Empilement de cercles (II)

Shaula Fiorelli Vilmart, Université de Genève, shaula.fiorelli@unige.ch

Suite de l'article Empilement de cercles (I) paru dans le numéro précédent du bulletin de la SSPMP

Résumé : En 1611, Johannes Kepler, écrit un petit livre intitulé *Strena, seu De nive sexangula*, comme cadeau de Noël à un ami. Kepler se demande pourquoi les flocons de neige sont de forme hexagonale [2]. C'est dans ces réflexions qu'est évoquée pour la première fois de l'histoire la question des arrangements de cercles. Comme Kepler ne donne aucune démonstration du fait que l'arrangement en hexagones est le plus dense possible, les historiens appelleront plus tard cette affirmation la *conjecture de Kepler* [1] en dimension 2. En 1773 Joseph-Louis Lagrange publie ses *Recherches d'arithmétiques* [3] ayant pour objet l'étude des formes binaires quadratiques. En 1831 Karl Friedrich Gauss introduit la notion de réseaux [4]. Gauss remarque qu'on peut associer une forme binaire quadratique à un réseau ce qui lui permet de démontrer que l'arrangement *régulier* le plus dense est l'arrangement hexagonal.

Lien entre les réseaux et nos arrangements de cercles

Tracez des cercles de même rayon centrés sur les points du réseau. Si le rayon que vous avez choisi est assez grand, vos cercles se superposent et vous obtenez un *recouvrement régulier du plan*. Si le rayon est suffisamment petit, les cercles ne se superposent pas et vous obtenez un arrangement de cercles. Il s´agit maintenant de déterminer quelles sont les conditions sur les points du réseau pour que l´arrangement soit le plus dense possible. Comme l'arrangement est régulier, il suffit de regarder une petite partie du réseau. L'idée est d'observer le parallélogramme défini par l'origine et les deux vecteurs de base. Mais comme il y a une infinité de vecteurs de base pour un réseau donné, quel parallélogramme va-t-on donc étudier ? On va s'intéresser au parallélogramme engendré par la forme réduite, on l'appellera le *domaine fondamental*. Legendre avait montré d'une part, que dans une forme réduite, le coefficient *C* est plus petit que les deux autres ; ceci implique que le plus petit angle du domaine fondamental sera compris entre 60° et 90°. D'autre part, il a montré que le discriminant Δ sera toujours supérieur ou égal à $3B^2$. Par conséquent, l'aire du domaine fondamental sera toujours supérieure ou égale à $\sqrt{3}B/_2$. Et quel est le domaine fondamental qui correspond à cette aire minimale ? En supposant que *B=1*, l'angle entre ses vecteurs est 60° et son aire vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (voir Figure 1).

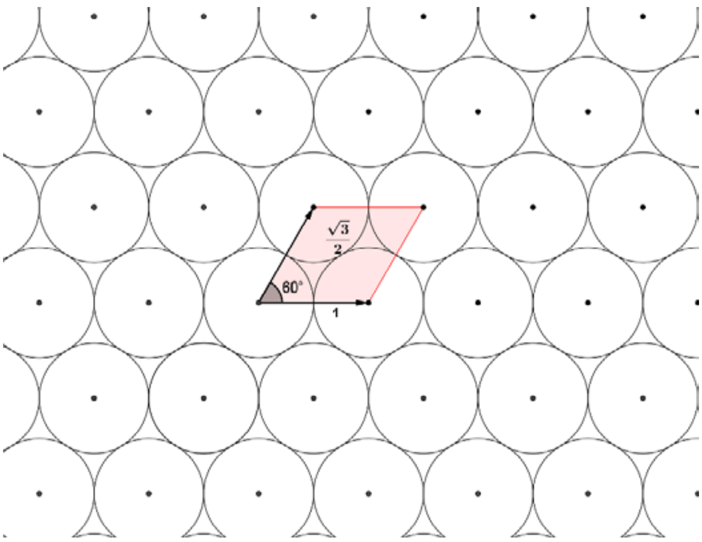

Figure 1 - Le réseau associé à la forme réduite minimale et l'arrangement de cercles associé. On retrouve bien l'arrangement hexagonal !

Ce domaine fondamental contient exactement un cercle de rayon ½ (en fait deux secteurs d'angle 60° et deux secteurs d'angle 120°). Vous aurez reconnu l'arrangement hexagonal ! En faisant le lien entre les formes binaires quadratiques et les réseaux, Gauss a donné tous les éléments permettant de démontrer que, dans le cas d'un arrangement régulier, l'arrangement le plus dense est l'arrangement hexagonal. Il a fallu 220 ans pour démontrer la conjecture de Kepler en dimension 2 dans le cas régulier. Reste le cas d'une configuration quelconque, pas nécessairement régulière.

Cas d'une configuration quelconque

En 1892, Axel Thue, un mathématicien norvégien, propose une première tentative de preuve du cas quelconque. Malheureusement, son article s'avère être plus un plan de travail qu'une véritable démonstration. Dix-huit ans plus tard, il fournit une nouvelle preuve [5], qui contient toujours trop d'affirmations non démontrées. La conjecture résiste.

Finalement, en 1940, László Fejes Tóth, un mathématicien hongrois, publie un article de deux pages et demi contenant la première démonstration rigoureuse de la conjecture de Kepler en dimension deux [6].

L'idée de Fejes Tóth est de ne plus s'attacher aux cercles mais uniquement à leurs centres. Pratiquement, il démontre que la manière la plus dense de distribuer des points à l'intérieur d'une surface (de façon que la distance entre chaque point soit supérieure ou égale à une distance minimale donnée) est de les disposer selon le réseau hexagonal. Voyons son raisonnement.

Fejes Tóth commence son article en posant l'assertion suivante qu'il se propose de démontrer. C'est de cette assertion que découlera naturellement le résultat tant recherché.

Assertion

Soient *n* points tirés au hasard à l'intérieur d'une surface d'aire *T* et *d* la plus petite distance entre deux points. Pour tout point, on construit un carré de côté *d* centré en ce point (voir Figure 2). Alors la surface couverte par les carrés est majorée par $\frac{2\sqrt{3}}{3}T$, autrement dit[1] : $nd^2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}T$.

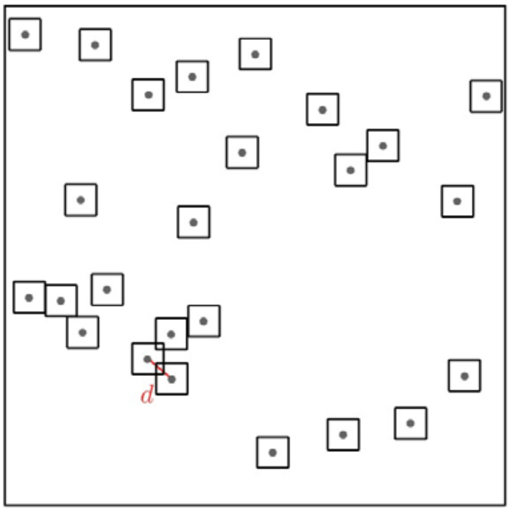

Figure 2 - Illustration de l'assertion de Fejes Tóth

Preuve

La démonstration repose sur la construction d'une famille de disques telle que chaque point du plan est recouvert par au plus deux disques.

Pour chacun des *n* points donnés, on construit un disque centré en ce point de rayon $r = \frac{\sqrt{3}}{3}d$. Ce rayon correspond au rayon du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté *d*. Ce choix garantit que trois cercles centrés sur chacun des sommets d'un triangle équilatéral s'intersectent en un unique point et que les trois disques n'ont pas d'intersection commune (voir Figure 3).

[1] En réalité, Fejes Tóth majore la limite de l'aire couverte par les carrés lorsque le nombre de points tend vers l'infini. Mais l'assertion plus faible présentée ici convient parfaitement à notre exposé.

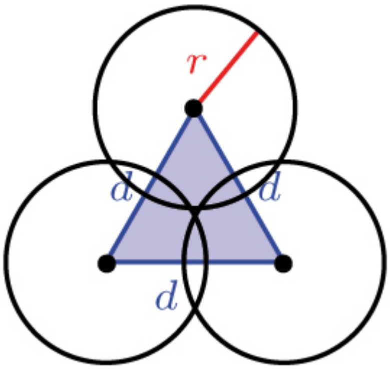

Figure 3

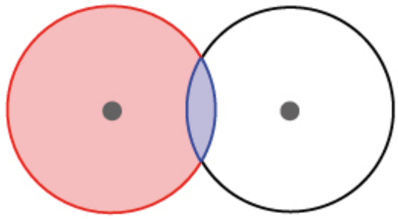

Figure 4

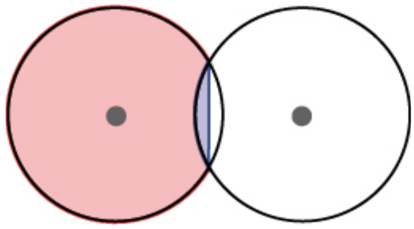

Figure 5

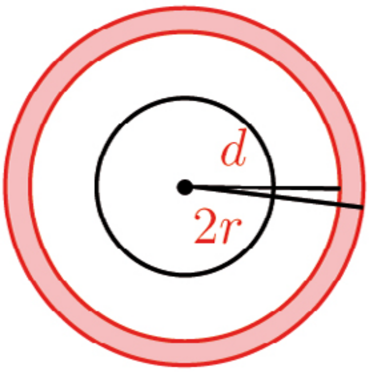

Figure 6

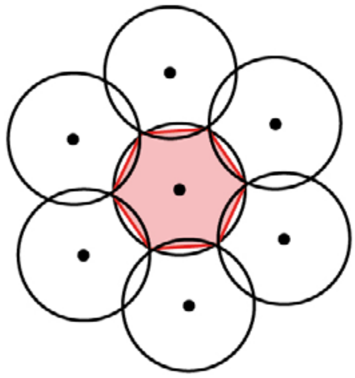

Figure 7

Avec ce choix de rayon, un point quelconque de la surface T peut être couvert par au plus deux disques.

Quelle est la surface couverte par ces disques ?

Puisque les disques peuvent se superposer, on ne peut pas simplement additionner les aires des *n* disques. Mais comme chaque point de la surface *T* peut être couvert par au plus deux disques, Fejes Tóth considère l'aire $D_i = t_i^1 + \frac{1}{2}t_i^2$ où t_i^1 est la surface du disque i recouverte par le seul disque i (partie ombrée de la Figure 4, intersection exclue) et t_i^2 est la surface du disque i recouverte par le disque i et un autre disque (l'intersection des deux disques de la Figure 4). On peut se représenter cette idée comme sur la Figure 5, chaque disque qui coupe le disque i « grignote » la moitié de la surface d'intersection. Ainsi, l'aire couverte par les disques est exactement la somme des D_i.

Fejes Tóth remarque alors que pour chaque i, l'aire D_i peut être minorée par $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$, c'est-à-dire par l'aire d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle de rayon *r*. Observons en effet comment réduire l'aire D_i.
Soit le disque i. Pour qu'un disque le coupe, son centre doit être à une distance d'au plus 2r du centre du disque i. Mais on a imposé que la distance minimale entre deux points est d. Ainsi, le centre du disque doit se trouver dans la couronne de la Figure 6. Avec les contraintes que l'on s'est imposées, de 1 à 7 centres de disques peuvent prendre place dans cette couronne. Cependant, c'est avec 6 disques que l'on « grignote » le

plus de surface au disque i ; et c'est en les plaçant sur les sommets d'un hexagone régulier centré au point i (voir Figure 7). On établit que :

$$T \geq \sum_{i=1}^{n} D_i \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 = n\frac{3\sqrt{3}}{2} r^2 = n\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} d\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} nd^2.$$

On a ainsi démontré l'assertion.
Il s'ensuit que la seule manière d'atteindre la borne inférieure donnée par l'assertion est de disposer les points selon le réseau hexagonal ! Ce qui implique que l'arrangement hexagonal est bien l'arrangement de cercles le plus dense possible.

Conclusion

La *conjecture de Kepler*, question d'apparence anodine, cache 329 ans d'histoire des mathématiques. Toute la difficulté réside dans la démonstration. Nous avons présenté les outils mathématiques nécessaires pour aboutir à une démonstration du cas général. Cette démarche révèle des liens cachés entre des théories mathématiques développées dans des contextes différents et qui, misent en relation, permettent de dénouer le problème, comme c'est souvent le cas en mathématiques.

Remerciements

Un grand merci à Mireille Schumacher pour ses relectures attentives, ses conseils et son aide dans la finalisation de cet article.

Bibliographie

[1] G. Szpiro, *Kepler's Conjecture*, Wiley, John & Sons Inc, 2003
[2] K. G. Libbrecht, *The physics of snow crystals*, Reports on Progress in Physics, vol. 68 (14), 2005
[3] J.-L. Lagrange, *Recherches d'arithmétiques,* Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin, pp. 695-795, 1773 et 1775
[4] K. F. Gauss, Besprechung des Buchs von L.A. Seeber : *Untersuchungen über die Eigenschaften der positive ternären quadratischen Formen*, Göttingsche Gelehrte Anzeugen, 1831
[5] A. Thue*, Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene*, Christinia Vid. Selsk. Skr. 1, pp. 1-9, 1910
[6] L. Fejes Tóth, *Über einen geometrischen Satz*, Mathematische Zeitschrift 46, 1940.