darstellung $r^2 = 2a^2 \cos(2\varphi)$.

Differenzialgleichung der Feldlinien paralleler Ströme

Damit wir die Differenzialgleichung der Feldlinien herleiten können, benötigen wir den magnetischen Feldstärkevektor. Die Bezeichnungen lese man in Abbildung 2 ab.

Abb. 2: Zwei unendlich lange, parallele gerade Leiter durchstossen die (x,y) -Ebene senkrecht in den Punkten $(a,0)$ und $(-a,0)$.

Die Stromstärken seien I_1 und I_2 , die Abstandsvektoren zum Aufpunkt $P(x,y)$ seien \vec{r}_1 und \vec{r}_2 .



Der Strom I_1 erzeugt im Aufpunkt $P(x,y)$ den Feldstärkevektor \vec{B}_1 . Der Betrag von \vec{B}_1 ist umgekehrt proportional zu r_1 , die Richtung ist ein Einheitsvektor senkrecht zu \vec{r}_1 , den man durch eine 90° -Drehung aus \vec{r}_1 erhalten kann.

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-a \end{pmatrix}$$

Die resultierende Feldstärke ist die Vektorsumme der Feldstärken beider Ströme. Da in unserem Fall $I_1 = I_2 = I$ ist, folgt:

$$\vec{B}_{res} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(x-a)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-a \end{pmatrix} + \frac{1}{(x+a)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x+a \end{pmatrix} \right\}$$

Weil die Feldstärkevektoren per Definition Tangenten an die Feldlinien sind, gilt für die Steigung der Feldlinien:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_{res,y}}{B_{res,x}} = \frac{\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2}}{\frac{-y}{(x-a)^2 + y^2} + \frac{-y}{(x+a)^2 + y^2}} = \dots = \frac{1}{y} \left(\frac{2a^2x}{x^2 + a^2 + y^2} - x \right)$$

Offensichtlich stimmen die Differenzialgleichungen für die cassinischen Ovale und die Feldlinien paralleler Ströme überein.

Differenzialgleichung der Feldlinien antiparalleler Ströme

Wir brauchen im Vergleich zum vorangehenden Abschnitt nur ein Vorzeichen bei der Bildung der resultierenden Feldstärke umzudrehen und erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B_{res,y}}{B_{res,x}} = \frac{\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y^2}}{\frac{-y}{(x-a)^2+y^2} - \frac{-y}{(x+a)^2+y^2}} = \dots = \frac{y^2 - x^2 + a^2}{2xy} \Rightarrow$$

$$2xy \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 + a^2$$

Substitution: $z = y^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$ (nach Kamke)

$$x \frac{dz}{dx} = z - x^2 + a^2$$

Die Lösung gewinnt man z.B. über einen Potenzreihenansatz: $z = -a^2 + bx - x^2$

Die Variable b ist ein freier Parameter. Damit erfüllen die Feldlinien die Gleichung

$$y^2 + x^2 - bx = -a^2 \text{ oder}$$

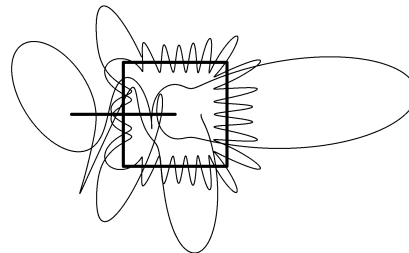
$$y^2 + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a^2$$

Die Feldlinien antiparalleler Ströme sind also eine Schar von Kreisen. Die Kreise sind allerdings nicht konzentrisch, wie man in Abb. 1b) auch leicht sehen kann.

Ausblick

Magnetische Feldlinien müssen keine einfachen, geschlossenen Kurven sein. Es ist möglich, dass Feldlinien in chaotischer Weise ohne Ende um den Leiter kreisen¹. Ein Beispiel, angelehnt an eine aktuelle Publikation², ist in Abbildung 3 zu sehen.

Abb. 3: Teil einer Feldlinie um zwei senkrecht angeordnete, verkettete, quadratische Rahmenspulen.



¹ J. Aguirre and D. Peralta-Salas, "Realistic examples of chaotic magnetic fields created by wires," EPL, **80** (2007) 60007-1-6

² M. Hosoda, T. Miyaguchi, K. Imagawa, and K. Nakamura, "Ubiquity of chaotic magnetic-field lines generated by three-dimensionally crossed wires in modern electric circuits," Phys. Rev. E **80**, 067202-1-4 (2009).