Morley: „Kreisketten“ und komplexe Zahlen (3. Teil)

Peter Thurnheer, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, tpeter@math.ethz.ch

In diesem 3. Teil geht es für Liebhaber längerer formaler, aber inhaltlich äusserst raffinierter und eleganter Argumentation um den Beweis des dritten, in Teil 1 formulierten Clifford–Morleyschen Satzes. Benützt wird dabei wieder die im 2. Teil vorbereitete Methode.

Beweis Satz 3

Wir brauchen folgende Begriffe und Aussagen:

Die *elementarsymmetrische Funktion* $S_k(x_1, \ldots, x_m)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, ist die Summe aller Produkte mit k Faktoren von Argumenten $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Bezeichnet S_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, die elementarsymmetrischen Funktionen von m Variablen, so bezeichnen wir mit $S_k^\star$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, die elementarsymmetrischen Funktionen von $m-1$ Variablen. Brauchen werden wir, dass mit $S_0^\star = 1$ und $S_m^\star = 0$ gilt

$$x_m S_{k-1}^\star(x_1, \ldots, x_{m-1}) + S_k^\star(x_1, \ldots, x_{m-1}) = S_k(x_1, \ldots, x_m), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{17}$$

Eine Gleichung nennt man *selbstkonjugiert*, wenn sie äquivalent ist zur Gleichung, die man erhält, wenn man in ihr die Koeffizienten durch ihre Konjugiertkomplexen und die Variable durch ihren Kehrwert ersetzt.

Ein Gleichungssystem nennen wir *konjugiert*, wenn es in ein äquivalentes über geht, falls man die Koeffizienten durch ihre Konjugiertkomplexen und die Unbekannten durch ihre Reziproken ersetzt.

Offensichtlich gilt für eine Lösung x einer selbstkonjugierten Gleichung $\overline{x} = \frac{1}{x}$.

Die Lösungen einer selbstkonjugierten Gleichung sind Turns.

Analog gilt:

Die Lösungsmenge eines konjugierten Gleichungssystems besteht aus Turns.

Wir beweisen Satz 3 und beschreiben die Cliffordkreise und -Punkte mit Hilfe der charakteristischen Konstanten (siehe Teil 2) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ der zugrunde liegenden (m)–Konfiguration.

Der Cliffordpunkt einer $(2p)$–Konfiguration, $p \geq 2$, ist der Punkt c, für den gilt

$$\begin{vmatrix} a_1 - c & a_2 & \cdots & a_p \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & a_{p+1} & \cdots & a_{2p-1} \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Der Cliffordkreis einer $(2p+1)$–Konfiguration, $p \geq 2$, ist der Kreis

$$\begin{vmatrix} a_1 - z(t) & a_2 & \cdots & a_p \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p & a_{p+1} & \cdots & a_{2p-1} \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \cdots & a_{p+1} \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_{p+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p+1} & a_{p+2} & \cdots & a_{2p} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Wir werden benützen, dass sich (18) respektive (19) ergibt aus folgender Aussage (20) respektive (21).

Der Cliffordpunkt einer $(2p)$–Konfiguration wird definiert durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lr} c = a_1 - a_2 s_1 + a_3 s_2 - + \cdots \pm a_p s_{p-1}, & (0) \\ 0 = a_2 - a_3 s_1 + a_4 s_2 - + \cdots \pm a_{p+1} s_{p-1}, & (1) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots \\ 0 = a_p - a_{p+1} s_1 + a_{p+2} s_2 - + \cdots \pm a_{2p-1} s_{p-1}, & (p-1) \\ \\ s_k = S_k^\star(t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, p-1. & \end{array}\right\} \quad (20)$$

Der Cliffordkreis einer $(2p+1)$–Konfiguration wird definiert durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lr} z(t) = a_1 - a_2 s_1 + a_3 s_2 - + \cdots \pm a_{p+1} s_p, & (0) \\ 0 = a_2 - a_3 s_1 + a_4 s_2 - + \cdots \pm a_{p+2} s_p, & (1) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots \\ 0 = a_p - a_{p+1} s_1 + a_{p+2} s_2 - + \cdots \pm a_{2p} s_p, & (p-1) \\ s_k = S_k^\star(t, t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, p, & t \in \mathbb{E}. \end{array}\right\} \quad (21)$$

Zu verstehen ist dies in folgendem Sinn:

(20): Es gibt Turns $t_1, \ldots, t_{p-1}$ welche $(20)_{(1)}$ bis $(20)_{(p-1)}$ erfüllen. Das System ist nämlich gemäss (7) für $k = 2p$ konjugiert. Setzt man diese Turns in $(20)_{(0)}$ ein, so erhält man den Cliffordpunkt c.

(21): Zu jedem Turn $t \in \mathbb{E}$ existieren Turns $t_1, \ldots, t_{p-1}$ welche $(21)_{(1)}$ bis $(21)_{(p-1)}$ erfüllen. Dieses System ist nämlich bei gegebenem $t \in \mathbb{E}$ gemäss (7) für $k = 2p+1$ konjugiert. Setzt man diese Werte in $(21)_{(0)}$ ein, so erhält man einen Punkt $z(t)$ des Cliffordkreises.

Immer wenn wir im Folgenden die Formulierungen unter (20) oder (21) benützen, sind sie in diesem Sinn zu verstehen.

Dass die Aussage (18) aus (20) folgt, sieht man, indem man in $(20)_{(0)}$ beidseits c subtrahiert. Dann erhält das Gleichungssystem die Form

$$\underline{b}_0 - \underline{b}_1 s_1 + \underline{b}_2 s_2 - + \ldots \pm \underline{b}_{p-1} s_{p-1} = \underline{0}.$$

Die Vektoren $\underline{b}_0, \underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_{p-1}$ sind linear abhängig, die Determinante der Matrix mit diesen Spaltenvektoren, d.h. die linke Seite der Gleichung (18), verschwindet.
Analog zeigt man, dass (21) die Aussage (19) impliziert. Wie oben folgt aus (21)

$$\begin{vmatrix} a_1 - z(t) \pm a_{p+1} s_p & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \\ a_2 \pm a_{p+2} s_p & a_3 & a_4 & \cdots & a_{p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p \pm a_{2p} s_p & a_{p+1} & a_{p+2} & \cdots & a_{2p-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus ergibt sich (19), aufgrund der Linearität in den Spaltenvektoren der Determinante, wenn man beachtet, dass $\pm s_p = \pm t t_1 \cdots t_{p-1}$ ein Turn ist, den wir wieder mit t bezeichnen.

Beweis von (18) und (19) respektive (20) und (21) mit *vollständiger Induktion* über die Anzahl Geraden in der Konfiguration.

Verankerung: Die Umkreise der vier (3)–Konfigurationen einer (4)–Konfiguration sind nach (12) die Zentrumskreise der (3)–Konfigurationen. Sie schneiden sich nach Satz 2 im Punkt $w = a_1 - \frac{a_2\overline{a}_3}{\overline{a}_2}$. Das heisst, der Cliffordpunkt c einer (4)–Konfiguration fällt mit dem Zentrumspunkt w zusammen. Nach (7) und (8) für $k = 4$ gilt $w = c = a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}$ und ist $s_1 = S_1^\star(t_1) = t_1 = \frac{a_2}{a_3}$ ein Turn.
Also gilt

$$\begin{vmatrix} c = a_1 - a_2 s_1 \\ 0 = a_2 - a_3 s_1 \end{vmatrix}, \qquad s_1 = S_1^\star(t_1).$$

Der Cliffordpunkt der (4)–Konfiguration wird definiert durch das Gleichungssystem (20) für $p = 2$, was die Induktion verankert.

Der Induktionsschritt ist in zwei Teilschritten durchzuführen.

Induktionsvoraussetzung I: Der Cliffordpunkt einer $(2p)$–Konfiguration wird definiert durch das Gleichungssystem (20).

Entfernt man aus einer $(2p+1)$–Konfiguration eine Gerade x_j, so entsteht eine $(2p)$–Konfiguration mit Cliffordpunkt c_j und, nach (9), mit charakteristischen Konstanten $a_k - a_{k+1}\tau_j$, $k = 1, 2, \ldots, 2p$. Das Gleichungssystem (20), welches nach Induktionsvoraussetzung den Cliffordpunkt c_j definiert, wird damit, wenn man (17) beachtet,

$$\begin{aligned} c_j &= a_1 - a_2 s_1 + a_3 s_2 - + \cdots \mp a_{p+1} s_p, \\ 0 &= a_2 - a_3 s_1 + a_4 s_2 - + \cdots \mp a_{p+2} s_p, \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ 0 &= a_p - a_{p+1} s_1 + a_{p+2} s_2 - + \cdots \mp a_{2p} s_p, \end{aligned}$$

$$s_k = S_k(\tau_j, t_1, \ldots, t_{p-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, p.$$

Wählt man somit in (21) $t = \tau_j$, so wird $z(t) = z(\tau_j) = c_j$. Der Punkt c_j liegt *für alle* j auf dem Kreis definiert durch (21) respektive (19). Das Gleichungssystem (21) definiert den Cliffordkreis, was zu zeigen war.

Den zweiten Teilschritt rechnen wir zuerst im einfachsten Fall explizit durch, da dabei die wesentlichen Ideen des Beweises besonders deutlich zu erkennen sind.

Induktionsvoraussetzung II*: Der Cliffordkreis einer (5)–Konfiguration wird definiert durch die Gleichungen (21) für $p = 2$:

$$\begin{aligned} z(t) &= a_1 - a_2(t + t_1) + a_3 t t_1, \\ 0 &= a_2 - a_3(t + t_1) + a_4 t t_1, \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{E}. \tag{22}$$

Entfernt man aus einer (6)–Konfiguration eine Gerade x_j, so erhält man eine (5)–Konfiguration mit charakteristischen Konstanten $a_k - a_{k+1}\tau_j$, $k = 1, 2, \ldots, 5$. Die Gleichungen (22), welche nach Induktionsvoraussetzung den Cliffordkreis der reduzierten Konfiguration definieren, werden damit

$$z(t) = a_1 - a_2(t + t_1 + \tau_j) + a_3(t t_1 + t\tau_j + t_1\tau_j) - a_4 t t_1 \tau_j, \tag{23}$$

$$0 = a_2 - a_3(t + t_1 + \tau_j) + a_4(t t_1 + t\tau_j + t_1\tau_j) - a_5 t t_1 \tau_j, \qquad t \in \mathbb{E}. \tag{24}$$

Es gibt Turns $\widehat{t}, \widehat{t}_1$ mit

$$0 = a_2 - a_3(\widehat{t} + \widehat{t}_1) + a_4 \widehat{t}\widehat{t}_1, \tag{25}$$

$$0 = a_3 - a_4(\widehat{t} + \widehat{t}_1) + a_5 \widehat{t}\widehat{t}_1, \tag{26}$$

denn diese Gleichungen bilden nach (7) für $k = 6$ ein konjugiertes System.
Subtrahiert man das τ_j–fache der Gleichung (26) von (25), so erhält man (24). Wählt man also in

(24) $t = \widehat{t}$, so wird $t_1 = \widehat{t}_1$, und wenn man diese Werte in (23) einsetzt, erhält man einen Punkt des Cliffordkreises
$$z_j(\widehat{t}) = a_1 - a_2(\widehat{t} + \widehat{t}_1 + \tau_j) + a_3(\widehat{t}\widehat{t}_1 + \widehat{t}\tau_j + \widehat{t}_1\tau_j) - a_4\widehat{t}\widehat{t}_1\tau_j.$$
Subtrahiert man davon das τ_j–fache von (25), so wird
$$z_j(\widehat{t}) = c = a_1 - a_2(\widehat{t} + \widehat{t}_1) + a_3\widehat{t}\widehat{t}_1 \tag{27}$$
unabhängig von j. Der Punkt c liegt auf allen sechs Cliffordkreisen, es ist der Cliffordpunkt der (6)–Konfiguration, und er wird definiert durch die Gleichungen (27) und (25), (26), also durch das Gleichungssystem (20) für $p = 3$. Das war zu zeigen.

Induktionsvoraussetzung II: Der Cliffordkreis einer $(2p + 1)$–Konfiguration wird definiert durch das Gleichungssystem (21).

Entfernt man eine Gerade x_j aus einer $(2p+2)$–Konfiguration, erhält man eine $(2p+1)$–Konfiguration mit den charakteristischen Konstanten $a_k - a_{k+1}\tau_j$, $k = 1, 2, \dots, 2p + 1$.
Aufgrund der Induktionsvoraussetzung wird ihr Cliffordkreis, wenn man noch (17) beachtet, damit definiert durch die Gleichungen
$$\begin{array}{lr} z_j(t) = a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \cdots \mp a_{p+2}s_{p+1}, & (0) \\ \quad 0 = a_2 - a_3s_1 + a_4s_2 - + \cdots \mp a_{p+3}s_{p+1}, & (1) \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ \quad 0 = a_p - a_{p+1}s_1 + a_{p+2}s_2 - + \cdots \mp a_{2p+1}s_{p+1}, & (p-1) \end{array} \tag{28}$$
$$s_k = S_k(t, t_1, t_2, \dots, t_{p-1}, \tau_j), \qquad k = 1, 2, \dots, p + 1, \qquad t \in \mathbb{E}.$$
Es gibt Turns $\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}$ so, dass gilt
$$\begin{array}{lr} 0 = a_2 - a_3s_1 + a_4s_2 - + \cdots \pm a_{p+2}s_p, & (1) \\ 0 = a_3 - a_4s_1 + a_5s_2 - + \cdots \pm a_{p+3}s_p, & (2) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ 0 = a_{p+1} - a_{p+2}s_1 + a_{p+3}s_2 - + \cdots \pm a_{2p+1}s_p, & (p) \end{array} \tag{29}$$
$$s_k = S_k^\star(\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}), \qquad k = 1, 2, \dots, p,$$
denn das System (29) ist gemäss (7) für $k = 2p + 2$ konjugiert.
Subtrahiert man das τ_j–fache der Gleichung $(29)_{(k)}$ von $(29)_{(k-1)}$, und beachtet (17), so erhält man die Gleichung $(28)_{(k-1)}$, $k = p, p-1, \dots, 2$. Wählt man also in (28) $t = \widehat{t}$, so wird $t_m = \widehat{t}_m$, $m = 1, 2, \dots, p-1$, und wenn man diese Werte in $(28)_{(0)}$ einsetzt, erhält man einen Punkt des Cliffordkreises
$$z_j(\widehat{t}) = a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \cdots \mp a_{p+2}s_{p+1},$$
$$s_k = S_k(\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}, \tau_j), \quad k = 1, 2, \dots, p + 1.$$
Subtrahiert man davon das τ_j–fache der Gleichung $(29)_{(1)}$, so wird mit (17)
$$\begin{array}{c} z_j(\widehat{t}) = c = a_1 - a_2s_1 + a_3s_2 - + \cdots \pm a_{p+1}s_p, \\ s_k = S_k^\star(\widehat{t}, \widehat{t}_1, \dots, \widehat{t}_{p-1}), \quad \textit{unabhängig von } j, \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{array} \tag{30}$$
Der Punkt c liegt auf allen Cliffordkreisen; es ist der Cliffordpunkt der $(2p + 2)$–Konfiguration und er wird definiert durch die Gleichungen (30) und (29), das heisst durch das Gleichungssystem (20) mit $p + 1$ anstelle von p. Das war zu zeigen.

Bemerkung. Natürlich gibt es Ausnahmesituationen, in denen die obigen Argumente versagen und die Cliffordkette abbricht oder ausartet. Wir gehen hier nicht auf diese ein. Man findet Bemerkungen dazu in [9, 10].

Beweis Zusatz

Der Zentrumskreis einer (4)–Konfiguration ist gemäss Satz 1 der Kreis

$$z(t) = a_1 - a_2 t, \quad t \in \mathbb{E};$$

der Cliffordpunkt gemäss (18) der Punkt $c = a_1 - \frac{a_2^2}{a_3}$. Dieser liegt aber offensichtlich auf dem Kreis, denn die Zahl $t = \frac{a_2}{a_3}$ ist gemäss (8) für $k = 4$ ein Turn, und, wenn man diesen in die Kreisgleichung einsetzt, erhält man c.

Der Zentrumspunkt einer (5)–Konfiguration ist nach Satz 2, wenn man (7) für $k = 5$ beachtet, der Punkt $w = a_1 - \frac{a_2 \overline{a}_3}{\overline{a}_2} = a_1 - \frac{a_2 a_3}{a_4}$.
Die Gleichung des Cliffordkreises ist nach (19) für $p = 2$

$$z(t) = \frac{1}{a_3}\big(a_1 a_3 - a_2^2 - (a_2 a_4 - a_3^2)t\big), \quad t \in \mathbb{E}.$$

Aber nach (8) für $k = 5$ ist $t_0 = -\frac{a_2}{a_4}$ ein Turn. Für diesen Wert wird der Cliffordkreis–Punkt $z(t_0) = w$, was zu zeigen war.

Schlussbemerkung

Schon für (6)–Konfigurationen lassen sich die in den Sätzen beschriebenen Situationen und Zusammenhänge kaum mehr in Figuren darstellen, während die rein formalen Argumente — die insbesondere für Satz 3 doch sehr raffiniert sind — die Aussagen sofort für eine beliebige Anzahl Geraden beweisen. Die Ueberlegungen Morleys geben ein besonders schönes Beispiel für das, was man „die Macht der Formel“ nennen könnte.

Literatur

[9] W.B. Carver. The Failure of the Clifford Chain. *Amer. J. Math.*, 42(3):137–167, 1920.

[10] S. Kantor. Die Tangentengeometrie an der Steinerschen Hypercycloide. *Sitzungsberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Wien*, 78:204–232, 1878.