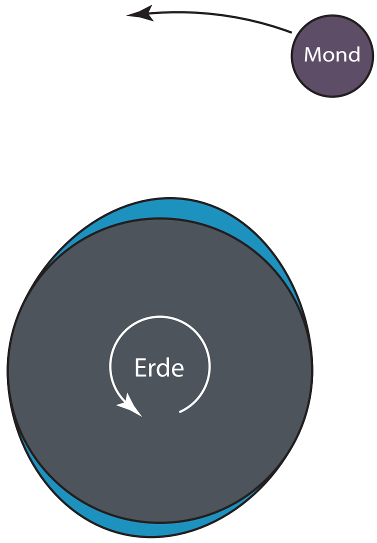
DPK

Der Mond der sich von uns entfernt

Es ist eine Tatsache, dass sich der Mond jedes Jahr um ca. 4cm/Jahr von der Erde entfernt. Dieser Wert kann mit Hilfe des von den Apollo-Missionen auf dem Mond aufgestellten Spiegels und einer Laufzeitmessung eines Lasersignals einfach und genau gemessen werden.

I. Das Modell

Der dem Mond zugewandte Gezeitenhügel entsteht durch die Gravitationskraft des Mondes auf die Erde. Da die Erde schneller rotiert, wird der Schwerpunkt dieses Gezeitenhügels wegen den Reibungskräften etwas aus der Verbindungslinie Mond-Erde gebracht. Die Erde dreht sich unter dem Gezeitenhügel weg. Dieser wirkt wie eine Art Bremsklotz und bremst die Erdrotation ab. Damit sinkt der Drehimpuls der Erde. Der totale Drehimpuls des Systems ist konstant, da kein äusseres Drehmoment wirkt. Das Drehmoment der Sonne auf den Schwerpunkt des Systems verschwindet, da $\vec{F} // \vec{r}$ und das Drehmoment der Sonne auf die Rotationsbewegung des Systems um den Schwerpunkt verschwindet ebenfalls. Somit muss der Drehimpuls des Mondes zunehmen. Das sieht man auch daran, dass die Off-Axis-Gravitationskraft des Gezeitenhügels eine beschleunigende Wirkung auf de Mond hat.



II. Der Endzustand (Stationäre Zustand)

Damit ist auch sofort klar, dass das System auf einen Endzustand hin steuert, denn die Ursache der Bremswirkung liegt in der Differenz der Rotationszeit der Erde (1 Tag) und der Umlaufszeit des Mondes (27.3 Tage, siderisch). Die Bremswirkung verschwindet, sobald die Rotationszeit der Erde exakt gleich der Umlaufszeit des Mondes ist. Dann wird der Mond geostationär sein, und in manchen Gebieten der Erde wird immer Flut und in anderen immer Ebbe sein. Wehe den Mondsüchtigen in dieser Zeit, sie werden, falls sie sich am falschen Ort auf der Erde befinden überhaupt nicht mehr schlafen können.

Es ist nun relativ einfach diesen Endzustand zu berechnen. Er folgt bereits aus der Gleichung für die Drehimpulserhaltung.

Sei:
Ω_0 = aktuelle Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation = $2\pi/86400\,s^{-1}$
ω_0 = aktuelle Winkelgeschwindigkeit des Mondes = $2\pi/(27.3 \times 86400)\,s^{-1}$
Ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation zu einem beliebigen Zeitpunkt t
ω = Winkelgeschwindigkeit des Mondes zu einem beliebigen Zeitpunkt t
ω_E = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation und Mondrotation im Endzustand
M = 6×10^{24} kg = Erdmasse
m = Mondmasse = $M / 81.3$
R = 6'370'000 m = Radius der Erdkugel
$J = \frac{2}{5} MR^2$ = Trägheitsmoment der Erde
r_0 = aktueller Radius der Mondbahn 384'000'000 m

r_E = Radius der Mondbahn im Endzustand
G = Gravitationskonstante = 6.67×10^{-11}Nm^{2}kg^{-2}.

Da der totale Drehimpuls des Systems konstant bleibt, muss die Abnahme des Drehimpulses der Erde gleich sein wie die Zunahme des Drehimpulses des Mondes.

Somit ergibt sich:

$$J(\Omega_0 - \Omega) = m(r^2\omega - r_0^2\omega_0) \qquad \text{(II.1)}$$

Da im Endzustand $\omega_E = \Omega = \omega$ ist, erhalten wir für den Endzustand die Gleichung:

$$J(\Omega_0 - \omega_E) = m(r_E^2\omega_E - r_0^2\omega_0) \qquad \text{(II.2)}$$

Im Endzustand wird der Mond die Erde dann in einer stationären Bahn mit Radius r_E umkreisen. Für diese gilt dann:

$$m\omega_E^2 r_E = \frac{GMm}{r_E^{\,2}} \rightarrow \omega_E = \sqrt{\frac{GM}{r_E^{\,3}}} \qquad \text{(II.3)}$$

Setzen wir (II.3) in (II.2) ein, so erhalten wir schlussendlich die Gleichung:

$$J\left(\Omega_0 - \sqrt{\frac{GM}{r_E^{\,3}}}\right) = m\left(\sqrt{GMr_E} - r_0^2\omega_0\right) \quad \text{(II.4)}$$

Diese Gleichung hat mit den obigen Parametern die Lösung ***r*_E = 592'445 km,** also etwa das 1.5-fache der heutigen Distanz zwischen Erde und Mond. Aus Gleichung (II.3) folgt dann ω_E und der Erdtag ist dann im Endzustand $T_E = \frac{2\pi}{\omega_E}$ = **52.4 heutige Tage** lang.

Natürlich interessiert nicht nur die Mondsüchtigen wann es denn soweit ist. Darum widmen wir uns jetzt der Dynamik, d.h. der zeitlichen Entwicklung des Systems.

III. Dynamik

Um die Dynamik des Systems, d.h. den zeitlichen Verlauf der Funktionen $\omega(t)$ und $\Omega(t)$ zu berechnen, benötigt man nebst der Drehimpulserhaltung (II.1) noch eine zweite Gleichung. Da die radiale Drift des Mondes mit 4cm/Jahr sehr gering ist, kann mit sehr hoher Genauigkeit die Mondbahn innerhalb der Umlaufszeit als kreisförmig approximiert werden. Somit gilt die Beziehung (II.3) in guter Näherung nicht nur im Endzustand, in dem die radiale Drift abgeklungen ist, sondern für jeden Mondumlauf zu einer beliebigen Zeit. d.h.

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2} \rightarrow r(t) = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega(t)^2}} \qquad \text{(III.1)}$$

Somit kann die radiale Drift des Mondes aus $\omega(t)$ berechnet werden.

Die zweite Gleichung kann aus der Bewegungsgleichung der Erdrotation gewonnen werden. Sie lautet:

$$J\dot{\Omega} = M = -FR \qquad \text{(III.2)}$$

Gravitationskraft des Mondes, sowie der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten $\omega(t)$ und $\Omega(t)$. Darum wird folgender Ansatz gemacht:

$$F = k\frac{Gm(\Omega - \omega)}{r^2} \qquad \text{(III.3)}$$

Die Kraft verschwindet, sobald $\Omega = \omega$ ist, im Endzustand eben.

Mit (II.1), (III.1), (III.2) und (III.3) erhalten wir folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\Omega_0 - \Omega(t) = \frac{(GM)^{2/3}m}{J}\left(\omega(t)^{-1/3} - \omega_0^{-1/3}\right)\\
&\dot{\Omega}(t) = -k\frac{G^{1/3}mR}{JM^{2/3}}\left(\Omega(t) - \omega(t)\right)\omega(t)^{4/3} \qquad \text{(III.4)}\\
&\text{mit den Anfangsbedingungen } \Omega(0) = \Omega_0 \text{ und } \omega(0) = \omega_0
\end{aligned}$$

k kann aus der bekannten Rate der radialen Drift $\dot{r}_0 = \dot{r}(0) = 4\text{cm/Jahr}$ wie folgt bestimmt werden:

Durch Ableiten von (III.1) erhält man

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2}\sqrt{GM}\,r^{-5/2}\dot{r} \qquad \text{(III.5)}$$

Ableiten der ersten Gleichung von (III.4) ergibt

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{3J}(GM)^{2/3}m\omega^{-4/3}\dot{\omega} \qquad \text{(III.6)}$$

Setzen wir (III.5) in (III.6) ein erhält man

$$\dot{\Omega} = -\frac{1}{2J}(GM)^{7/6}m\omega^{-4/3}r^{-5/2}\dot{r} \qquad \text{(III.7)}$$

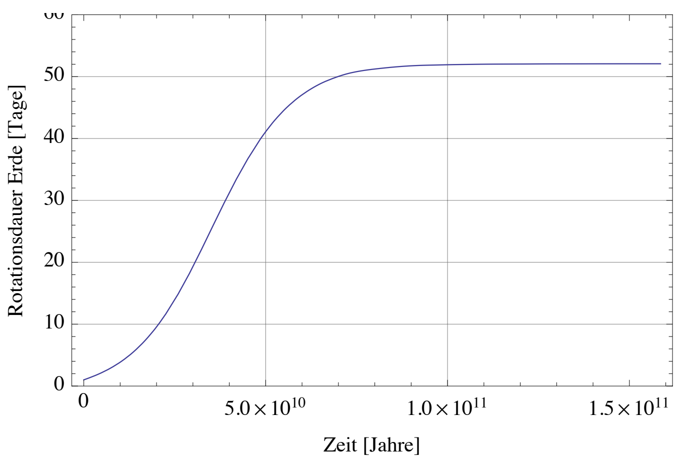
Durch Gleichsetzen mit der zweiten Gleichung von (III.4) bekommt man

$$-k\frac{G^{1/3}mR}{JM^{2/3}}(\Omega - \omega)\omega^{4/3} = -\frac{1}{2J}(GM)^{7/6}m\omega^{-4/3}r^{-5/2}\dot{r} \qquad \text{(III.8)}$$

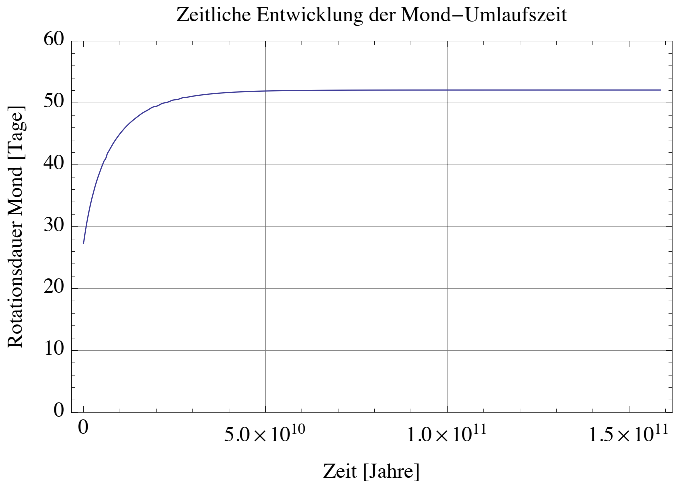
Und daraus folgt schlussendlich

$$k = \frac{G^{5/6}M^{11/6}\omega_0^{-8/3}r_0^{-5/2}}{2R(\Omega_0 - \omega_0)}\dot{r}_0 = 3.19033 \times 10^{18}\text{kgs} \qquad \text{(III.9)}$$

Mit einem Runge-Kutta-Verfahren (Mathematica) kann (III.4) ohne Schwierigkeiten numerisch gelöst werden. Aus der allgemeinen Beziehung $T = 2\pi/\omega$, erhält man für die Entwicklung des Erdtages, sowie die Entwicklung der Umlaufzeit des Mondes als Funktion der Zeit folgende Lösung:

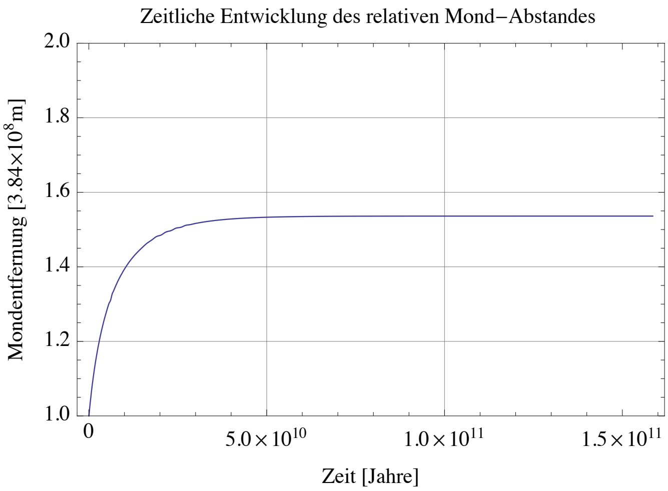


t [Jahre]	T_{Erde}[Tage]
1	1
10	1
100	1
10^3	1
10^4	1
10^5	1.00002
10^6	1.00021
10^7	1.00212
10^8	1.02112
10^9	1.21392
10^{10}	3.85371
10^{11}	51.9182
10^{12}	52.0820



t [Jahre]	T_{Mond}[Tage]
1	27.3
10	27.3
100	27.3
10^3	27.3
10^4	27.3
10^5	27.30040
10^6	27.30430
10^7	27.34250
10^8	27.71710
10^9	30.99030
10^{10}	45.01160
10^{11}	52.08010
10^{12}	52.08200

Die radiale Drift erhält man aus (III.1) und ist als Vielfaches der heutigen Entfernung dargestellt



t [Jahre]	$r(t)/r_0$
1	1
10	1
100	1
10^3	1
10^4	1
10^5	1
10^6	1
10^7	1
10^8	1.00882
10^9	1.08676
10^{10}	1.39380
10^{11}	1.53614
10^{12}	1.53618

Nach der obersten Grafik wird der Endzustand in etwa 100 Mrd. Jahren erreicht. An der untersten Grafik sieht man, dass die radiale Driftgeschwindigkeit stets abnimmt. Der Mond ist bereits nach ca. 20 Mrd. Jahren praktisch in seiner Endposition, im etwa 1.5-Fachen der heutigen Entfernung. Das entspricht einer durchschnittlichen Driftgeschwindigkeit von

52 heutige Erdtage lang. Bereits in 420 Mio. Jahren dauert der Tag eine Stunde länger, und in 4.2 Mrd. Jahren dauert er doppelt so lange wie heute. Aus den Tabellen können weitere Details entnommen werden.

In diesen fernen Zeiten werden die nächtlichen Parties immer länger und länger, und das menschliche Wesen wird sich wohl in dieser Richtung weiterentwickeln müssen, um die 26-tägigen Nächte durchzufeiern. Mit mehreren Milliarden Jahren hat die Evolution jedoch genügend Zeit, die bereits heute beobachtbaren Ansätze weiter zu mutieren.
Bleibt nur zu hoffen, dass wir die bis dahin rund 1000 zu erwartenden katastrophalen Kometeneinschläge besser überstehen als die Dinosaurier.

Ried-Brig, 08. 01. 2012 , Geburtstag meiner Tochter Karin

Werner Volken