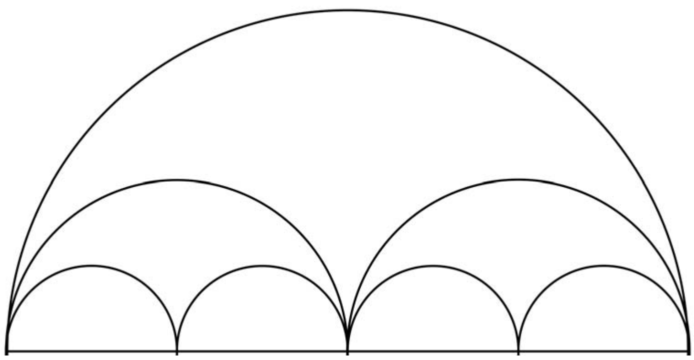
Aha! Mathematik! – Teil IV.
Klein-Archimedes berechnet π.

Urs Stammbach

Archimedes minor, heute Klein-Archimedes genannt, hatte viel Gutes von seinem grossen Namensvetter gehört. Besonders die Art und Weise, wie Archimedes die Zahl π approximativ bestimmte, hatte ihn nachhaltig beeindruckt; es ist ja tatsächlich staunenswert, dass mehr als 2000 Jahre später der Archimedische Wert von $3\frac{1}{7}$ immer noch benützt wird. Ganz klar, Klein-Archimedes wollte in dieser Sparte eine ähnlich grosse Tat vollbringen. Er wusste natürlich, dass die Verhältniszahl zwischen Umfang U und Durchmesser d eines Kreises unabhängig von der Grösse des Kreises ist: $U = \pi \cdot d$. Das hatte ja ebenfalls sein Vorbild Archimedes gezeigt. Aber dessen nachfolgende Überlegungen, diese Verhältniszahl mit Hilfe von ein- und umbeschriebenen regelmässigen Vielecken zu berechnen schien ihm denn doch etwas kompliziert. Klein-Archimedes schwebte Einfacheres vor. Entspannt im Bade liegend machte er sich die folgenden Überlegungen. Man hatte heute morgen in der Mathematikstunde eine interessante Übungsaufgabe gelöst, die möglicherweise seinen Zwecken diente. Wie war das genau:

Man betrachtet einen Halbkreis, Durchmesser d; die Länge des Halbkreises ist $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d$. Man halbiere d und zeichne über jeder Hälfte wiederum einen Halbkreis. Jeder dieser Halbkreise hat die Länge $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{d}{2}$. Es folgt:

Die Summe der Längen der beiden kleinen Halbkreise ist gleich der Länge des grossen Halbkreises.



So lautete in der heutigen Mathematikstunde das Resultat der Übungsaufgabe. Klein-Archimedes überlegte sich: Wenn man dieses Verfahren wiederholt, indem man über jedem Viertel des Durchmessers des ursprünglichen Halbkreises je wieder einen Halbkreis zeichnet, so ist nach obigem die Summe der Längen der *vier* kleinen Halbkreise gleich der Länge des ursprünglichen grossen Halbkreises.

Und nun kann man dieses Verfahren sukkzessive in der gleichen Art wiederholen! Bei diesem unendlich wiederholten Prozess strebt dann offenbar jeder Punkt der aus Halbkreisen zusammengesetzten Kurve gegen einen Punkt des Durchmessers. Die Limeskurve fällt also mit dem Durchmesser des ursprünglichen Halbkreises zusammen. Die Summe der Längen der einzelnen Halbkreise ändert sich bei den einzelnen Schritten nicht, sie bleibt immer $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d$. Die Länge der Limeskurve ist deshalb ebenfalls $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d$. Aber andererseits ist die Limeskurve gerade der Durchmesser des ursprünglichen Halbkreises, und dessen Länge ist d.

Es ergibt sich so offenbar die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot d = d \ .$$

Also folgt $\pi = 2$.

Klein-Archimedes verzichtete darauf, *Heureka!* zu rufen; er fand, das sei nicht mehr ganz zeitgemäss. Trotzdem stieg er schleunigst aus der Badewanne und machte sich daran, seine Überlegungen aufzuschreiben. So ganz wohl war ihm bei der Sache allerdings nicht, denn so stark konnte sich doch sein älterer Namensvetter nicht geirrt haben! Da musste er selber bei seinen Überlegungen einen Fehler gemacht haben; den galt es zu finden! Aber wo lag er? Intensiv brütete er über seinen Papieren, und wenn ihn Kameraden stören wollten, lag ihm das *Noli turbare circulos meos* zuvorderst auf der Zunge, auch wenn *seine* Kreise nur Halbkreise waren!

Er brauchte Hilfe! Er fand sie bei seinem älteren Bruder, der eben begonnen hatte, Mathematik zu studieren. Hier lernte er dann: Die Länge einer gekrümmten Kurve ist mathematisch mit Hilfe von Streckenzügen definiert, die Punkte der Kurve durch Strecken, also durch *Geraden*stücke verbindet. In einem mathematisch korrekten Vorgehen muss eine Folge derartiger Streckenzüge herangezogen werden, bei der das Maximum der Länge der einzelnen Strecken gegen Null strebt. Die Länge der Kurve ist dann definiert als Grenzwert der Summe der Längen der einzelnen Strecken. So ging damals auch der grosse Archimedes vor; er approximierte die Kreislinie durch den Umfang von ein- und umbeschriebenen regelmässigen Vielecken. Dieses Vorgehen war mathematisch korrekt. Klein-Archimedes hingegen hat in mathematisch unerlaubter Weise den Streckenzug durch eine aus einzelnen Halbkreisen bestehende Kurve ersetzt. Im Grenzübergang hat er mit einer derartigen Kurve den Kreisdurchmesser approximiert und so dessen Länge "bestimmt". Das war sein Fehler! – Wenn Klein-Archimedes ebenso berühmt werden will wie sein grosser Namensvetter, so wird er wohl noch andere, bedeutendere Leistungen zu vollbringen haben.

Zu Archimedes, sowohl zu seiner Biographie wie auch zu den hier angedeuteten Legenden, vergleiche man die Internetseiten:

http://de.wikipedia.org/wiki/Archimedes
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes.html