Anregungen zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung

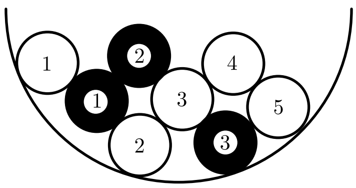
Marc von Wattenwyl, Swiss International School Zürich,
marc.vonwattenwyl@swissinternationalschool.ch

In diesem Beitrag wird für Zufallsversuche mit zwei Ereignissen eine vereinte grafische Darstellung des Mengendiagramms und der beiden Baumdiagramme präsentiert und zur Problemlösung eingesetzt. Es wird gezeigt, dass eine vertiefte Behandlung der Zufallsversuche mit zwei Ereignissen zu interessanten Problemstellungen für den Unterricht führt.

1 Grafische Darstellung für Zufallsversuche mit zwei Ereignissen

Bei einem Zufallsversuch mit zwei Ereignissen treten ganz natürlich acht bedingte Wahrscheinlichkeiten auf, die sich in zwei Baumdiagrammen grafisch darstellen lassen. Das Mengendiagramm und diese beiden Baumdiagramme lassen sich in einem räumlichen Modell vereint darstellen, wenn man eine geschickte Anordnung der Pfade in den Baumdiagrammen wählt.

Beispiel 1 - In einer Urne sind 5 weisse und 3 schwarze Kugeln. Die weissen Kugeln sind von 1 bis 5 nummeriert, die schwarzen von 1 bis 3. Es wird eine Kugel gezogen, wobei die Wahl zufällig und für alle Kugeln gleichwahrscheinlich ist.



Wir betrachten die Ereignisse

A: *Die gezogene Kugel ist schwarz.*
B: *Die gezogene Kugel hat die Nummer 1.*

Durch Abzählen findet man

$$P(A) = \frac{3}{8} \qquad \text{und} \qquad P(B) = \frac{2}{8}$$

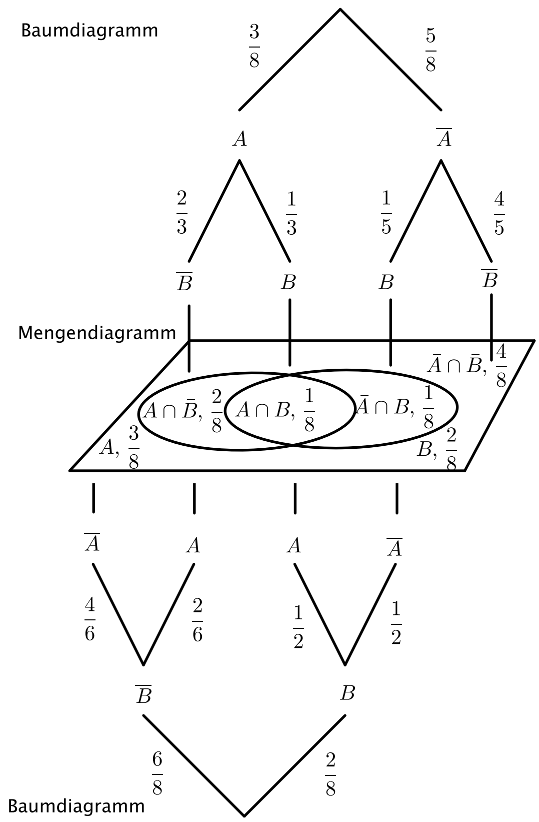
$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{8} \quad \text{und} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{8} \quad \text{und} \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{4}{8}$$

sowie

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad P(\bar{B}|A) = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{4}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(\bar{A}|B) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(A|\bar{B}) = \frac{2}{6} \quad \text{und} \quad P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{4}{6}$$

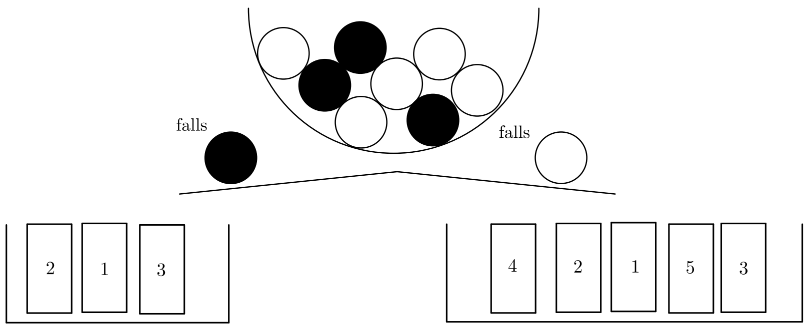
Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich in einem räumlichen Modell, das man Baum-/Mengendiagramm nennen mag, darstellen.



2 Berechnungen im Baum-/Mengendiagramm

Die im Baum-/Mengendiagramm geltenden rechnerischen Zusammenhänge sind bekanntlich die Beziehungen $P(E) + P(\bar{E}) = 1$ respektive $P(E|F) + P(\bar{E}|F) = 1$, der Satz über bedingte Wahrscheinlichkeiten $P(F) \cdot P(E|F) = P(E \cap F)$ (1. Pfadregel) sowie die axiomatische Bedingung $P(E \cup F) = P(E) + P(F) \Leftrightarrow E, F$ disjunkt (2. Pfadregel).

Beispiel 2 - In einer Urne sind 5 weisse und 3 schwarze Kugeln. In Schachtel 1 sind 3 Karten, die von 1 bis 3 nummeriert sind, in Schachtel 2 sind 5 Karten, die von 1 bis 5 nummeriert sind. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Wenn diese Kugel schwarz ist, so nimmt man aus Schachtel 1 eine Karte, wenn die Kugel weiss ist, so nimmt man aus Schachtel 2 eine Karte.



Beispiel 2 ist eine zweistufige Variante von Beispiel 1. Betrachten wir die Ereignisse

A: *Die bei der 1. Ziehung gezogene Kugel ist schwarz.*
B: *Die bei der 2. Ziehung gezogene Karte hat die Nummer 1.*

Durch Abzählen lassen sich nun lediglich Wahrscheinlichkeiten im oberen Baumdiagramm angeben

$$P(A) = \frac{3}{8} \qquad \text{sowie} \qquad P(B|A) = \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad P(B|\bar{A}) = \frac{1}{5}$$

Die Wahrscheinlichkeiten im Mengendiagramm und im unteren Baumdiagramm müssen mit den Pfadregeln berechnet werden.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{8} \qquad \text{und} \qquad P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{8}$$

$$\text{und somit} \qquad P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$$

$$\text{sowie } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{2}{8}} = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{6}{8}} = \frac{2}{6}$$

Wie zu erwarten war, erhält man exakt dieselben Wahrscheinlichkeiten wie in Beispiel 1. Aus Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist es nämlich unerheblich, ob der Zufall nur einmal oder zweimal wirkt.

Bemerkung - In Lehrbüchern sind oft nur Beispiele vom Typ des Beispiels 2 vertreten. Bei diesen Beispielen stammen die gegebenen Wahrscheinlichkeiten alle aus dem oberen Baumdiagramm. Interessante Rechenbeispiele entstehen aber erst, wenn man diese Einschränkung fallen lässt.

Beispiel 3 - Joe kommt hin und wieder zu spät zur Schule. Grund sei der verspätete Zug, so Joe, und begründet

- Wenn der Zug Verspätung hat, schaffe ich es nur jedes dritte Mal rechtzeitig zur Schule.
- Wenn ich rechtzeitig bin, war der Zug mit 94%-iger Wahrscheinlichkeit auch pünktlich.
- Der Fall, dass der Zug rechtzeitig ist und ich zu spät zur Schule komme, kommt durchschnittlich nur einmal alle 15 Tage vor.

Die Lehrerin ist skeptisch. Zu Recht ? Wir definieren folgende Ereignisse:

A: *Der Zug ist pünktlich.*
B: *Joe kommt rechtzeitig zur Schule.*

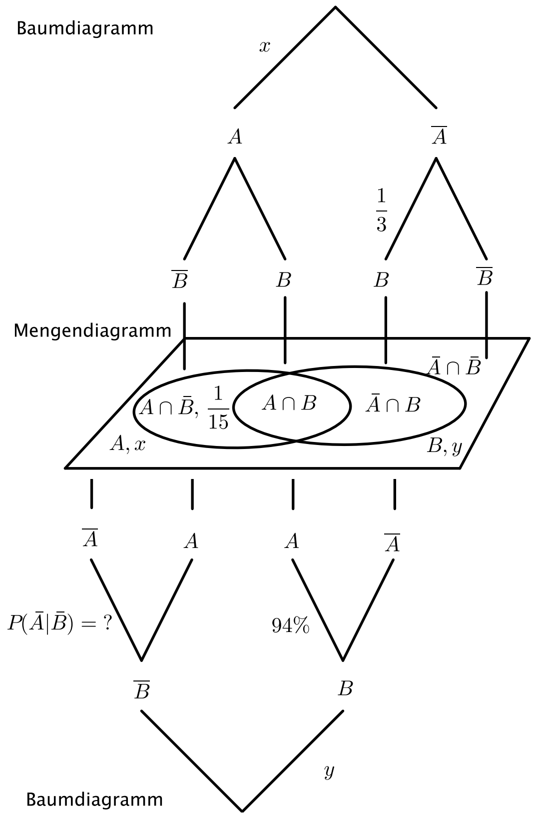
Die gegebenen Wahrscheinlichkeiten sind

$$P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}, \quad P(A|B) = 94\%, \quad P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{15}$$

Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug Verspätung hatte, wenn Joe zu spät zur Schule kommt, also die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(\bar{A}|\bar{B})$$

Die gegebenen Wahrscheinlichkeiten und die gesuchte Wahrscheinlichkeit werden nun im Baum-/Mengendiagramm eingetragen. Beim vorliegenden Problem muss zunächst ein Gleichungssystem mit den Hilfsvariablen $x = P(A)$ und $y = P(B)$ gelöst werden, bevor die gesuchte Grösse berechnet werden kann.



Die Wahrscheinlichkeit $P(A\cap B)$ lässt sich sowohl durch x als auch durch y ausdrücken

$$P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap\bar{B}) = x - \frac{1}{15} \qquad \text{und} \qquad P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B) = y\cdot 94\%$$

Daraus erhalten wir eine erste Gleichung in x und y. Ebenso lässt sich $P(\bar{A}\cap B)$ durch x und auch durch y ausdrücken

$$P(\bar{A}\cap B) = P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A}) = (1-x)\cdot\frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad P(\bar{A}\cap B) = P(B)\cdot P(\bar{A}|B) = y\cdot 6\%$$

Daraus erhalten wir die 2. Gleichung in x und y und somit folgendes lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} I & x - \frac{1}{15} = y\cdot 94\% \\ II & (1-x)\cdot\frac{1}{3} = y\cdot 6\% \end{array}\right\}$$

mit der Lösung $(x/y) = (\frac{17}{20}/\frac{5}{6})$ und somit

$$P(A) = \frac{17}{20} \qquad \text{und} \qquad P(B) = \frac{5}{6}$$

Nun gilt

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{3}{20}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{10}$$

und somit die gesuchte Grösse

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}} = 60\%$$

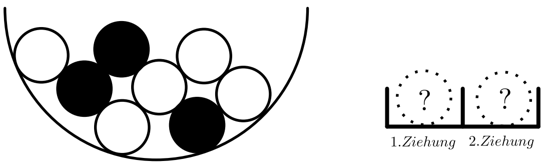
ein Wert, der den Schüler Joe nur teilweise entlastet ....

Bemerkung - Die beiden Beispiele zeigen, dass sich alle Wahrscheinlichkeiten im Baum-/Mengendia-gramm berechnen lassen, wenn drei Wahrscheinlichkeiten vorgegeben sind. Diese Beobachtung lässt sich an vielen weiteren Beispielen bestätigen und schliesslich auch formal beweisen.

3 Vereinfachungen des Baum-/Mengendiagramms

Beispiel 4 - Eine Urne enthält 3 schwarze und 5 weisse Kugeln. Man zieht nacheinander zwei Kugeln und legt sie beiseite. Wir betrachten die Ereignisse

$S1$: *Die Kugel, die als erstes gezogen wird, ist schwarz.*
$S2$: *Die Kugel, die als zweites gezogen wird, ist schwarz.*



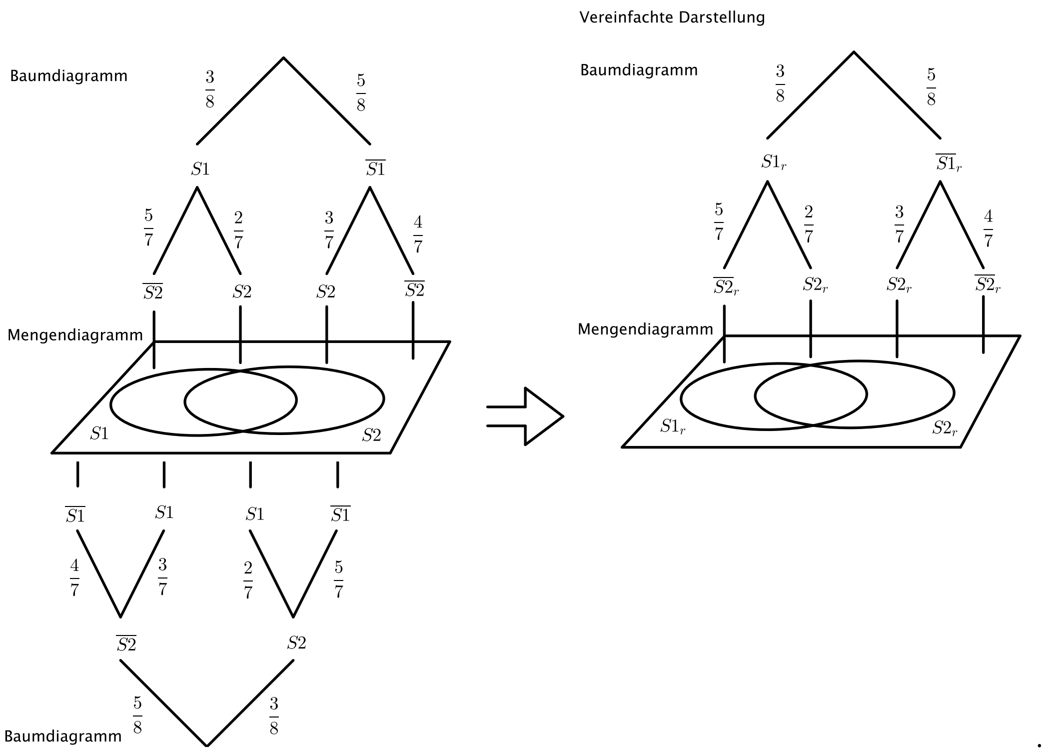
Durch Abzählen lassen sich die Wahrscheinlichkeiten im oberen Baumdiagramm angeben

$$P(S1) = \frac{3}{8} \qquad \text{sowie} \qquad P(S2|S1) = \frac{2}{7} \qquad \text{und} \qquad P(S2|\overline{S1}) = \frac{3}{7}$$

Es gilt dann

$$P(S2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{8} = P(S1)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel gezogen wird, ist somit bei beiden Ziehungen gleich gross[1]. Das vollständige Baum-/Mengendiagramm sieht dann wie folgt aus (links)

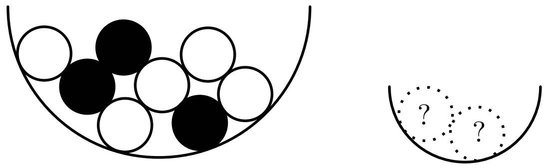


Die beiden identischen Baumdiagramme bringen zum Ausdruck, dass die Unterscheidung zwischen der ersten und zweiten Ziehung unwesentlich ist. Dies motiviert eine Neudefiniton der Ereignisse

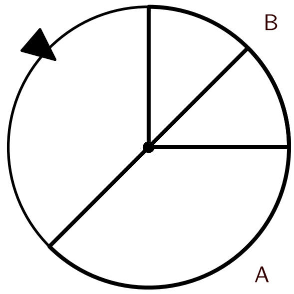
$S1_r$: *Die Kugel, deren Farbe als erstes registriert wird, ist schwarz.*
$S2_r$: *Die Kugel, deren Farbe als zweites registriert wird, ist schwarz.*

[1]Wenn wir die 1. Kugel ziehen *ohne* deren Farbe zu registrieren, beträgt die Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Ziehung eine schwarze Kugel zu ziehen also $\frac{3}{8}$. Der Umkehrschluss, dass im Moment der zweiten Ziehung 3 von 8 Kugeln schwarz sind, ist jedoch nicht zulässig. Paradox ?

und eine veränderte Sichtweise des Zufallsversuchs. Die beiseite gelegten Kugeln werden nicht in der Reihenfolge der Ziehung abgelegt, sondern blind in eine zweite Schale gelegt. Die Farbe registrieren wir erst, wenn wir die Kugeln aus dieser zweiten Schale nehmen und anschauen. Zu den Ereignissen $S1_r$ und $S2_r$ gehört dann die vereinfachte Darstellung mit nur einem Baumdiagramm. Das zweite Baumdiagramm kommt nicht vor, da $S2_r$ per Definition nicht vor $S1_r$ eintreten kann.



Beispiel 5 - Auf einem Glücksrad sind die Sektoren A und B gezeichnet. Sektor A ist ein Halbkreis, Sektor B ein Viertelkreis. Zudem halbiert Sektor A den Sektor B. Ein Ereignis, etwa das Ereignis A, tritt ein, wenn der Zeiger bei Stillstand auf den entsprechenden Sektor zeigt. Das Glücksrad werde einmal gedreht.



Wegen $P(A) = P(A|B) = \frac{1}{2}$ sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig. In diesem Fall verlieren die Baumdiagramme ihren eigentlichen Zweck - die grafische Darstellung bedingter Wahrscheinlichkeiten - und das Mengendiagramm wäre ausreichend zur grafischen Darstellung der wesentlichen Wahrscheinlichkeiten. Um grafisch ersichtlich zu machen, dass die Ereignisse stochastisch unabhängig sind, ist es dennoch sinnvoll, eines der beiden Baumdiagramme zu zeichnen.