Ein Satz zum geometrischen Mittel zweier Dreiecksseiten

Annina Schmid, Kantonsschule Frauenfeld

Im Artikel „Das Zeichnen der logarithmischen Spirale mit dem Zirkel“ (erschienen in der Ausgabe Nummer 115) bewies Peter Gallin einen Hilfssatz zum geometrischen Mittel zweier Dreiecksseiten mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Als Studentin seiner Vorlesung „Kernideen zum gymnasialen Mathematikunterricht“ lernte ich diesen Hilfssatz kennen und erhielt die Hausaufgabe ihn zu beweisen. Mit etwas Glück stiess ich beim Bearbeiten der Aufgabe auf den Sehnensatz und erkannte, dass sich der Hilfssatz damit recht einfach beweisen lässt. Aus diesem Grund bat mich Peter Gallin zu seinem Artikel den folgenden Nachtrag zu schreiben.

Im erwähnten Artikel wird festgestellt, dass das geometrische Mittel zweier Seiten eines Dreiecks ABC als eine Länge auf der Winkelhalbierenden der beiden Seiten konstruiert werden kann. Wählen wir beispielsweise die Seiten a und b, dann müssen dazu sowohl die innere als auch die äussere Winkelhalbierende der Ecke C konstruiert werden. Die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden mit dem Umkreis bezeichnen wir mit W und Z. Es ist bekannt, dass diese beiden Punkte zusätzlich auf der Mittelsenkrechten der Seite AB liegen. Der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius $|ZA|$ schneidet dann die innere Winkelhalbierende im Punkt G und geht ausserdem auch durch B. (Vergleiche dazu die untenstehende Abbildung.)

Wir können nun zeigen: Das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ der Seiten a und b kann als Länge $g = |CG|$ aus der Konstruktion herausgelesen werden.

Beweis mit Hilfe des Sehnensatzes

Der Beweis ist recht einfach einzusehen, wenn man die zusätzlichen Punkte G' und D einzeichnet. G' liegt auf der Verlängerung von CG und auf dem Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius $|ZA|$. Da die innere und die äussere Winkelhalbierende der Ecke C senkrecht aufeinander stehen, ist G' der Bildpunkt des an CZ gespiegelten Punktes G und es gilt $g = |CG| = |CG'|$. Ausserdem erhält man D indem man die Seite BC soweit um C dreht, bis diese in der Verlängerung von AC zu liegen kommt. Da das Dreieck BCD gleichschenklig ist, ist die äussere Winkelhalbierende der Ecke C die Mittelsenkrechten der Strecke BD. Somit geht der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius $|ZA|$ auch durch den Punkt D, ist also Umkreis des Dreiecks ABD. Der Sehnensatz in diesem Kreis mit den beiden sich in C schneidenden Sehnen AD und GG' impliziert nun $|CG| \cdot |CG'| = |CA| \cdot |CD|$, was gleichbedeutend ist mit $g^2 = ab$. Damit ist $g = \sqrt{ab}$ bewiesen. □