Mathematik – das unerkannte Vergnügen*

Urs Kirchgraber, kirchgra@math.ethz.ch

1

Wenn Sie, meine Damen und Herren, gern einen Gedanken verfolgen, Freude an einer zündenden Idee haben, ein Aha-Erlebnis geniessen – dann sind Sie in der Mathematik richtig. Dass es in der Mathematik genau darum geht, möchte ich im folgenden anhand einiger Beispiele belegen.

2

Ich beginne mit einer Figur, die jeder kennt: mit der *Pythagoras-Figur*, siehe Abbildung 1. Im Zentrum der Pythagoras-Figur ist ein rechtwinkliges Dreieck D. Die Dreieckseiten, die dem rechten Winkel anliegen, heissen, wie Sie sich vielleicht erinnern: *Katheten*. Die Dreieckseite dem rechten Winkel gegenüber nennt man *Hypotenuse*.

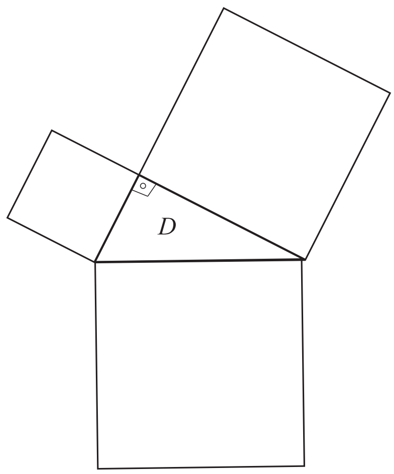

Abbildung 1: Pythagoras-Figur

Es ist klar: Die Katheten *bestimmen* die Hypotenuse. (Kennt man die Kathetenlängen, kann man das Dreieck D konstruieren, somit ist die Hypotenuse und ihre Länge bestimmt.)

Nur: Ist dieser Zusammenhang zwischen Katheten und Hypotenuse einfach, kompliziert, durchschaubar? Die Pythagoras-Figur versucht den Zusammenhang zu signalisieren. Über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks D sind die jeweiligen *Quadrate* errichtet. Man soll, zeigt die Pythagoras-Figur an, seine Aufmerksamkeit auf die Quadrate richten. Zwischen ihnen, deutet die Figur an, bestehe eine überblickbarer Zusammenhang. In der Tat besagt der sogenannte

*Schriftliche Fassung eines Vortrags zur Eröffnung der Volkshochschule Zürich an der Bärengasse am 24. Oktober 2015 im Rahmen der Festveranstaltung "Tanz der Synopsen".

Satz 1 (*Satz von Pythagoras SvP*)
Die beiden Kathetenquadrate zusammen überdecken eine gleich grosse Fläche wie das Hypotenusenquadrat.

Wenn das stimmt, meine Damen und Herren, liegt dieser Zusammenhang gewiss *nicht* auf der Hand. Denken Sie sich die Probe aufs Exempel gemacht:

- Stellen Sie sich vor, die Figur sei konstruiert und die drei Quadrate wären ausgeschnitten.
- Versuchen Sie nun in Gedanken die beiden Kathetenquadrate so aufs Hypotenusenquadrat zu legen, dass dieses exakt zugedeckt wird.

Das klappt natürlich nicht! Sie müssten schon die *Schere* zur Hand nehmen und die Kathetenquadrate in Stücke schneiden.

Aber wie?

3

Der folgende Vorschlag stammt vom Aachener Mathematik-Didaktiker *Heinrich Winter* [1].

Im *ersten Schritt* denkt sich Winter die beiden Kathetenquadrate so hingelegt, dass vier ihrer acht Ecken auf einer geraden Linie g liegen, siehe Abbildung 2. Überdies sollen sich die beiden Kathetenquadrate in einer Ecke berühren.

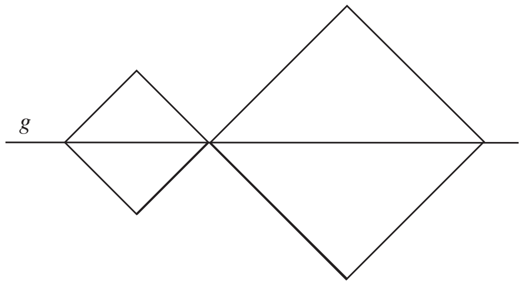

Abbildung 2: Erster Schritt in H. Winters Beweis des SvP: Positionierung der beiden Kathetenquadrate

Die Gerade g zerschneidet die beiden Kathetenquadrate in zwei Paare rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke.

Jetzt hat Winter eine zündende Idee, einen Geistesblitz, a stroke of genius, a revalation, die Muse küsst ihn: Im *zweiten Schritt* vertauscht er die beiden Dreiecke unterhalb der Geraden g, siehe Abbildung 3.

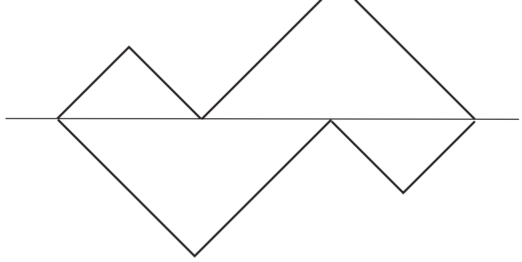

Abbildung 3: Zweiter Schritt in H. Winters Beweis des SvP: Vertauschung der beiden rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecke unterhalb der Geraden g

Meditiert man die entstehende, zunächst durchaus etwas eigenartig anmutende Figur eine Weile, beginnt man sich an ihr zu freuen. Denn Stück um Stück ermöglicht sie ein Aha-Erlebnis: Vier (ehemalige) Kathetenquadrate-Eckpunkte treten hervor, wollen ein *Viereck V* bilden und beachtet werden, siehe Abbildung 4.

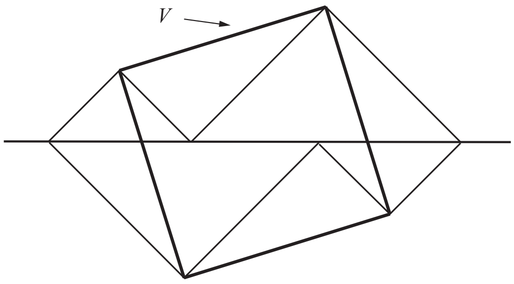

Abbildung 4: H. Winters Beweis des SvP: Das Aha-Erlebnis beginnt sich zu entfalten: Vier Punkte treten hervor, wollen beachtet werden – das Viereck V nimmt Gestalt an

Sie erkennen:

- Die vier Seiten des Vierecks V werden von den *Hypotenusen* von vier *Kopien des Dreiecks D* (jenes Dreiecks im Zentrum der Pythagoras-Figur, siehe Abbildung 1) gebildet.
- Folglich ist das Viereck V zumindest *Rhombus*.
- In Tat und Wahrheit ist V sogar ein *Quadrat*, denn die Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Seiten sind *rechte*: Man sieht, dass die beiden Teile eines solchen Winkels von *Kopien der beiden Basiswinkel* des Dreiecks D gebildet werden. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, der rechte Winkel 90° in Anspruch nimmt, bleibt für die beiden Basiswinkel zusammen ebenfalls 90°.
- Folglich ist das Quadrat V eine *Kopie* des ursprünglichen *Hypotenusenquadrats*. Aha!

Und nun die Coda:

- Die Kopie V des Hypotenusenquadrats in Abbildung 4 ist teilweise von den ursprünglichen Kathetenquadraten überdeckt.
- Aber einerseits gibt es zwei "Löcher" (die beiden Kopien von D an der oberen und an der unteren Hypotenusenquadratseite) und andererseits "lampen" zwei Teile (die beiden Kopien von D an der linken und rechten Seite des Hypotenusenquadrats) darüber hinaus.
- Doch Überhang und Löcher kompensieren sich perfekt: Voilà!

Die *Quintessenz*: Heinrich Winter hat eine *Zerlegung* der beiden Kathetenquadrate eines rechtwinkligen Dreiecks vorgeschlagen, derart, dass die entstehenden "Puzzle"-Teile exakt zum Hypotenusenquadrat umgelegt werden können. Man sagt, die beiden Kathetenquadrate einerseits und das Hypotenusenquadrat andererseits seien *zerlegungsgleich*.

Damit ist Satz 1 *bewiesen*.

In seinem Stück "Leben des Galilei" sagt Bertolt Brecht (1898-1956): "*Die Verführung, die von einem Beweis ausgeht ist gross. Ihr erliegen die meisten, auf die Dauer alle.*"

4

Wenn man einen Erwachsenen, eine Schülerin, einen Schüler nach dem Satz von Pythagoras fragt, wird er oder sie sagen, ach, das ist doch die Geschichte mit $a^2 + b^2 = c^2$ – und wohl kaum etwas übers Zerschneiden von Kathetenquadraten und dergleichen.

Das *Scharnier* zwischen beiden Sichtweisen bildet ein weiterer wichtiger Begriff der Geometrie: der Begriff des *Flächeninhalts* von *ebenen Figuren.* Sie wissen, dass der Begriff so festgelegt ist, dass zum Beispiel gilt: Flächeninhalt eines *Rechtecks* = Länge mal Breite, Flächeninhalt eines *Dreiecks* = Grundlinie mal Höhe dividiert durch 2, usw.

Der Begriff Flächeninhalt ist ein Versuch, den Aspekt "Grösse einer ebenen Figur" durch eine einzige Zahl wenigstens in gewissem Ausmass zu erfassen. Der Begriff Flächeninhalt ist so festgelegt, dass die folgende Aussage gilt:

Satz 2 *Sind zwei Vielecke* (*auch Polygone genannt*) *zerlegungsgleich, so haben sie gleichen Flächeninhalt.*

Interessanterweise gilt auch die sogenannte *Umkehrung* von Satz 2:

Satz 3 (*F. Bolyai, P. Gerwien* 1832/33)
Haben zwei ebene Vielecke gleich grossen Flächeninhalt, so sind sie zerlegungsgleich.

Satz 3 heisst *Satz* von *F. Bolyai* und *P. Gerwien.* Er wurde von den beiden unabhängig voneinander bewiesen und 1832 bzw. 1833 publiziert.

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt, dass die Begriffe "zerlegungsgleich" und "flächeninhaltsgleich" jedenfalls bei ebenen Vielecken absolut *gleichwertig* sind. Ist das nicht bemerkenswert? Der Begriff "Flächeninhalt" reduziert eine Vieleck auf eine einzige Zahl. "Zerlegungsgleichheit" zweier Vielecke hingegen bedeutet, dass man das eine so in "Puzzle-Teile" zerschneiden kann, dass aus den Teilen eine Kopie des zweiten Vielecks zusammen gesetzt werden kann. So betrachtet ist der Begriff "Flächeninhalt" ein (erstaunlich?) starker Begriff.

Beachten Sie überdies, dass der Begriff "zerlegungsgleich" eine sogenannte *Existenzaussage* beinhaltet: Es wird postuliert, dass man eines der Vielecke nehmen kann und dass es dann eine Zerlegung *gibt*, derart dass mit den erhaltenen Teilen eine Kopie des anderen Vielecks "gelegt" werden kann. Es wird nichts darüber gesagt, *wie* diese Zerlegung erhalten werden kann.

5

Mathematikerinnen und Mathematiker lieben Erweiterungen, Weiterentwicklungen, Verallgemeinerungen. Wie sieht es eine Dimension höher aus? Werfen wir einen Blick auf die Situation in drei Dimensionen, also im Raum.

Anstelle der Vielecke oder Polygone treten *Vielflache* (auch *Polyeder* genannt). Das sind Körper, die durch lauter Vielecke begrenzt sind, wobei jede Vieleckseite zu exakt zwei Vielecken gehört. Die geläufigsten Beispiele sind *Würfel*, *Quader*, *Tetraeder*, *Oktaeder*, ... , siehe Abbildung 5.

So wie Polygone zerlegungsgleich sein können, können auch Polyeder zerlegungsgleich sein. Anstelle des Begriffs Flächeninhalt tritt bei Polyedern der Begriff *Rauminhalt* oder *Volumen.* Und ganz analog wie im ebenen Fall, ist der Begriff Volumen so festgelegt, dass der zu Satz 2 analoge Satz gilt:

Satz 4 *Zwei zerlegungsgleiche Polyeder haben gleiches Volumen.*

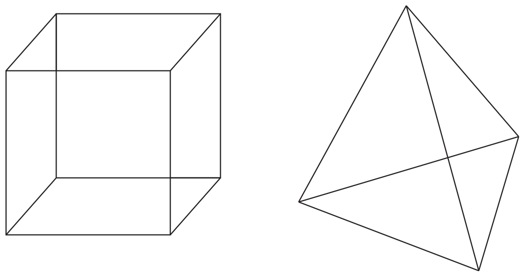

Abbildung 5: Würfel, Teraeder, ...

Natürlich stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung von Satz 4 gilt: *Sind zwei Polyeder mit gleichen Volumina zerlegungsgleich*? Diese Frage formulierte der berühmte deutsche Mathematiker *David Hilbert* (1862-1943) als drittes von insgesamt 23 (damals) offenen mathematischen Problemen auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahr 1900.

Die Antwort auf Hilberts drittes Problem fand recht bald einer seiner Schüler, der junge *Max Dehn* (1878-1952). Sie ist *negativ*:

Satz 5 (*Dehn,* 1901)
Würfel und reguläres Tetraeder sind auch dann nicht zerlegungsgleich, wenn sie gleiches Volumen haben

Der Beweis ist hoch interessant: Er zeigt auf, was verhindern kann, dass volumengleiche Körper zerlegungsgleich sind.

Und was, wenn die von Dehn entdeckte "Obstruktion" *nicht* verletzt ist? Gilt *dann* die Umkehrung? Vielleicht bald einmal Thema in einer VHS-Vorlesung? Da wären auch *Hugo Hadwiger* (1908-1981), viele Jahre anerkannter Mathematikprofessor an der Universität Bern, und *Jean-Pierre Sydler* (1921-1988), Mathematiker und lange Jahre hochgeschätzter Direktor der Hauptbibliothek der ETH, Thema.

6

Kehren wir zum Satz von Pythagoras zurück und zwar in der gängigeren Formulierung: *Im rechtwinkligen Dreieck gilt*:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

wobei a, b die Längen der Katheten, c die Länge der Hypotenuse bezeichnet.

Die eminente Bedeutung dieses Resultats ist, dass es eine *Zusammenhang* zwischen *Geometrie* und *Rechnen* herstellt. Es erlaubt jederzeit aus der Kenntnis der Längen von zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Länge der dritten Seite zu berechnen, *sofern* man neben den

$$\text{Grundrechnungsarten: } +,\ -,\ \cdot,\ \div$$

das

$$\text{Ziehen von (Quadrat-)Wurzeln}$$

beherrscht.

Wenn Sie der Meinung sind, dass das nichts besonders Aufregendes sei, dann möchte ich immerhin darauf hinweisen, dass GPS, also das *Global Positioning System*, darauf beruht.

Die Technik ermöglich Ihrem GPS-Empfänger zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort auf, oder in der Nähe der Erde, die Position von mindestens drei Satelliten zu ermitteln und seine Distanzen zu diesen, siehe Abbildung 6. Daher weiss Ihr GPS-Empfänger, dass Sie sich *gleichzeitig* auf 3 *Kugeloberflächen*

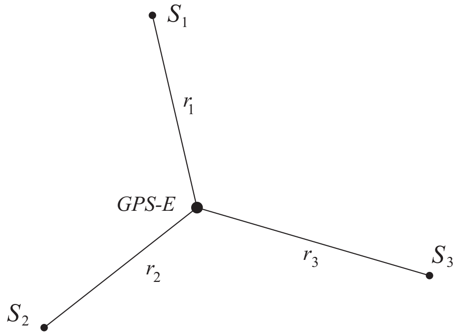

Abbildung 6: $GPS - E$: Ihr GPS-Empfangsgerät, S_1, S_2, S_3 drei gleichzeitig (elektronisch) sichtbare Satelliten, r_1, r_2, r_3 ihre Distanzen vom $GPS - E$.

befinden und auf welchen. Um Ihnen Ihre Position melden zu können, muss Ihr GPS-Empfänger die Schnittpunkte der drei Kugeloberflächen bestimmen[1]. Dazu nutzt es fleissig den Satz von Pythagoras.

GPS? Ja klar – nicht nur Dank des SvP. Aber nicht ohne SvP!

7

Wenn Sie, meine Damen und Herren, gern einen Gedanken verfolgen, Freude an einer zündenden Idee haben, ein Aha-Erlebnis geniessen – dann sind Sie in der Mathematik richtig. Ich lade Sie herzlich ein, die kommenden VHS-Veranstaltungen in Mathematik zu besuchen!

Literatur

[1] H. Winter *Mathematikunterricht und Allgemeinbildung* Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GdM), 61 (1995), p.37-46.

[1] Die Satelliten kennen ihre Position zu jedem Zeitpunkt sehr genau. Sie übermitteln sie an den GPS-Empfänger. Aus der Zeit, die ein Signal vom Satelliten zum GPS-Empfänger benötigt, kann auf die Distanz geschlossen werden. Während die Satelliten mit hochpräzisen und daher teuren Atomuhren ausgestattet sind, arbeiten die Empfangsgeräte mit vergleichsweise billigen und deshalb relativ unpräzisen Quarzuhren. Daher müssen zur Ortung einer Position mindestens vier Satelliten benutzt werden, was die Bedeutung des SvP in keiner Weise tangiert.