Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 1

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

Stellen Sie sich zur Einstimmung in den dritten Teil dieser kleinen Reihe[1] über Schwingungsphänomene einen *Massenpunkt* vor, der sich entlang einer Geraden g bewegt, wobei drei Kräfte auf ihn wirken, siehe Abbildung 1:

a) eine *Federkraft*, die ihn stets in Richtung eines Punktes O auf g zieht und nur von der Distanz von O abhängt

b) eine *Anregungskraft*, deren Wirkung nur vom Zeitpunkt t abhängt, zu dem sie am Massenpunkt angreift

c) eine *Reibungs-* oder *Dämpfungskraft*, die die Bewegung hemmt und lediglich von der Geschwindigkeit abhängt, mit der sich der Massenpunkt auf g bewegt.

Denken Sie sich die Gerade g mit einem Koordinatensystem versehen mit O als Nullpunkt. Es bezeichne $x(t)$ die Koordinate des Orts, an dem sich der Masssenpunkt zum Zeitpunkt t befindet[2], $\dot{x}(t)$ seine Geschwindigkeit und $\ddot{x}(t)$ seine Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt. Dann gilt nach *Newtons Grundgesetz der Bewegung*

$$m\,\ddot{x} = -F(x) + A(t) - R(\dot{x}) \tag{1}$$

Zur Vereinfachung der Notation wird x statt $x(t)$, $\dot{x}$ statt $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}$ statt $\ddot{x}(t)$ geschrieben. m bezeichnet die Masse des Massenpunkts, F die immer gegen den Nullpunkt O gerichtete Federkraft[3], A die Anregung und R die Reibung.

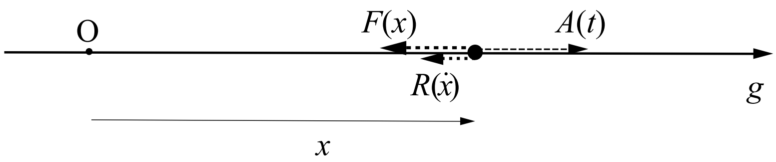

Abbildung 1: Zur Differenzialgleichung (1), (2).

Dividiert man die Gleichung (1) durch m und stellt sie etwas um, lautet sie unter Verwendung der Bezeichnungen $f = F/m$, $r = R/m$, $a = A/m$

$$\ddot{x} + r(\dot{x}) + f(x) = a(t) \tag{2}$$

Obwohl es sich bei (2) lediglich um eine einzige Differenzialgleichung 2. Ordnung (für die Unbekannte $x = x(t)$) handelt muss man feststellen, dass die Mathematik zur Zeit meilenweit davon entfernt ist, die durch (2) gestellte Aufgabe auch nur halbwegs vollständig zu lösen. Genau genommen ist nicht einmal recht klar, worin die "Lösung der Aufgabe" überhaupt bestehen könnte ...

[1] Teil I mit dem Titel "Schwingungen I oder Wenn der Vater mit dem Sohn ..." ist im Heft 128, p. 24-30, Teil II mit dem Titel "Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol" ist im Heft 129, p. 10-19 dieses Bulletins erschienen.

[2] x wird *Auslenkung* des Massenpunkts genannt.

[3] Man sagt auch *rücktreibende* Kraft.

2

Es gibt allerdings eine Situation, in der sogar *Lösungsformeln* zu Verfügung stehen: Wenn die Funktionen f und r linear sind, wenn also an eine *lineare Feder*[4] und an *lineare Dämpfung* gedacht wird. Hinsichtlich der *Anregung* a ist der Fall einer *periodisch einwirkenden Kraft* von besonderem Interersse. Hier bietet sich als einfachster Fall eine *harmonisch wirkende Kraft* an. Die Differenzialgleichung (2) lautet dann

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + \omega^2 x = K\cos(\Omega t) \tag{3}$$

mit positiven Zahlen d, ω, K, Ω. Durch geeignete Skalierung von Zeit und Auslenkung gelingt es zu erreichen, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\omega = 1$ und $K = 1$ setzen kann:

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + x = \cos(\Omega t) \tag{4}$$

wobei d und Ω weiterhin positive Zahlen bezeichnen.

Die Leserinnen und Leser kennen Gleichung (4) wahrscheinlich aus der Analysis- oder einer einführenden Physik-Vorlesung. Im Rest dieses, und im folgenden Abschnitt wird an die wichtigsten Ergebnisse zu dieser Gleichung erinnert. Gleichung (4) stellt ein *lineares* und *inhomogenes* Problem dar. Die *allgemeine Lösung* einer solcher Aufgabe besteht bekanntlich aus der Summe der *allgemeinen Lösung* der zugehörigen *homogenen Gleichung*

$$\ddot{x} + 2d\dot{x} + x = 0 \tag{5}$$

und einer *partikulären*, also einer einzigen *Lösung* des *inhomogenen Problems* (4). Die allgemeine Lösung $x_h(t)$ von (5) lautet, siehe Teil II dieser Artikelserie – und dort die Gleichungen (3), (4):

$$x_h(t) = e^{-d\,t}[c_1\cos(\sigma t) + c_2\sin(\sigma t)],\ \ \sigma := \sqrt{1-d^2} \tag{6}$$

falls $d \in [0,1)$ gilt. c_1, c_2 bezeichnen beliebige Konstanten. Im Fall $d > 1$ verschwinden die oszillatorischen Terme und die allgemeine Lösung von (5) lautet

$$x_h(t) = e^{\lambda_1 t}c_1 + e^{\lambda_2 t}c_2 \tag{7}$$

mit $\lambda_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2-1} < 0$. Weil $d > 0$ gilt, streben alle Lösungen $x_h(t)$ des homogenen Problems (5) für $t \to \infty$ gegen 0, spielen also hinsichtlich des *Langzeitverhaltens der Lösungen* von (4) keine Rolle: Sie sind *transient*, werden *ausgedämpft*, wie man sagt.

Eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* Gleichung (4) erhält man mit Hilfe des “Ansatzes”

$$\begin{aligned} x(t) &= V\cos(\Omega t - \phi) \\ &= V\cos(\Omega t)\cos\phi + V\sin(\Omega t)\sin\phi \end{aligned} \tag{8}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten V und ϕ. In (4) einsetzen und Koeffizientenvergleich bezüglich $\cos(\Omega t)$ und $\sin(\Omega t)$ durchführen liefert das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V(1-\Omega^2)\cos\phi + 2dV\Omega\sin\phi &=& 1 \\ V(1-\Omega^2)\sin\phi - 2dV\Omega\cos\phi &=& 0 \end{array} \right. \tag{9}$$

Quadrieren und addieren der beiden Gleichungen ergibt:

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4d^2\Omega^2}} =: V(\Omega, d) \tag{10}$$

[4] Man sagt auch *Hooke'sche* Feder. Nach Robert *Hooke* (1635-1703). Mehr über seine Beziehzung zu Newton, dessen “Kurator” Hooke in der Royal Society war, siehe [1].

Nach Division der beiden Gleichungen in (9) durch V und Auflösen nach $\cos\phi$, $\sin\phi$ findet man:

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \frac{1-\Omega^2}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4d^2\Omega^2}} \\ \sin\phi &= \frac{2d\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4d^2\Omega^2}} \end{aligned} \tag{11}$$

und daraus

$$\tan\phi = \frac{2d\Omega}{1-\Omega^2} \tag{12}$$

3

Was ist die *Quintessenz* aus den Formeln des letzten Abschnitts? Durch die Gleichung (5) wird, in der Terminologie der Mechanik, ein *Schwinger*, also ein *schwingungsfähiges System* definiert, das – wenn es sich selbst überlassen ist – im Laufe der Zeit immer mehr zur Ruhe kommt. Mit dem Term $\cos(\Omega t)$ auf der rechten Seite von (4) wird jedoch von aussen in das Systems eingegriffen und ihm ein *periodischer Takt aufoktroyiert*.

Die Mathematik verrät, wie der Schwinger auf diese "Zumutung" reagiert: Er ordnet sich dem Taktgeber unter, er fügt sich ihm, er lässt sich *versklaven*[5]. In der Technik spricht man von einer *erzwungenen* Schwingung: Bis auf einen Anteil der homogenen Gleichung (5), der sich jedoch im Laufe der Zeit ausdämpft, lautet die "Antwort des Systems"[6] auf das *Eingangssignal*[7] $\cos(\Omega t)$

$$x(t) = V(\Omega, d)\cos(\Omega t - \phi(\Omega, d)) \tag{13}$$

(siehe (8), (10), (11), (12)). Die Systemantwort ist also nicht nur periodisch mit gleicher Periode $T := 2\pi/\Omega$ wie das Eingangssignal, sondern sogar ebenfalls harmonisch. Allerdings ist die Systemantwort gegenüber dem Eingangssignal um die Zeit $\phi(\Omega, d)/\Omega$ *verspätet*, *phasenverschoben*, wie man sagt. Abbildung 2 zeigt die "Verspätung" in Abhängigkeit der Frequenz Ω des Eingangssignals.

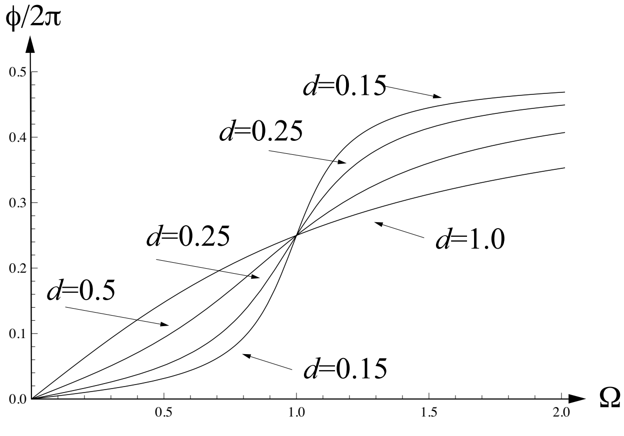

Abbildung 2: Grafische Darstellung von $\phi(\Omega, d)/2\pi$, also der zeitlichen "Verspätung" $\phi(\Omega, d)/\Omega$ der Systemantwort gegenüber der Anregung, gemessen in der Periode $T = 2\pi/\Omega$ der Anregung als Einheit – für verschiedene Werte von d.

Interessant und von praktischer Bedeutung ist die *Amplitude* des Ausgangssignals im Verhältnis zur Amplitude des Eingangssignal, welche in (4) durch Skalierung auf 1 normiert ist. Abbildung 3 zeigt sie

[5] Der Begriff stammt von H. Haken.
[6] Kurz: die *Systemantwort*, auch *Ausgangssignal* oder *Output* genannt.
[7] Auch *Input* genannt.

in Abhängigkeit von der Frequenz Ω des Eingangssignals. Eine leichte Rechnung ergibt, dass $V(\Omega, d)$ das Maximum an der Stelle

$$\Omega_{max} = \sqrt{1 - 2d^2} \tag{14}$$

annimmt und dort den Wert

$$V_{max} = 1/2d\sqrt{1 - d^2} \tag{15}$$

hat.

Der *freie* Oszillator (5) schwingt mit (Kreis-)Frequenz $\sqrt{1 - d^2}$. Gemäss (14) ist die Amplitude der *erzwungenen* Schwingung maximal, wenn die (Kreis-)Frequenz Ω der Anregung bei $\Omega_{max} = \sqrt{1 - 2d^2}$ liegt. Die maximale Ampltude V_{max} der erzwungenen Schwingung ist gemäss (15) umso grösser, je kleiner die Dämpfung d ist. Im "Grenzfall" $d = 0$ gilt gar $V_{max} = \infty$. Dieses Phänomen wird manchmal als (lineare) *Resonanz* bezeichnet.

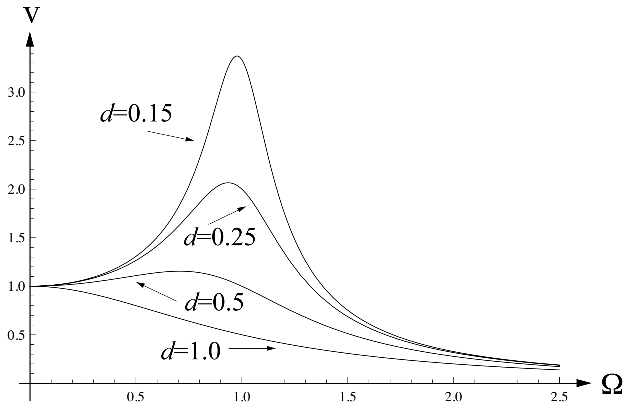

Abbildung 3: Grafische Darstellung der Funktion $V = V(\Omega, d)$ aus (10) für verschiedene Werte von d.

Abbildung 3 zeigt, dass der Schwinger (4) das Eingangssignal[8] je nach dem Wert der Dämpfungskonstanten d *verstärken* oder *abschwächen* kann. Der Schwinger (4) kann also je nachdem als *Verstärker* oder als *Schwingungsilger* wirken. Ob Verstärkung *erwünscht*, oder *gefürchtet* ist, hängt von der Situation ab: Wenn ein schwaches Signal verstärkt werden soll, ist Verstärkung offensichtlich gewollt. Wenn hingegen zum Beispiel ein Fundament durch einen darauf montierten Motor beim Anfahren zum Schwingen angeregt wird, wird man alles daran setzen möglichen Schaden, den eine Verstärkung hervorrufen kann, zu vermeiden. Etwa indem man Ω beim Hochfahren des Motors rasch durch den kritischen Bereich um Ω_{max} "hindurchfährt", sodass sich die Schwingung mit der grossen Amplitude V_{max} gar nicht ausbilden kann.

Aus rein mathematischer Sicht kann man sagen: *Die Differenzialgleichung* (4) *hat die periodische Lösung* (8). *Alle anderen Lösungen der Gleichung streben für* $t \to \infty$ *gegen* (8). In der Sprechweise der Dynamischen Systeme nennt man eine solche periodische Lösung einen *globalen Attraktor*.

4

Martin Lieberherr, dessen Artikel [4] diese kleine Serie von Beiträgen über Schwingungen ja angeregt hat, hat in seinem Beitrag die sogenannte *Duffing-Gleichung* erwähnt und bereits einige ihrer Aspekte angesprochen. Die Duffung-Gleichung ist eine "*nichtlineare*" Variante von (3), (4).

[8] Es ist $\cos \Omega t$, hat also Amplitude 1.

Wie in [4] vermerkt, war Georg Duffing (1861-1944) ein deutscher Ingenieur. 1918 hat er beim Verlag Vieweg ein schmales Bändchen im Umfang von 134 Seiten veröffentlich, [2], das seine theoretischen und experimentellen Untersuchungen zum Thema "Schwingungen" beinhaltet. Motiviert worden war Duffing durch die Praxis. Zu Beginn des Vorworts schreibt er, dass er an (laufenden) Maschinen beobachtet habe, wie sich "*periodische Bewegungszustände*" eingestellt hätten. Und er hat sich offenbar vorgenommen, sie zu untersuchen.

Wie schon der Titel seines Buches verrät, siehe [2], geht es Duffing darum, *erzwungene Schwingungen* in einem schwingenden System verstehen zu lernen, dessen *Eigenfrequenz "veränderlich"* ist, wie er sagt. Gemeint ist, dass die Eigenfrequenz des zu Grunde liegenden freien Schwingers von der Amplitude abhängt. Illustriert wird dieses Phänomen zum Beispiel durch den Vergleich der Gleichung des *harmonischen Oszillators*

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \tag{16}$$

mit der Gleichung eines (mathematischen) Pendels[9]

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0 \tag{17}$$

Während *alle* Lösungen von (16) periodisch mit der *gleichen* Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ sind, ist bei den periodischen Lösungen[10] von (17) die *Periode T* eine *Funktion der Amplitude* der Schwingung, siehe z.B. [5], Abschnitt 2.132:

$$T = T(\varphi_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\, K(\sin(\varphi_0/2)) \tag{18}$$

Dabei bezeichnet $\varphi_0 \in [0, \pi)$ den maximalen Auslenkungswinkel des Pendels bei der betrachteten Bewegung und $K(k)$ ist das *vollständige elliptische Integral erster Art*:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \tag{19}$$

Da die Funktion $K : k \in [0, 1) \to K(k)$ monoton wächst[11], folgt in der Tat, dass beim Schwinger (17) die Schwingungszeit (und damit seine Eigenfrequenz) von der Amplitude der Schwingung abhängt.

Das Phänomen ist offenbar der Tatsache geschuldet, dass die Differenzialgleichung (17) *nichtlinear* ist, im Gegensatz zu (16). Es "geht verloren", wenn man die Gleichung (17) durch die Gleichung (16) approximiert, was ja häufig unter Hinweis auf *kleine Amplituden* geschieht. Um der Nichtlineartität der Pendelgleichung Rechnung zu tragen, ohne gleich (17) zu verwenden, kann man $\sin \varphi$ für nicht zu grosse Werte von $|\varphi|$ statt durch φ, durch

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3$$

approximieren und erhält dann die nichtlineare (jedoch polynomiale) Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 (\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3) = 0 \text{ mit } \omega^2 = g/l \tag{20}$$

[9] g bezeichnet, wie üblich, die Erdbeschleunigung, ℓ die Länge der (masselos gedachten) Pendelstange. φ ist der Auslenkwinkel der Pendelstange, gemessen von der Vertikalen aus.

[10] Gemeint sind die Lösungen, die dem Hin- und Herschwingen des Pendels um die vertikale Lage entsprechen. Nicht gedacht ist an die *Rotationslösungen*, die das Rotieren des Pendels um seinen Aufhängepunkt modellieren.

[11] Überdies hat sie einen Pol bei $k = 1$ und es gilt $K(0) = \pi/2$.

5

Mit gut 50 Seiten ist das Kapitel II mit dem Titel "Die pseudoharmonische Schwingung" das umfangreichste in Duffings Buch. Und gleich am Anfang werden die beiden Schwingungsdifferenzialgleichungen vorgestellt, um die es im Weiteren geht:

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = 0 \tag{21}$$

$$\ddot{x} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k \cos(\Omega t) \tag{22}$$

Bezüglich der Lösungen von (21) spricht der Autor von *freien*, hinsichtlich der Lösungen von (22) von *erzwungenen* Schwingungen unter dem Einfluss einer harmonisch veränderlichen äusseren Kraft.

Der Term

$$f(x) := \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 \tag{23}$$

stellt die durch die rücktreibende Kraft erzeugte Beschleunigung dar. Man kann sie sich zum Beispiel als von einer *nichlinearen Feder* hervorgerufen denken, mit f als *Federkennlinie*.

Wenn $\beta \neq 0$ ist, gilt $f(-x) \neq -f(x)$ für $x \neq 0$. Das bedeutet, dass die Federkennlinie in diesem Fall *asymmetrisch* ist. Das ist eher künstlich und daher wird in der Literatur meist der Fall $\beta = 0$ studiert.

Die Gleichung (22) oder die um einen linearen Reibungs-/Dämpfungsterm erweiterte Gleichung[12]

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \alpha x - \gamma x^3 = k \cos(\Omega t) \tag{24}$$

δ eine positive Konstante, wird weitherum als

(Differenzial-) Gleichung von *Duffing*

kurz als *Duffing-Gleichung*, bezeichnet.

6

Man kann sagen, die Differenzialgleichung (24) (bzw. (22)) von Duffing sei eine *berühmte* Gleichung[13]: Es gibt kaum ein Buch, das sich mit Schwingungen beschäftigt und der Duffing-Gleichung nicht wenigstens ein Kapitel widmet – die Bücher [3], [5], [6] sind nur eine sehr kleine Auswahl.

Während der Fall der linearen (Hooke'schen) Feder, das heisst wenn $\gamma = 0$ gilt, mit gymnasialer Mathematik zu bewältigen ist, cf. Abschnitt 2, bewirkt deren Ersetzung durch eine nichtlineare Feder einen "Quantensprung", was den mathematischen Schwierigkeitsgrad anbelangt.

Natürlich wird man zuerst die Frage nach Lösungsformeln für die Gleichung (24) aufwerfen. Tatsächlich lässt sich die Gleichung (24) unter der Voraussetzung *keine Reibung, keine Anregung*, also im Fall $\delta = k = 0$, mit Hilfe von *elliptischen Funktionen* lösen. Wie aber verhält es sich im hauptsächlich interessierenden Fall, also unter der Voraussetzung

$$\delta \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \gamma \neq 0, \quad k > 0, \quad \Omega > 0\,? \tag{25}$$

[12] Duffing befasst sich mit (24) im Kapitel IV mit dem Titel "Einfluss der Dämpfung".

[13] So berühmt, dass die Amerikaner von 'Daffing equation' reden, und meinen, der Namengeber sei einer der ihren und bass erstaunt sind, wenn man die Herkunft richtig stellt.

Nach allem was ich weiss, kennt man *kein* Verfahren um Lösungsformeln zu finden, und dementsprechend sind (mir) *keine* Lösungsformeln bekannt.

Freilich: Die *Existenz* der Lösungen ist durch den bekannten *Satz* über die *Existenz* und *Eindeutigkeit*[14] von Lösungen von Differenzialgleichungungen gesichert. Nur: Wie kann man etwas über das "Verhalten" der Lösungen in Erfahrung bringen, insbesondere über das besonders interessierende *Langzeitverhalten*, das heisst das "Verhalten" nach "genügend langer" Zeit, wenn also allfällige "Einschwingvorgänge" abgeklungen sind?

Wenn man den Parametern (25) konkrete Zahlwerte zuweist kann man für verschiedene Anfangswerte $x(0)$, $\dot{x}(0)$ mit Hilfe eines numerischen Differenzialgleichungslösers (ODE-Solver) die entsprechenden Lösungen über ein gewisses endliches Zeitintervall approximativ bestimmen. Das mag für manche Zwecke genügen, ist aber doch sehr bescheiden in Anbetracht der durch die Duffing-Gleichung gestellten Aufgabe.

Eine andere Möglichkeit ist zu untersuchen, ob die Gleichungen (22), (24) unter Umständen gewisse *spezielle Lösungen* besitzen, die von Interesse sind. Naheliegend ist die Frage nach *periodischen Lösungen*, zum Beispiel der Periode $2\pi/\Omega$. Dafür steht ein "Arsenal" von sogenannten *Fixpunktsätzen* zur Verfügung und dementsprechend gibt es dazu eine umfangreiche Literatur. Allerdings resultieren auch daraus nur sehr punktuelle Aussagen über die Gleichungen (22), (24).

Was wäre denn überhaupt eine *zufriedenstellende Lösung* der durch die Differenzialgleichung (24) gestellten Aufgabe?

Entsprechend der "Philosophie" der Theorie der Dynamischen Systeme würde man die Aufgabe als gelöst betrachten, wenn man über das *Langzeitverhalten aller* ihrer *Lösungen* für *beliebige Werte* der *Parameter* (25) Bescheid[15] wüsste. Man würde das eine *qualitative* Antwort auf die Fragestellung nennen.

Auch diese Zielsetzung ist nach heutigem Wissensstand *viel* zu ambitiös. Am ehesten ist sie noch zu erreichen, wenn man annimmt, dass die Nichtlinearität *schwach*, die Dämpfung *gering*, die Amplitude der Anregung *klein* ist. Übertragen auf die Parameter γ, δ, k bedeutet das, dass man sich im 3-dimensionalen *Parameter-Raum* in die *Nähe* des *Nullpunkts* $\gamma = \delta = k = 0$ begibt. Denn dann unterscheidet sich Gleichung (24) nur wenig von der Gleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x} + \alpha x = 0 \tag{26}$$

Man sagt dann, (24) sei eine *Störung* von (26) und das ermöglicht *Methoden der Störungsrechnung* zu nutzen.

Auch so ist das Problem immer noch zu schwierig. Es ist nicht ausreichend die 3 Parameter klein genug zu wählen, weil ihre *Grössenverhältnisse* untereinander eine wichtige Rolle spielen. Wir werden den Fall verfolgen, in dem die drei Parameter "von gleicher Grössenordnung klein" sind. Um zu präzisieren was gemeint ist, wird ein sogenannter *kleiner Parameter* $\epsilon > 0$ als (gemeinsames) "Mass für Kleinheit" eingeführt und die 3 Parameter werden wie folgt mit ϵ gekoppelt:

$$\gamma = \epsilon\overline{\gamma}, \;\; \delta = \epsilon\overline{\delta}, \;\; k = \epsilon\overline{k} \tag{27}$$

Denken Sie sich dabei $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta} \geq 0$ und $\overline{k} > 0$ als fest gewählte Zahlen. Den Parameter ϵ, hingegen, wollen wir auf "so kleine (positive) Werte wie nötig" einschränken können.

[14] Siehe Teil II dieser Artikelserie, Abschnitt 5.

[15] Es wäre zu präzisieren, was mit "Bescheid wissen" gemeint ist.

Bleiben die Parameter α und Ω. Im linearen Fall, siehe die Abschnitte 2 und 3, war $\alpha = \omega^2 = 1$ gesetzt und es zeigte sich, dass das Eingangssignal bei *kleiner* Dämpfung dann besonders stark verstärkt wird, wenn $\Omega \approx \Omega_{max} = \sqrt{1-2d^2} \approx \omega = \sqrt{\alpha} = 1$ gilt, siehe (14). Es wird sich herausstellen, dass es auch bei *Vorhandensein* einer *Nichtlinearität* in der Gleichung höchst interessant ist, diese Situation zu untersuchen. Statt $\alpha = 1$ und $\Omega \approx \sqrt{\alpha}$ setzen wir bequemlichkeitshalber

$$\Omega = 1 \text{ und } \alpha = 1 - \epsilon 2\overline{\nu} \tag{28}$$

mit $\overline{\nu}$ (einstweilen!) fest gewählt und

$$\overline{k} = 2 \tag{29}$$

Dann lautet die Duffing-Gleichung (24) nach einer kleinen Umstellung

$$\ddot{x} + x = \epsilon[2\nu x - 2\delta\dot{x} + \gamma x^3 + 2\cos(t)] \tag{30}$$

Dabei wurden bei den Grössen $\overline{\nu}$, $\overline{\delta}$, $\overline{\gamma}$ zur Vereinfachung der Notation die Querstriche weggelassen und stattdessen wieder ν, δ und γ geschrieben, was nicht zu Konfusion Anlass gibt, da wir uns im folgenden nur auf Gleichung (30) beziehen werden.

Der nächste und (vermutlich ...) letzte Teil dieser Artikel-Serie wird der *Anwendung* der sogenannten *Störungsrechnung* auf Gleichung (30) gewidmet sein.

Literatur

[1] V. I. Arnold: *Huggens & Barrow, Newton & Hooke*, 1990.
[2] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.
[3] P. Hagedorn: *Non-linear oscillations*, 1981.
[4] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.
[5] K. Magnus: *Schwingungen*, 1961, 1976^3.
[6] J. J. Stoker: *Nonlinear Vibrations*, 1950.

UK/20151129