DPK

Zähmen der Unendlichkeit

Martin Lieberherr, Andreas Vaterlaus, Clemens Wagner, ETH Zürich
limartin@ethz.ch, clemens.wagner@phys.ethz.ch, vaterlaus@phys.ethz.ch

Einführung

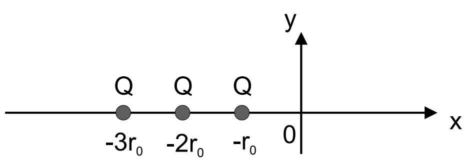
Einige Eltern vermuten bei ihrem Nachwuchs ein unendliches Potential und schicken ihn sogleich aufs Gymnasium. Die Mittelschulen wenden dann eine Technik namens „Renormierung" an, welche zeigt, dass dieses Potential meist eine Frage des Blickwinkels ist. Von einem analogen, elektrostatischen Problem soll hier die Rede sein.

Wir stiessen auf das Problem, als wir Aufgaben im Rahmen des produktiven Übens entwarfen. Die Idee des produktiven Übens stammt aus der Mathematik, wo man versucht, das drillmässige Lösen von unabhängigen Aufgaben zu ersetzen durch verknüpfte Aufgaben, die eine Gesetzmässigkeit beinhalten (1). Die Schülerinnen und Schüler sollen nach der Gesetzmässigkeit suchen und dabei gar nicht mehr realisieren, dass die Aufgabe eigentlich einen anderen Zweck verfolgt. Ein weiterer Vorteil ist, dass Resultate, die nicht der Gesetzmässigkeit entsprechen, identifiziert werden können. Die Schülerinnen und Schüler beginnen automatisch ihre Resultate zu reflektieren (2).

Wir versuchten, das Prinzip „produktives Üben" auf Physikaufgaben, insbesondere aus der Elektrostatik, zu übertragen. Die Idee war, auf der x-Achse in regelmässigen Abständen Punktladungen zu platzieren und die elektrische Feldstärke oder das elektrische Potential im Nullpunkt zu bestimmen. Der interessante Fall ist der, bei dem die Anzahl Ladungen nach unendlich geht. Da die elektrische Feldstärke quadratisch mit der Distanz abnimmt ($E \propto 1/r^2$), ist klar, dass die Summe der Feldstärken am Nullpunkt konvergiert. Betrachtet man jedoch das elektrische Potential, welches umgekehrt proportional mit der Distanz abfällt ($\varphi \propto 1/r$) dann divergiert diese Reihe. Dies scheint ein Widerspruch zu sein, denn wir wissen, dass die Feldstärke der negative Gradient des Potentials ist. Wie berechnet man die Feldstärke, wenn das Potential unendlich ist? Wir wollen nun zeigen, wie man diesen vermeintlichen Widerspruch auflöst, indem man den Nullpunkt des Potentials geeignet wählt.

Problem

Die Aufgabe baut man auf, indem man zuerst eine Ladung bei $-r_0$ platziert und das elektrische Feld im Nullpunkt bestimmen lässt. In der nächsten Teilaufgabe setzt man eine weitere Ladung bei $-2r_0$ und lässt wiederum das elektrische Feld im Nullpunkt berechnen. Anschliessend lässt man die Aufgabe für n Ladungen an den Punkten $-r_0$, $-2r_0$, ..., $-(n-1)r_0$, $-nr_0$ bestimmen (siehe **Figur 1**).



Figur 1: Problem der Ladungskette. Die Punktladungen haben alle denselben Wert Q und sind an den Positionen $x = -r_0$, $-2r_0$, $-3r_0$ usw. Es soll das elektrische Potential und die elektrische Feldstärke im Nullpunkt des Koordinatensystems berechnet werden.

Zuletzt lässt man, wie oben erwähnt, die Anzahl n der Ladungen gegen unendlich gehen. Für die elektrische Feldstärke erhält man (3)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_0^{\,2}} + \frac{Q}{(2r_0)^2} + \frac{Q}{(3r_0)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0^2}\frac{\pi^2}{6}$$

Die unendliche Reihe für die Feldstärke konvergiert. Analog hätte die Reihe für das elektrische Potential im Nullpunkt folgendes Aussehen

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_0} + \frac{Q}{2r_0} + \frac{Q}{3r_0} + \cdots\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right)$$

Die Summe stellt die harmonische Reihe dar, die bekanntlich divergiert. Wie ist es möglich, dass das Potential divergiert, die elektrische Feldstärke jedoch endlich ist? Physikalisch muss es einen Ausweg geben, denn wo eine Feldstärke ist, ist auch ein Potential.

Lösung
Das elektrische Potential ist nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Um sie zu geeignet auszusuchen, benutzen wir die bekannte Beziehung (4)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + .. + \frac{1}{n} - \ln(n)\right) = \gamma\,.$$

Die Zahl γ = 0.57721.. heisst Euler-Mascheroni Konstante. Der Trick besteht nun darin, von der n-ten Partialsumme den Wert $\ln(n)$ zu subtrahieren. Wir schreiben das elektrische Potential neu

$$\phi_n(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln(n)\right).$$

Offensichtlich können wir nun das Potential für $n \to \infty$ bestimmen

$$\varphi(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln(n)\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\gamma.$$

Das scheinbare Problem ist also gelöst, denn bei passender Normierung bleibt das elektrische Potential endlich.

Kontrolle
Nun möchten wir noch zeigen, dass man tatsächlich über die Ableitung des Potentials die elektrische Feldstärke erhält. Dazu müssen wir das Potential auch in der Umgebung des Nullpunktes (bei x) kennen. Mit der Abkürzung $z = x/r_0$ wechseln wir auf dimensionslose Zahlen.

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_0 + x} + \frac{Q}{2r_0 + x} + \cdots + \frac{Q}{nr_0 + x}\right), \quad x > -r_0$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2+z} + \cdots + \frac{1}{n+z}\right), \quad z = \frac{x}{r_0} > -1$$

Auch diese Reihe divergiert für alle festen z für $n \to \infty$. Die Partialsumme lässt sich durch die so genannte Digamma-Funktion ψ^0 ausdrücken. Die Digamma-Funktion hat folgende Eigenschaften (5)

$$\psi^0(z) = \frac{\frac{d\,\Gamma(z)}{dz}}{\Gamma(z)} \qquad \psi^0(z) = \ln(z) - \frac{1}{2z} - \ldots \quad (z \to \infty)$$
$$\psi^0(1) = -\gamma \qquad \psi^1(z) = \frac{d\psi^0(z)}{dz}$$
$$\psi^0(n+1+z) = \frac{1}{n+z} + \frac{1}{n-1+z} + \frac{1}{n-2+z} + \ldots + \frac{1}{1+z} + \psi^0(1+z)$$

Dass sie auftritt und mit der bekannteren Gammafunktion $\Gamma(z)$ verwandt ist, verwundert nicht, denn sie ist bei allen negativen, ganzen Zahlen (bei den Positionen der Ladungen) nicht definiert. Mit Hilfe der Digamma-Funktion lässt sich die n-te Partialsumme folgendermassen schreiben:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\left(\psi^0(n+z+1) - \psi^0(z+1)\right),$$

Für grosse n nähert sich das Potential asymptotisch dem Ausdruck

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\left(\ln(n) - \psi^0(z+1)\right),$$

Subtrahierten wir also wie vorher $\ln(n)$ von $\varphi_n(z)$ und lassen dann, für ein festes z, n gegen unendlich gehen, so erhält man

$$\phi(z) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\psi^0(z+1).$$

Nun können wir unser Resultat für den Nullpunkt überprüfen. Für das elektrische Potential am Nullpunkt erhält man

$$\phi(0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\psi^0(1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\gamma\,,$$

Die elektrische Feldstärke ist der negative Gradient des Potentials

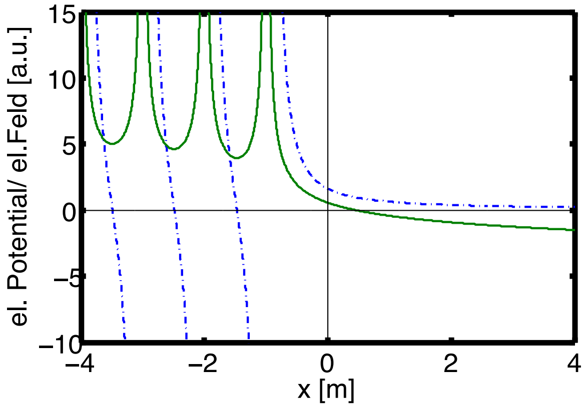
$$E(x) = -\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_0}\psi^1(z+1)\frac{dz}{dx}\,.$$

Mit $\psi^1(1) = \frac{\pi^2}{6}$ (5) erhält man für die elektrische Feldstärke

$$E(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r_0^2} \frac{\pi^2}{6}$$

in Übereinstimmung mit dem obigen Resultat.

Der Verlauf des elektrischen Potentials und des elektrischen Feldes lässt sich numerisch einfach bestimmen (Figur 2).



Figur 2: Das elektrische Potential (ausgezogene Linie) und die Feldstärke (gestrichelte Linie) einer langen Ladungskette auf dem negativen Ast der *x*-Achse. Zur numerischen Berechnung wurden 500 Ladungen benutzt und die Distanz zwischen den Ladungen betrug r_0 = 1 m. Die Vorfaktoren des elektrischen Potentials und der elektrischen Feldstärke wurden 1 gesetzt, so dass das Potential und die Feldstärke die vertikale Achse ungefähr bei γ und bei $\pi^2/6$ kreuzen.

Diskussion

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, das elektrische Potential im Nullpunkt einer unendlich langen Kette von äquidistanten, identischen Punktladungen auf dem negativen Ast der *x*-Achse zu bestimmen. Die Lösung führt über die harmonische Reihe, die bekanntlich divergiert. Zähmen kann man das Potential indem man die asymptotische Entwicklung der Reihe studiert und den geeigneten Term ln(n) von der Summe subtrahiert; indem man also die Freiheit ausnützt, dass ein elektrisches Potential nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

Referenzen

1. Leuders T. Intelligent üben und Mathematik erleben. In: Leuders T, Hefendehl-Hebeker L, Weigand H-G, editors. Mathemagische Momente. Berlin: Cornelson; 2009. p. 130 -43.
2. Leuders T, Holzäpfel L. Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. Unterrichtswissenschaft. 2011;39:213 - 30.
3. Bronstein I, Semedjajew K, Musiol G, Mühlig H. Taschenbuch der Mathematik. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch; 2008.
4. DMK-DPK-DCK. Formeln-Tabellen-Begriffe. Zürich: Orell Füssli Verlag; 2009.
5. Weisstein EW. Polygamma Function. Available from: http://mathworld.wolfram.com/PolygammaFunction.html