Aha! Mathematik! – Teil V.

Nicht nur Schüler und Schülerinnen, auch grosse Mathematiker können irren.

Urs Stammbach

Das hier beschriebene Beispiel[1] geht auf Hermann Amandus Schwarz zurück, siehe *Sur une définition erronée de l'aire d'une surface courbe*. Die kleine Arbeit ist abgedruckt in H.A. Schwarz: Gesammelte Abhandlungen, Band 2, S. 309-311. Es handelt sich dabei eigentlich um einen Brief, den Schwarz an Charles Hermite gerichtet hatte. Hermite reproduzierte den Brief wenig später in der zweiten Auflage seines eigenen Lehrbuches über Differential- und Integralrechnung.

In seinem berühmten und vielbenützten Buch *Cours de calcul différentiel et intégral* von 1868 hatte Joseph A. Serret für den Flächeninhalt eines gekrümmten Flächenstücks die folgende Definition gegeben (siehe Tome second p. 296):

Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C; nous nommerons aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrale inscrite formée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal Γ ayant pour limite le contour C.

Man soll also das Flächenstück triangulieren, die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke bilden und in einem Grenzprozess die Triangulation immer feiner und feiner werden lassen. Dann definiere der Limes der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke den Flächeninhalt des Flächenstücks.

Zweifellos würden alle Laien und auch viele Mathematikstudierende diese Definition als richtig ansehen. Wie H.A. Schwarz aber an Hand eines Gegenbeispiels zeigte, ist diese Definition nicht gangbar; je nach Wahl der Triangulierungen kann sie nämlich für den Flächeninhalt eines Flächenstücks verschiedene Werte liefern. Schwarz wählt für sein Beispiel eine denkbar einfache gekrümmte Fläche, nämlich einen Kreiszylinder! Da ein Kreiszylinder in die Ebene abrollbar ist, lässt sich der Flächeninhalt auch elementar angeben. Aber hier soll das Verfahren von Serret verwendet werden.

Es seien x, y, z die kartesischen Koordinaten eines Punktes, u, v zwei Parameter, r, h zwei Konstanten und m, n, a ganze positive Zahlen. Man setze

$$x = r\cos u\ , y = r\sin u\ ,\ z = v$$

mit $0 \leq u \leq 2\pi$ und $0 \leq v \leq h$. Damit wird ein Zylinder vom Flächeninhalt $2\pi rh$ beschrieben. Man beschreibe diesem Zylinder wie folgt ein Polyeder mit $4mn$ Dreiecken ein:

[1] Mathematisch stellt dieser Text etwas grössere Anforderungen als die bisherigen. Er ist deshalb eher für Lehrer und Lehrerinnen geeignet als für die Schüler und Schülerinnen.

1. Die Ecken der Dreiecke sind gegeben durch, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$

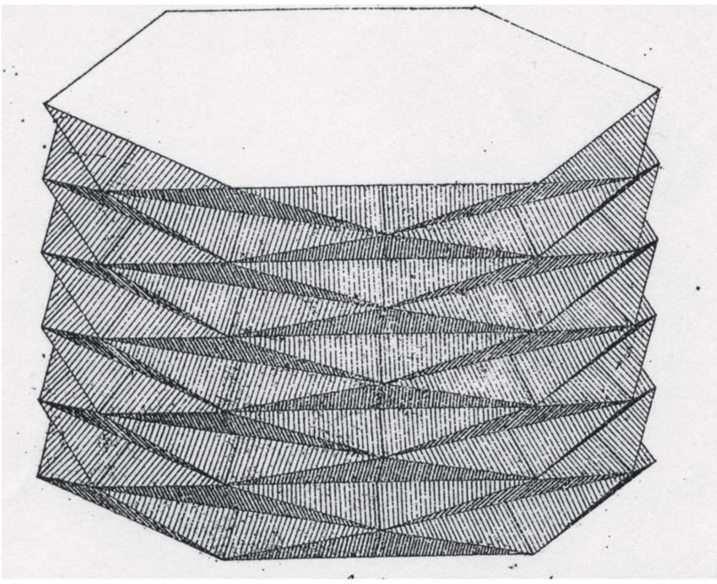
$$u = u' = \frac{2\mu\pi}{m} a \ , \ v = v' = \frac{\nu h}{n}$$

und, $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$u = u'' = \frac{(2\mu+1)\pi}{m} a \ , \ v = v'' = \frac{(2\nu+1)h}{2n}$$

2. Alle Dreiecke sind gleichschenklig und unter sich kongruent.

3. Die Basislinien der Dreiecke liegen in den Ebenen $z = v'$ und $z = v''$.



Die Basis jedes Dreiecks hat die Länge

$$2r \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)$$

und die Höhe hat die Länge

$$\sqrt{r^2 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]^2 + \left(\frac{h}{2n}\right)^2} \ .$$

Mit Hilfe der einfachen trigonometrischen Umformung $1 - \cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$ ergibt sich der Flächeninhalt S des einbeschriebenen Polyeders zu

$$S = (4mnr) \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sqrt{4r^2 \sin^4\left(\frac{\pi}{2m}\right) + \left(\frac{h}{2n}\right)^2} \ .$$

Daraus schliesst man:

1. Setzt man $n = am$, so hat man als Limes den Wert $S = 2r\pi h$.

2. Setzt man $n = am^2$, so hat man als Limes den Wert $S = 2r\pi\sqrt{a^2r^2\pi^2 + h^2}$. Je nach Wahl von a ist somit dieser Limes beliebig gross.

3. Setzt man $n = am^3$, so stellt man fest, dass das m-te Glied der Folge grösser ist als

$$8r^2m^4 \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right) \ .$$

Dieser Wert ist für genügend grosses m beliebig gross, so dass in diesem Fall der Limes gar nicht existiert.

Je nach Wahl der Triangulierungen nimmt also der in der Definition von Serret beschriebene Limes verschiedene Werte an. Dies bedeutet, dass der Flächeninhalte einer gekrümmten Oberfläche nicht auf die von Serret vorgeschlagene Art definiert werden kann.

Zu den hier genannten Mathematikern vergleiche man die folgenden Internetseiten:

http://de.wikipedia.org/wiki/Joseph_Serret
http://de.wikipedia.org/wiki/Charles_Hermite
http://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Amandus_Schwarz