Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2A

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

"… , genügen lineare Modelle nicht mehr zur Erklärung. Das menschliche Gehirn kann jedoch nichtlineare Prozesse schlecht oder überhaupt nicht nachvollziehen, deshalb kommt die Mathematik ins Spiel."[1]

Dagmar Iber, Professorin für Computational Biology an der ETH Zürich

1

Die Differenzialgleichung (Dgl) des *harmonischen Oszillators*

$$\ddot{y} + y = 0 \tag{1}$$

ist eine der einfachsten und eine Art *Grundgleichung der Schwingungslehre*. Mit

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \tag{2}$$

sind ihre sämtlichen Lösungen erfasst. Dabei bezeichnen c_1, c_2 beliebig wählbare Konstanten/Zahlen.

Im Spezialfall $c_1 = c_2 = 0$ gilt:

$$y(t) = 0 \text{ für alle } t \tag{3}$$

Das bedeutet: Der Schwinger befindet sich in Ruhe. Für jede andere Wahl von c_1, c_2 führt der Schwinger, wie es seinem Namen gebührt, Schwingungen aus. Dabei ist die Periode T der Schwingung unabhängig von der Wahl von c_1, c_2 immer gleich gross:

$$T = 2\pi$$

Die Schwingungen (2) werden als *harmonisch* bezeichnet. Die Dgl (1) beschreibt ein einfaches aber sehr grundlegendes schwingungsfähiges System.

2

Interessant kann es werden wenn man etwas von der einfachen Situation abweicht, die durch Gleichung (1) beschrieben wird und den harmonischen Oszillator *stört*, wie man sagt. Das Wort "stören" soll zum Ausdruck bringen, dass Gleichung (1) nur *geringfügig verändert* werden soll. Um die Stärke der Abweichung von (1) steuern zu können führt man häufig einen sogenannten

kleinen Parameter ϵ

ein und betrachtet an Stelle von (1) eine *Familie* von Differenzialgleichungen

$$\ddot{y} + y = \epsilon g \tag{4}$$

Der Parameter ϵ wird dabei als *positiv*, aber *hinreichend klein* gedacht. Das heisst er "lebt" im Intervall

$$(0,\, \epsilon_0)$$

[1] In: *"Frau Iber, lässt sich das Leben mit Mathematik erklären?"*, Zürcher Wirtschaftsmagazin 2/2014, p. 10-13.

wobei ϵ_0 so klein wie nötig gewählt wird.

Je nach der *Wahl der Funktion* g, die die *Störung* bestimmt, variiert der Schwierigkeitsgrad des Problems (4). Im einfachsten Fall ist g lediglich eine Funktion von y:

$$g = g(y) \tag{5}$$

Im nächst schwierigeren Fall ist g eine Funktion von y und $\dot{y}$:

$$g = g(y, \dot{y}) \tag{6}$$

Schliesslich erhält man den schwierigsten Fall, wenn g zusätzlich von der unabhängigen Variablen t abhängt:

$$g = g(t, y, \dot{y}) \tag{7}$$

Es soll ein für allemal die *Voraussetzung* gemacht werden, dass g eine *hinreichend reguläre Funktion* ihrer drei Argumente t, y, v ist. Dabei habe ich zur grösseren Klarheit v an Stelle von $\dot{y}$ geschrieben, also $g(t, y, v)$ statt $g(t, y, \dot{y})$. Je nach Wahl von g erhält man berühmte Gleichungen:

$$\begin{aligned} g(t, y, v) &= ay + by^3, \quad a, b \text{ Konstante} \\ g(t, y, v) &= (1 - y^2)v \\ g(t, y, v) &= 2\nu y - 2\delta v + \gamma y^3 + 2\cos(t) \end{aligned} \tag{8}$$

Mit der ersten Wahl (8) wird eine *schwach nichtlineare Feder* modelliert, die zweite Wahl (8) ergibt die sogenannte *van der Pol-Gleichung*, siehe "*Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*", dort Gleichung (1), und die dritte Wahl (8) die *Duffing-Gleichung*, siehe "*Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil* 1", Gleichung (30).

Eine Lösung der Dgl (4) ist eine (mindestens zweimal stetig differenzierbare) Funktion $y(t)$, für die

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \epsilon g(t, y(t), \dot{y}(t), \epsilon) \tag{9}$$

im Definitionsbereich von $y(t)$ gilt.

Typischerweise ist es *nicht möglich*, Lösungen von (4) mit Hilfe von bekannten Funktionen zu beschreiben. Man versucht daher (4) *approximativ* zu lösen und auf diese Weise Information über die Lösungen von (4) zu gewinnen.

Naheliegend ist, das Problem mit Hilfe eines *numerischen Solvers* anzugehen. Das ist aber in dieser Situation aus verschiedenen Gründen oft kein guter Weg. Bei einem numerischen Vorgehen muss man *Anfangsbedingungen* (in unserem Fall also die Werte für $y(0)$ und $\dot{y}(0)$) festlegen. Wie die Wahlen 1 und 3 in (8) für g zeigen, hängt die Dgl (4) nicht nur vom Parameter ϵ, sondern unter Umständen noch von mehreren weiteren Parametern ab, die man für eine numerische Integration samt und sonders festlegen muss. Und schliesslich gibt es eine weitere gewichtige Schwierigkeit, die damit zusammenhängt, dass das *Ziel* hier sein soll, quasi den Grenzfall

$$\epsilon \longrightarrow 0$$

zu studieren.

3

Lösungen von Differenzialgleichungen hängen unter sehr wenig einschränkenden Bedingungen *regulär* von den *Anfangsbedingungen* und allfällig vorhandenen *Parametern* ab[2]. Bezogen auf (4) heisst das folgendes.

Betrachten wie eine *Familie von Lösungen*

$$y(t, \epsilon)$$

von (4) (zum Beispiel indem wir die Anfangsbedingungen spezifizieren, etwa $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$ setzen, und allenfalls in der Dgl vorkommende Parameter fixieren). Denken wir uns eine positive Zahl T (beliebig gross, aber fest[3]) gewählt. Dann gilt auf Grund des EER-Satzes:

$$\max_{t\in[0,T]} |y(t, \epsilon) - y(t, 0)| \longrightarrow 0 \text{ für } \epsilon \to 0 \tag{10}$$

Das bedeutet: Auf dem Zeitintervall

$$t \in [0, T] \tag{11}$$

kann sich die Störung ϵg für $\epsilon > 0$, hinreichend klein, *gar nicht richtig auswirken* – sie hat sozusagen gar nicht genug Zeit Wirkung aufzubauen, um die zu Grunde liegende harmonische Schwingung nachhaltig zu beeinflussen.

Um das zu bewirken, muss man die Störung sich "länger einmischen lassen". Wie lange?

Klar – wenn man an Stelle von (11) das Intervall

$$t \in [0, \infty) \tag{12}$$

ins Auge fasst, dann sollte sich der Einfluss der Störung auswirken können. Nur – das ist eine *sehr* lange Zeit, sodass leider eine *sehr schwierige* Aufgabe resultiert.

Zum Glück gibt es etwas dazwischen. Die Kleinheit der Störung in (4) wird ja mit Hilfe des Parameters ϵ "gemessen". Da ist es verlockend auch das Zeitintervall, während dessen man die Störung sich auf den harmonischen Oszillator einwirken lässt, mit dem Parameter ϵ in Verbindung zu bringen. Wir wünschen daher ein *Zeitintervall* das *wächst*, wenn ϵ *abnimmt*. Sei $L > 0$ (beliebig gross, aber fest gewählt) und fassen wir das Zeitintervall

$$t \in [0, \frac{L}{\epsilon}] \tag{13}$$

ins Auge. Es wird als *expandierend* bezeichnet, weil es umso grösser ist, je kleiner ϵ ist.

Das (Wunsch-)*Ziel* ist, Aussagen über das Verhalten der Lösungen von (4) zu machen, die (mindestens) für das Zeitintervall (13) gelten, und zwar für alle postivien Werte von ϵ, die kleiner als eine geeignet gewählte Schranke ϵ_0 sind.

Die Hoffnung ist, dass diese Fragestellung *interessant*, aber *nicht zu schwierig* ist.

4

Ein bewährter Lösungsansatz in der Mathematik ist, ein Problem durch *Transformation* in eine möglichst einfache Form zu bringen ehe man es endgültig zu knacken versucht. Das gilt auch und gerade für den Umgang mit Differenzialgleichungen.

[2] Das ist der *Regularitätsteil* des Satzes über die Existenz, Eindeutigkeit und Regularität von Lösungen von Differenzialgleichungen, kurz: EER-Satz.

[3] Gemeint ist: *unabhängig* von ϵ, siehe unten.

Betrachten Sie eine Dgl 1. Ordnung, oder allgemeiner, ein System[4] von Differenzialgleichungen (kurz: Dgl-System) 1. Ordnung

$$\dot{y} = f(t, y) \tag{14}$$

Eine *Transformation* ist eine *Beziehung* zwischen den (alten) Variablen y von (14) und neuen Variablen x der Form

$$y = h(t, x) \tag{15}$$

wobei die Voraussetzung ist, dass man die Beziehung (15) nach x auflösen kann.

Dann gibt es zu einer Lösung $y(t)$ von (14) eine Funktion $x(t)$, sodass

$$y(t) = h(t, x(t)) \tag{16}$$

gilt und man kann fragen, *welche* Dgl $x(t)$ dann erfüllen muss. Differenziation von (16) nach t unter Beachtung der Kettenregel liefert[5]

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) \tag{17}$$

Da $y(t)$ nach Annahme Lösung von (14) ist, gilt mit (16)

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) = f(t, h(t, x(t))) \tag{18}$$

Der Vergleich von (17) und (18) liefert:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, x(t))\dot{x}(t) = f(t, h(t, x(t))) \tag{19}$$

Indem man (19) nach $\dot{x}(t)$ auflöst und wieder x statt $x(t)$ und $\dot{x}$ statt $\dot{x}(t)$ schreibt, (weil die durchgeführte Rechnung ja für jede beliebige Lösung von (14) gilt), folgt:

$$\boxed{\dot{x} = [\frac{\partial h}{\partial x}(t, x)]^{-1}[-\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + f(t, h(t, x))] \quad (20)}$$

Obwohl die Formel (20) furchterregend aussieht kann sie potentiell genutzt werden, um die Dgl (14), die studiert werden soll, durch eine einfachere, (20), zu ersetzen, wie Sie gleich sehen werden.

5

Damit die im letzten Abschnitt vorgestellte Transformationstechnik für die Gleichung (4) des gestörten harmonischen Oszillators genutzt werden kann, schreibt man die Gleichung als System von zwei Diffferenzialgleichungen erster Ordnung:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{y}_1 & = & y_2 \\ \dot{y}_2 & = & -\ y_1 + \epsilon g(t, y_1, y_2) \end{array} \right. \tag{21}$$

[4] Ich benutze im Folgenden die Begriffe "Differenzialgleichung" und "System von Differenzialgleichungen" synonymisch. Dank der Vektornotation braucht man die beiden Objekte nicht gross zu unterscheiden. Was gemeint ist, wenn der Unterschied einmal relevant sein sollte, ergibt sich mühelos aus dem Zusammenhang.

[5] Wenn y, x *skalare* Variable sind, $h(t, x)$ dementsprechend eine skalare Funktion, ist $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x)$ einfach die (partielle) Ableitung von $h(t, x)$ nach x. Meinen y, x hingegen Vektoren (gleicher Dimension), $h(t, x)$ entsprechend eine Vektorfunktion, dann bedeutet $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x)$ die *Jacobische Matrix*. Im Fall der Dimension 2 ist das die folgende 2×2-Matrix der vier partiellen Ableitungen von h_1, h_2 nach x_1, x_2:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(t, x) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(t, x) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(t, x) \end{pmatrix}$$

Die jetzt zu definierende Transformation macht sich zu Nutze, dass man die Lösungen des (ungestörten) harmonischen Oszillators (1) kennt. Ausgehend von (21) für (14) wählen wir als Transformation (15)

$$\begin{cases} y_1 &= \quad x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t) \\ y_2 &= - \quad x_1 \sin(t) - x_2 \cos(t) \end{cases} \tag{22}$$

Die Durchführung der Rechnung, die durch Gleichung (20) beschrieben wird, liefert:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= - \quad \epsilon g^* \sin(t) \\ \dot{y}_2 &= - \quad \epsilon g^* \cos(t) \end{cases} \tag{23}$$

Dabei ist g^* diejenige Funktion, die man erhält, wenn man die Transformation (22) in $g(t, y_1, y_2)$ einsetzt, also

$$g^*(t, x_1, x_2) = g(t, x_1 \cos(t) - x_2 \sin(t), -x_1 \sin(t) - x_2 \cos(t)) \tag{24}$$

Der *Gewinn*: Für $\epsilon = 0$ reduziert sich die Dgl (23) auf das triviale System

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \quad 0 \\ \dot{y}_2 &= \quad 0 \end{cases} \tag{25}$$

Einfacher geht's nicht mehr! Ob (23) somit ein guter Ausgangspunkt ist, um Informationen über die Lösungen des Dgl-Systems (23) für kleine positive Werte des Störparameters ϵ zu gewinnen? Das Dgl-System (25) ist jedenfalls sehr *speziell*: Seine *sämtlichen Lösungen* sind sogenannte *Gleichgewichtslösungen*[6]:

$$y_1(t) = c_1, \quad y_2(t) = c_2 \tag{26}$$

mit c_1, c_2 beliebige Zahlen. Weil der Begriff so wichtig ist: Eine Lösung eines Dgl-Systems ist also eine Gleichgewichtslösung, wenn sie sich *im Laufe der Zeit t* nicht *ändert*. Alternativ ausgedrückt: Wenn sie durch *konstante Funktionen* beschrieben wird.

(25) ist insofern *kein* guter Ausgangspunkt, als sich die Lösungen von (23) von denjenigen des Systems (25) ganz fundamental unterscheiden können, wie sich zeigen wird. Anders herum betrachtet bedeutet das, dass die *Störung*, in (23) beschrieben durch die Terme $-\epsilon g^* \sin(t)$ und $-\epsilon g^* \cos(t)$, die Dynamik des Schwingers (4) *wesentlich beeinflusst*, obwohl die Störung ja (wegen des Parameters ϵ) "nur klein" – eben "nur" eine Störung ist. Wir haben also eine interessante Fragestellung, aber auch ein Problem!

Das System (23) direkt anzupacken, ist zu schwierig. Der Aussagegehalt des Systems (25) als Annäherung an das System (23) ist zu gering. Was tun? Der *Wunsch* liegt auf der Hand: *Man hätte gern ein* approximierendes System*, das einfacher ist als* (23)*, und doch viel über* (23) *aussagt,* jedenfalls mehr als (25)! Ein solch *vermittelndes System* gibt es.

6

Losgelöst von Details ist (23) ein Dgl-System von folgendem Typ

$$\dot{x} = \epsilon q(t, x) \tag{27}$$

Dabei ist q oft, und jedenfalls im Fall der hier vorallem interessierenden Duffing-Gleichung in t 2π-*periodisch*, das heisst, es gilt:

$$q(t + 2\pi, x) = q(t, x) \tag{28}$$

[6] Man sagt auch *Gleichgewichtspunkte*, *Gleichgewichte*, *stationäre Lösungen*, *stationäre Punkte*, und sogar *Fixpunkte*.

für *alle* t und *alle* x. Das ist im Fall der Duffing-Gleichung einerseits deshalb so, weil die Funktion $g(t, y, v)$ in (8) 3. Beispiel, bezüglich t (also bei festen Werten der übrigen Variablen) 2π-periodisch in t ist[7] und andererseits, weil auch die Transformation (22) (bei festen Werten von x_1, x_2) 2π-periodisch in t ist.

Aus der Periodizitätseigenschaft (28) von q folgt (unter schwachen Voraussetzungen über die Regularität von q, die in der Praxis üblicherweise erfüllt sind), dass sich $q(t, x)$ in eine *Fourier-Reihe* nach t (mit Koeffizienten, die Funktionen von x sind) entwickeln lässt. Häufig handelt es sich bei den Beispielen, auch bei der Duffing-Gleichung, sogar lediglich um ein *Fourier-Polynom*, das heisst um eine Fourier-Reihe mit nur endlich vielen Termen.

Es hat eine lange Geschichte[8], dass man dem Dgl-System (27) das sogenannte *gemittelte* Dgl-System[9]

$$\boxed{\dot{\overline{x}} = \epsilon \overline{q}(\overline{x}) \qquad \text{mit: } \overline{q}(\overline{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t, \overline{x})\, dt \qquad (29)}$$

zur Seite stellt und hofft, dass die Information, die das System (29) liefert, auch Aufschlüsse gibt über das eigentlich interessiernde System (27).

Es ist ein (zumindest prima vista) etwas irritierendes Vorgehen: Beim Übergang vom System (27) zum gemittelten System (29) wird in der Fourier-Entwicklung von $q(t, x)$ nach t *nur* der *konstante*, also der von t *unabhängige* Term *zurück behalten.* Alle übrigen Terme der Fourier-Entwicklung hingegen werden weggelassen! Allein – das Vorgehen lässt sich (bis zu einem gewissen Grad) rechtfertigen, siehe dazu Abschnitt 7.

Bildet man $\overline{q}$ für die Duffing-Gleichung, siehe (8) Beispiel 3 im Verein mit (23), erhält man das folgende *gemittelte System* für die *Duffing-Gleichung*:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \overline{x}_1' & = & -\delta\, \overline{x}_1 + \nu\, \overline{x}_2 - \kappa\, (\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2))\, \overline{x}_2 \\ \overline{x}_2' & = & -\nu\, \overline{x}_1 - \delta\, \overline{x}_2 + \kappa\, (\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2))\, \overline{x}_1 - 1 \end{array}\right. \qquad (30)}$$

Dabei wird an Stelle der Zeit t die

$$\text{“skalierte Zeit”} \quad \tau = \epsilon\, t$$

als unabhängige Variable verwendet und der Akzent $'$ bezeichnet entsprechend die Ableitung nach τ. Überdies wurde

$$\kappa := -\frac{3}{8}\gamma \tag{31}$$

eingeführt.

Es stellen sich an dieser Stelle (mindestens) *zwei Fragen*:

(A) Was ist die *Rechtfertigung*, dass man (27) durch (29) *approximiert*, also nur den Mittelwert der Funktion q ihrer Fourier-Entwicklung berücksichtigt?

[7]Wenn, wie im Moment, t, y und v als unabhängige Variable betrachtet werden, dann geht t ja nur via den Term $2\cos(t)$ ein und der ist natürlich in t 2π-periodisch.

[8]Mit vielen Vätern (und auch ein paar Müttern!) Einige wenige Hinweise enthält der Teil "*Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*" dieser Reihe im dortigen Abschnitt 4. Eine Aufarbeitung der Geschichte dieses manchmal als *Mittelwertprinzip* bezeichneten Vorgehens mit seinen vielfältigen Bezügen, wäre ein eigenes Projekt.

[9]Bei der Mittelwertbildung zur Berechnung von $\overline{q}(\overline{x})$ wird $\overline{x}$ als *konstant* (als Parameter) betrachtet, und nur über t integriert.

(B) Was ist der *Vorteil* des gemittelten Dgl-Systems im Allgemeinen und des gemittelten Systems (30) zur Duffing-Gleichung im Speziellen, wenn man sie mit der Duffing-Gleichung

$$\ddot{y} + y = \epsilon\,[2\,\nu\,y - 2\,\delta\,\dot{y} + \gamma\,y^3 + 2\,\cos(t)] \tag{32}$$

beziehungsweise[10] mit

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \quad y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\quad y_1 + \epsilon\,[2\,\nu\,y_1 - 2\,\delta\,y_2 + \gamma\,y_1^3 + 2\,\cos(t)] \end{cases} \tag{33}$$

vergleicht? Wie erhält man Information allgemein über die Lösungen des gemittelten Systems (29), bzw. speziell über das gemittelte System (30) zur Duffing-Gleichung?

Frage (A) ist von allgemeinerer Natur, das heisst sie betrifft die sogenannte *Mittelwertmethode*[11] (*method of averaging*) grundsätzlich. Frage (B) ist teils ebenfalls allgemeiner Natur, muss teils aber auch zugeschnitten auf das jeweils interessierende Beispiel, hier also die Duffing-Gleichung, angegangen werden.

7

Ich wende mich zuerst der Frage (A) zu und zeige, dass der Schritt vom Dgl-System (27) zum Dgl-System (29) weder so willkürlich ist, wie er vielleicht zunächst erscheint, noch so überraschend. Die Pointe ist: Man kann das Dgl-System (27) durch eine sogenannte *fast-identische Transformation* in ein Dgl-System transformieren, das sich vom Dgl-System (29) nur *um Terme höherer Ordnung in ϵ*, nämlich um quadratische und/oder Terme noch höherer Ordnung in ϵ unterscheidet. Folglich kann der Schritt vom Dgl-System (27) zum Dgl-System (29) so erklärt werden, dass Terme höherer Ordnung im kleinen Parameter ϵ gegenüber dem linearen Term in ϵ weggelassen werden – was immerhin nicht einer gewissen Plausibilität entbehrt. Die Transformationstechnik aus Abschnitt 4 kommt also nochmals zum Einsatz und erweist sich als wichtiges Hilfsmittel, um das Mittelwertprinzip auf eine gute mathematische Grundlage zu stellen.

Die Transformation, die das Gewünschte leistet, ist wie folgt definiert. Man geht von den "alten" Variablen x zu "neuen" Variablen $\overline{x}$ über, gemäss der folgenden Vorschrift:

$$x = h(t, \overline{x}) := \overline{x} + \epsilon\,s(t, \overline{x}) \tag{34}$$

Dabei ist die Funktion s wie folgt definiert

$$s(t, \overline{x}) = \int_0^t [q(t, \overline{x}) - \overline{q}(\overline{x})]\,dt \tag{35}$$

Beachten Sie: Da im Integranden der Mittelwert $\overline{q}$ von q subtrahiert wird, ist die Funktion $s(t, \overline{x})$ 2π-periodisch in t. Warum das wichtig ist wird in der *Anmerkung* weiter unten erläutert.

Man nennt die Transformation (34) deshalb "fast-identisch", weil sie sich für $\epsilon = 0$ auf die identische Transformation $x = \overline{x}$ reduziert.

Wendet man (34) auf die interessierende Gleichung (27), also auf

$$\dot{x} = \epsilon q(t, x) \tag{36}$$

[10] Falls man die Duffing-Gleichung als System 1. Ordnung schreibt.

[11] So nennt man den Übergang von (27) zu (29) und Verallgemeinerungen davon.

an, erhält man (zum Beispiel unter Benutzung von (20))

$$\dot{\overline{x}} = \epsilon\,\overline{q}(\overline{x}) + \epsilon^2\,\hat{q}(t, \overline{x}, \epsilon) \tag{37}$$

mit einer regulären und bezüglich t 2π-periodischen Funktion $\hat{q}$.

Dazu folgende *Anmerkung*. Würde man im Integranden (35) den Mittelwert $\bar{q}$ *nicht* subtrahieren, wäre die Funktion s im Allgemeinen in t *nicht* 2π-periodisch, sondern *unbeschränkt*. Das will man aus (mindestens) zwei Gründen auf gar keinen Fall: Erstens wäre dann typischerweise die Funktion $\hat{q}$ in t unbeschränkt und man hätte wenig Anlass (37) durch das gemittelte System

$$\dot{\overline{x}} = \epsilon\,\overline{q}(\overline{x}) \tag{38}$$

zu approximieren. Zweitens ist die 2π-Periodizität des interessierenden Systems (36) ein charakteristisches *Strukturelement* des Problems. Dieses durch eine Transformation quasi zu "verstecken", wäre bestimmt keine gute Strategie!

Mindestens heuristisch ist damit begründet, dass es schon gerechtfertigt zu sein scheint, anstelle von (36) das gemittelte System (38) zu untersuchen. Mathematisch orientierte Leserinnen und Leser wollen sich jedoch vielleicht mit einem nur plausiblen Argument nicht zufrieden geben. In der Tat gibt es eine umfangreiche Literatur, die sich mit den Beziehungen zwischen den Systemen (36) (beziehungsweise (37)) und (38) auseinandersetzt. Ich begnüge mich hier damit, *zwei* einfache Ergebnisse zu zitieren.

Unter schwachen Voraussetzungen kann man *erstens* folgendes beweisen. Sei $\tilde{\bar{x}}(t)$ eine Lösung von (37), $\bar{x}(t)$ die Lösung von (38) zur gleichen Anfangsbedingung (es gelte also: $\tilde{\bar{x}}(0) = \bar{x}(0)$) und es sei $L > 0$ beliebig vorgegeben. *Dann gibt es positive Zahlen ϵ_0 und c, sodass für $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ gilt: Der* Abstand[12] *zwischen den beiden Lösungen ist für Zeiten t im Intervall*

$$[0, \frac{L}{\epsilon}]$$

nicht grösser als

$$c\,\epsilon$$

Der Beweis ergibt sich recht einfach mit dem sogenannten *Gronwall-Lemma*, das ebenfalls nicht schwer zu beweisen ist. Dieses Resultat entspricht der in Abschnitt 3 formulierten Wunschvorstellung.

Das *zweite* Ergebnis, das ich zitieren möchte, nimmt Bezug auf *Gleichgewichtslösungen*[13] des gemittelten Systems (38)[14]. Man erhält sie als *Nullstellen* der Funktion $\bar{q}(\bar{x})$. Sei X ein solche Nullstelle, das heisst es gelte

$$\bar{q}(X) = 0 \tag{39}$$

Dann ist

$$\bar{x}(t) = X \quad \text{für alle} \quad t$$

Lösung von (38), denn es gilt

$$\dot{\bar{x}}(t) = \begin{cases} (X)^{\cdot} = 0 \\ \bar{q}(\bar{x}(t)) = \bar{q}(X) = 0 \end{cases}$$

Eine Gleichgewichtslösung bedeutet (wie wir schon früher bemerkt haben, siehe Abschnitt 5): Der Zustand[15] des Systems ändert sich im Laufe der Zeit nicht.

[12] Gemessen z. B. in der Euklidschen Norm, wenn das Problem mehrdimensional ist.

[13] Hinsichtlich verschiedener gleichwertiger Bezeichnungen des Begriffs, siehe Fussnote 6.

[14] Und hat somit auch etwas mit Frage (B) in Abschnitt 6 zu tun.

[15] Der Hintergrund der Terminologie ist folgender. Eine Dgl ist ein *System*, das einen *Vorgang* oder *Prozess* definiert. Eine Lösung beschreibt einen möglichen *Prozessverlauf*. Unter dem *Zustand des Systems*, kurz: dem (*System-*)*Zustand*, zu einem gewissen Zeitpunkt, versteht man den Wert der Lösung zu diesem Zeitpunkt.

Das Gleichgewicht X wird als *nicht-ausgeartet* bezeichnet, wenn die Jacobische Matrix

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{x}}(X) \quad \text{regulär} \tag{40}$$

ist, das heisst ihre Determinante ungleich 0 ist.

Die *Pointe*: *Nicht-ausgeartete Gleichgewichtslösungen des gemittelten Systems* (38) *generieren* 2π-*periodische Lösungen des Dgl-Systems* (37) *und damit auch des Dgl-Systems* (36).

Das heisst genauer folgendes: Zu einer nicht-ausgearteten Gleichgewichtslösung X von (38) gibt es für alle hinreichend kleinen, positiven Werte von ϵ eine in t 2π-periodische Funktion $X(t, \epsilon)$, die Lösung von Gleichung (37) ist und es gilt

$$X(t, \epsilon) \;\longrightarrow\; X \quad \text{für} \quad \epsilon \to 0$$

Zum Beweis betrachtet man die "Poincaré-" oder "Perioden-Abbildung" zum Dgl-System (37) und wendet das Implizite-Funktionen-Theorem aus der Analysis an[16].

Überdies gilt: Ist die Jacobi-Matrix in (40) sogar *hyperbolisch*, das heisst keiner ihrer Eigenwerte liegt auf der imaginären Achse[17], dann zeigen die Lösungen von (37) in der Nähe der periodischen Lösung $X(t, \epsilon)$ das *analoge Verhalten* wie die Lösungen von (38) in der Nähe der Gleichgewichtslösung X.

Insbesondere gilt: Liegen die Eigenwerte der Jacobi-Matrix in (40) in der *linken komplexen Halbebene*[18], dann streben die Lösungen von (37) gegen die periodische Lösung $X(t, \epsilon)$, sofern sie ausreichend nahe bei ihr starten.

Diese letzten beiden Aussagen ergeben sich aus einer Variante des sogenannten *Satzes von Grobman-Hartman*.

Damit haben wir nun einigen Hintergrund um uns mit dem konkreten Beispiel der Duffing-Gleichung zu befassen. Dies geschieht im nächsten Heft dieses Bulletins im Teil: *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2B*. Dort wird das gemittelte System (30) zur Duffing-Gleichung untersucht und es werden einige Folgerungen über die Duffing-Gleichungen gezogen. Im letzten (nur noch kurzen!) Teil: *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil 2C*, wird anhand der Duffing-Gleichung ein (auch erkenntnistheoretisch) hoch interessantes Phänomen erläutert.

Literatur

[1] G. Duffing: *Erzwungene Schwingungen bei veränderlichen Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, 1918.

[2] U. Kirchgraber: *Schwingungen I oder wenn der Vater mit dem Sohn*, VSMP-Bulletin Nr. 128, Mai 2015, p. 24-30, *Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*, VSMP-Bulletin Nr. 129, September 2015, p. 10-19, *Schwingungen III: Die Gleichung von Duffing Teil* 1, VSMP-Bulletin Nr. 130, Januar 2016, p. 24- 31.

[3] M. Lieberherr: *Duffing-Oszillator*, VSMP-Bulletin Nr. 119, Juni 2012, p. 30-32.

[16] Die Perioden-Abbildung ist mit Hilfe des Dgl-Systems (37) wie folgt definiert. Zu einem Punkt $\bar{x}_0$ des $\bar{x}$-Raumes sei $\bar{x}(t, \bar{x}_0, \epsilon)$ die Lösung für die $\bar{x}(0, \bar{x}_0, \epsilon) = \bar{x}_0$ gilt. Die Perioden- oder Poincaré-Abbildung P_ϵ ordnet dem Punkt $\bar{x}_0$ den Wert der Lösung $\bar{x}(t, \bar{x}_0, \epsilon)$ zur Zeit 2π zu, also

$$\bar{x}_0 \quad \longrightarrow \quad P_\epsilon(\bar{x}_0) := \bar{x}(2\pi, \bar{x}_0, \epsilon)$$

Die Pointe: *Fixpunkte* von P_ϵ erzeugen 2π-periodische Lösungen. Ist $\bar{x}_0^\epsilon$ ein Fixpunkt von P_ϵ, dann ist $\bar{x}(t, \bar{x}_0^\epsilon, \epsilon)$ eine 2π-periodische Lösung von (37). Es ist offensichtlich, dass die Nullstellen von $\bar{q}$, siehe (39), Fixpunkte von P_0 sind. Unter der Bedingung (40) können sie mit Hilfe des Impliziten-Funktionen-Theorems aus der Analysis für $\epsilon > 0$, hinreichend klein, fortgesetzt werden. Die Überlegungen in dieser Fussnote sind eng verwandt mit denjenigen im Teil "*Schwingungen II: Die Gleichung von van der Pol*", Abschnitte 7, 8, dieser Artikel-Reihe.

[17] Noch einmal anders formuliert: Die Matrix in (40) hat *keine* rein-imaginären Eigenwerte.

[18] Anders formuliert: Alle Eigenwerte haben nicht-verschwindende negative Realteile.