Rundfahrt mit dem Fahrrad bei Wind

Peter Gallin, p.gallin@sunrise.ch

Gegenwind beim Fahrradfahren ist unangenehm. Gerne tröstet man sich damit, dass man sich für die Rückfahrt Rückenwind verspricht. Dass dieser aber niemals die bei der Hinfahrt verlorene Zeit wettmachen kann, wird in der Schule manchmal explizit berechnet, allerdings meistens mit dem Beispiel eines Schwimmers in einem Fluss.

Zunächst wollen wir ein paar Annahmen festlegen, damit eine möglichst einfache Modellierung und anschliessende Rechnung möglich wird. Der Fahrradfahrer mitsamt Fahrrad fährt auf einer perfekten horizontalen Ebene und soll die Form eines vertikalen Zylinders haben. Damit erreichen wir, dass er bei einer als horizontal angenommenen Windrichtung immer den gleichen Widerstandsbeiwert besitzt, unabhängig von der Richtung, aus der der Wind weht.

1. Unrealistische Vorstudie: Fahrradfahrer mit Propellerantrieb

Um den Zusammenhang mit einem Schwimmer in einem Fluss oder einem Zeppelin in bewegter Luft zu erkennen, wollen wir zuerst die unrealistische Annahme treffen, dass der Fahrradfahrer wie auf einem Luftkissen reibungsfrei längs einer Schiene gleitet und nur durch einen Propeller sich antreiben kann. Das hat zur Folge, dass er gegenüber der stehenden Luft stets die gleiche Geschwindigkeit v_0 erreicht. Weht ein exakter Gegenwind mit der Geschwindigkeit w, so wird er, falls der Antrieb abgeschaltet ist, mit der Luftmasse mit der Geschwindigkeit w gegenüber dem Boden weggetragen, genauso wie das bei einem Zeppelin in bewegter Luft oder einem Schwimmer im Fluss der Fall ist. Mit eingeschaltetem Antrieb bewegt sich dieser abstrakte Fahrradfahrer also bei Gegenwind mit der Geschwindigkeit $v_0 - w$ und bei Mitwind mit der Geschwindigkeit $v_0 + w$ gegenüber dem Boden. Nun nehmen wir an, der Fahrradfahrer bewege sich zuerst eine gewisse Strecke s mit genau seiner Richtung entgegengesetzem Wind ($0 \leq w < v_0$) und anschliessend die gleiche Strecke zurück. Er benötigt bei der Hinfahrt die Zeit $t_a = \frac{s}{v_0 - w}$ und bei der Rückfahrt die Zeit $t_b = \frac{s}{v_0 + w}$. Für die zwei Etappen mit Hin- und Rückfahrt zusammen ergibt sich also die Gesamtzeit

$$T_2 = t_a + t_b = \frac{s}{v_0 - w} + \frac{s}{v_0 + w} = \frac{2sv_0}{v_0^2 - w^2} = \frac{2s}{v_0} \cdot \frac{v_0^2}{v_0^2 - w^2} = \frac{2s}{v_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{w}{v_0}\right)^2} \quad .$$

Da der zweite Faktor für $0 \leq w < v_0$ stets grösser oder gleich 1 ist, besagt diese Formel, dass die Zeit bei Windstille ($w = 0$) stets die kleinste ist, nämlich $\frac{2s}{v_0}$.

2. Realistischere Modellierung: Fahrradfahrer mit konstanter Tretleistung[1]

Nach wie vor soll der Fahrradfahrer reibungsfrei auf einer Schiene rollen, aber dank der Haftung auf der Schiene durch Treten eine Vorwärtsbewegung generieren. Die Leistung P, welche er erbringt, soll konstant sein. Ist F die Kraft, mit der er sich vorwärts bewegt, so kann die Energie auf einem kleinen Wegstück Δs innerhalb des Zeitabschnitts Δt durch $F \cdot \Delta s = P \cdot \Delta t$ ausgedrückt werden. Das bedeutet $F \cdot v = P$, wobei v die Geschwindigkeit des Fahrradfahrers gegenüber dem Boden bedeutet. Der Luftwiderstand ist die Kraft F, welche der Fahrradfahrer aufbringen muss. Sie ist proportional zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit $(v - w)$ zwischen

[1] Die Gegenüberstellung der zwei Modelle ist dank einer intensiven Diskussion mit Martin Lieberherr entstanden.

Fahrradfahrer und Luft. Wir messen hier die Geschwindigkeiten gegenüber dem Boden und in gleicher Richtung, d.h. positives w ist Rückenwind, negatives w ist Gegenwind, und es gelte $0 < |w| < v$. Damit gilt insgesamt $(v-w)^2 \cdot v = a \cdot P$ mit einem Proportionalitätsfaktor a. Da wir die Leistung P als konstant angenommen haben, können wir bei gegebener Windgeschwindigkeit und gegebenen Konstanten a und P durch die Beziehung $(v - w)^2 \cdot v = k$ (k = const.) die Geschwindigkeit des Fahrradfahrers berechnen. Leider lässt sich diese Gleichung nicht nach $v(w)$ auflösen, die Umkehrung $w(v)$ jedoch schon:

$$w = v - \sqrt{\frac{k}{v}}$$

Vor der Wurzel steht nur das Minuszeichen weil $v > w$ ist gemäss unserer Annahme $0 < |w| < v$. Die nachfolgende Graphik zeigt die Funktion $w(v)$ für die Parameterwerte $k = 1, 2, \ldots, 16$.

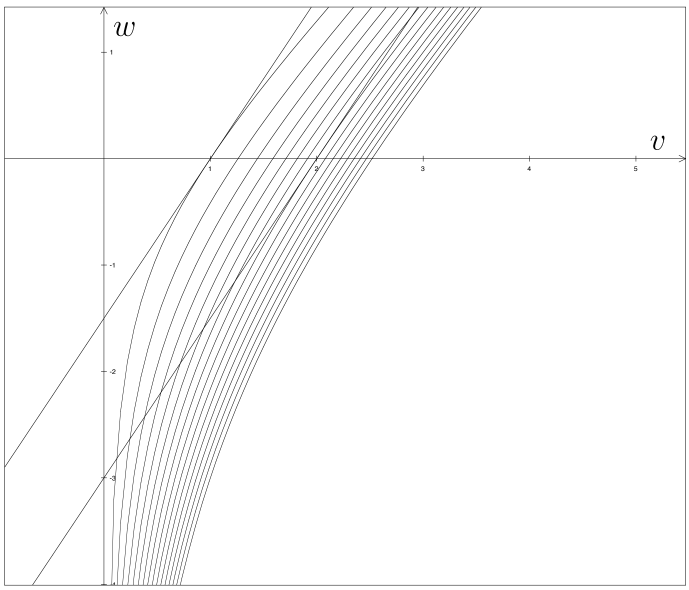

Abb. 1: Zusammenhang zwischen Wind- und Fahrradgeschwindigkeit

Da wir nur an einer qualitativen Beurteilung des Zeitbedarfs bei einer Rundfahrt mit Wind interessiert sind, können wir uns erlauben, eine lineare Näherung als Zusammenhang zwischen w und v anzunehmen, insbesondere für den Bereich $-v_0 < w < v_0$, wobei $v_0 = \sqrt[3]{k}$ die Fahrradgeschwindigkeit bei Windstille ($w = 0$) bedeutet. Der Gegen- oder Mitwind soll also nicht stärker blasen als der Fahrtwind bei Windstille.

Nun ergibt sich für die Ableitung von $w(v)$ nach v:

$$w'(v) = 1 + \frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{v^3}}$$

Und für $v = v_0 = \sqrt[3]{k}$ erhalten wir $w'(v_0) = \frac{3}{2}$ und dies erstaunlicherweise für alle k, wie sich dies in der Abb. 1 an den parallelen Tangenten in den Nullstellen zeigt. Damit können wir in erster Näherung die Geschwindigkeit v als Funktion der Windgeschwindigkeit angeben:

$$v(w) = v_0 + \frac{2}{3}w$$

Wir stellen fest, dass der Wind hier einen etwas geringeren Einfluss auf die Geschwindigkeit hat als mit der Beziehung $v(w) = v_0 + w$, die im unrealistischen Fall des 1. Abschnitts zum Zug kam. Besser noch: Aus Abb. 1 folgt, dass man auch bei sehr starkem Gegenwind und gegebener Leistung zwar langsam aber immerhin vorwärts kommt, während dies ja beim Zeppelin- oder Schwimmermodell nicht möglich ist.

3. Rundfahrt längs eines gleichseitigen Dreiecks

Nun stellt sich die Frage, wie sich der Zeitbedarf T_3 für eine Rundfahrt bei Wind längs eines gleichseitigen Dreiecks verhält.

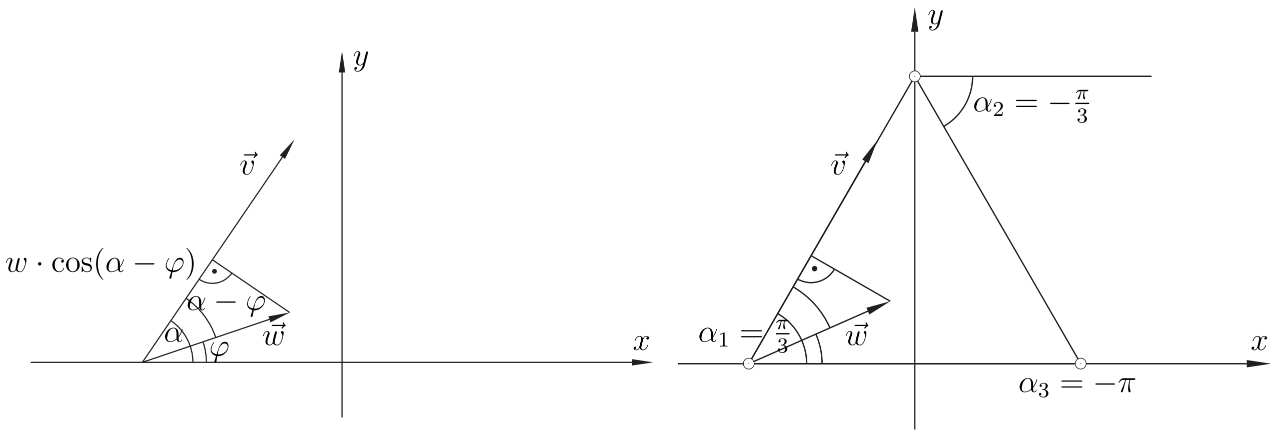

Abb. 2: Fahrgeschwindigkeit $\vec{v}$ und Windgeschwindigkeit $\vec{w}$ bei einer Dreiecksrundfahrt

Wir verzichten jetzt der schlichten Notation halber auf den Index 0 und wählen die Fahrgeschwindigkeit bei Windstille als Vektor $\vec{v}$ mit dem Betrag v und dem Argument α gegenüber der positiven x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems. Analog sei $\vec{w}$ der Vektor, der die Windgeschwindigkeit für das unrealistische Modell im 1. Abschnitt angibt oder aber — gemäss dem 2. Abschnitt — zwei Drittel der realen Windgeschwindigkeit im linearisierten Modell mit konstanter Tretleistung. Der Vektor $\vec{w}$ habe das Argument φ. Die Geschwindigkeit v wird jetzt nur von der Windkomponente in Richtung $\vec{v}$ beeinflusst. Nun betrachten wir rechts in Abb. 2 eine Rundfahrt über ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge s. Wir wählen das Argument der ersten Seite $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$. Anschliessend seien $\alpha_2 = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}$ und $\alpha_3 = \frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}$ die Argumente der zweiten und dritten Seite. Gemäss unserer Annahme muss zu jeder Geschwindigkeit auf den drei Seiten noch der Windanteil $w \cdot \cos(\alpha_i - \varphi)$ (links in Abb. 2) addiert werden. Damit ergibt sich als Totalzeit T_3 für eine vollständige Rundfahrt längs des gleichseitigen Dreiecks:

$$T_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{s}{v + w \cdot \cos(\alpha_i - \varphi)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{s}{v + w \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - (i-1) \cdot \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)}$$

Um vergleichbare Darstellungen zu erhalten, wählen wir die Gesamtlänge der Rundfahrt als Einheit, d. h. $s = \frac{1}{3}$ und ausserdem soll die Grundgeschwindigkeit bei Windstille den Betrag $v = 1$ haben. Damit können wir für die Parameterwerte $w = 0$, $w = 0.1$, …, $w = 0.9$ die Gesamtzeit

$$T_3(\varphi) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)} + \frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{3} - \varphi\right)} + \frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(-\pi - \varphi\right)} \right)$$

in Abhängigkeit von φ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ graphisch darstellen:

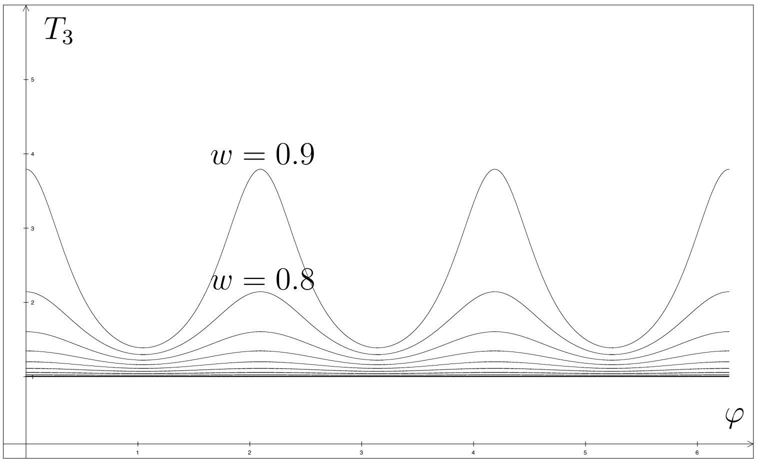

Abb. 3: Zeitbedarf T_3 bei Dreiecksrundfahrt und Wind in Richtung φ

Hier entsprechen die Parameterwerte $w = 0.7$, $w = 0.8$ und $w = 0.9$ nicht mehr der geforderten Einschränkung im realen, linearisierten Modell, sondern wurden bloss der Deutlichkeit halber einbezogen. Es war nämlich gefordert, dass der Betrag der Windgeschwindigkeit kleiner als die Geschwindigkeit der Fahrradfahrers bei Windstille sein soll. Daher dürfte der Parameter w für dieses Modell nur bis $\frac{2}{3}$ laufen. Für das unrealistische Modell im 1. Abschnitt sind die höheren Werte zulässig.

Jetzt wird deutlich, dass bei einem Wind in Richtung positiver x-Achse $(\varphi = 0)$ der Zeitbedarf maximal ist. Das bedeutet, dass man auf der dritten Seite des Dreiecks direkten Gegenwind hat. Die beiden anderen Maxima entsprechen den Windrichtungen $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ und $\varphi = \frac{4\pi}{3}$, d. h. direktem Gegenwind auf der zweiten resp. ersten Seite des Dreiecks. Zusammenfassend kann man also sagen, dass der direkte Gegenwind auf einer Seite zu vermeiden, der direkte Rückenwind bei $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{3\pi}{3}$ oder $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ dagegen optimal ist.

4. Hin- und Rückfahrt längs einer Strecke

Jetzt betrachten wir eine Rundfahrt auf einer Strecke längs der x-Achse, zuerst nach rechts, anschliessend zurück nach links. Die Gesamtzeit berechnet sich dann mit der Formel

$$T_2(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(-\varphi\right)} + \frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(-\pi - \varphi\right)} \right) \quad ,$$

welche für $\varphi = 0$ in die im 1. Abschnitt angegebene Formel mit $s = \frac{1}{2}$ und $v_0 = 1$ übergeht. Die zugehörige graphische Darstellung präsentiert sich wie erwartet: Die beiden Fälle mit direktem Gegenwind ($\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$) ergeben den grössten Zeitbedarf während bei genauem Seitenwind ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{3\pi}{2}$) kein Zeitverlust im Vergleich zu Windstille auftritt.

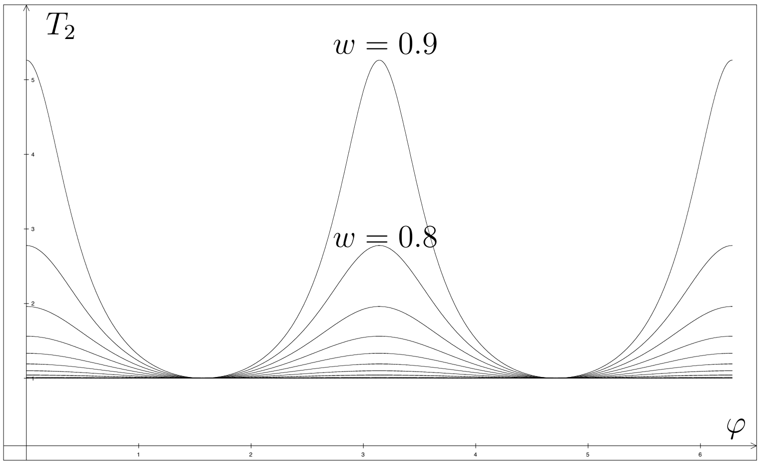

Abb. 4: Zeitbedarf T_2 bei Streckenrundfahrt und Wind in Richtung φ

5. Vom regelmässigen Fünfeck zum Kreis

Bevor wir zu einer kreisförmigen Rundfahrt übergehen, wollen wir noch eine Fünfecksrundfahrt betrachten, um eine Idee zu erhalten, in welche Richtung sich das Problem entwickelt. Zur Orientierung hier zuerst die Lage des regelemässigen Fünfecks im Koordinatensystem

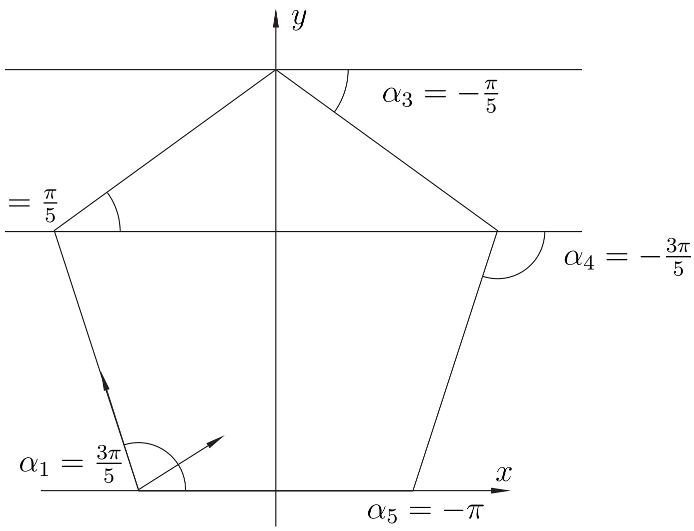

Abb. 5: Fünfecksrundfahrt

Für die Gesamtzeit T_5 erhalten wir:

$$T_5(\varphi) = \frac{1}{5} \cdot \left(\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{1 + w \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{5} - (i-1) \cdot \frac{2\pi}{5} - \varphi\right)} \right)$$

Die zugehörige graphische Darstellung zeigt das bereits bekannte Phänomen, dass der direkte Gegenwind auf irgend einer der fünf Seiten zu vermeiden ist.

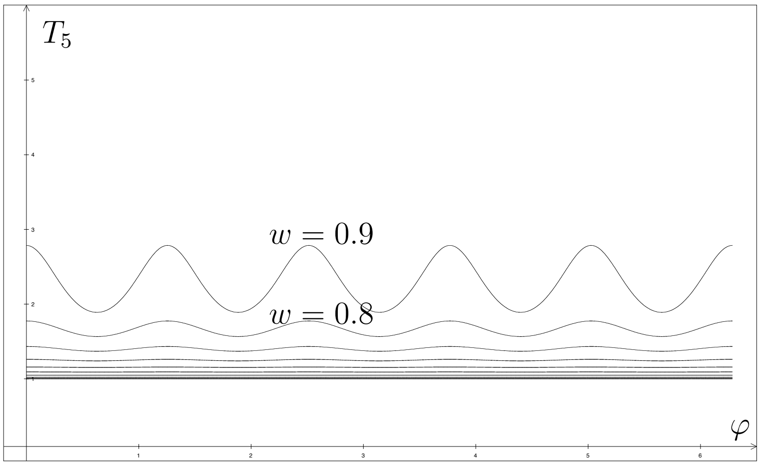

Abb. 6: Zeitbedarf T_5 bei Fünfecksrundfahrt und Wind in Richtung φ

Ausserdem erkennt man, dass die Maxima mit zunehmender Eckenzahl weniger hoch werden. Das lässt erahnen, wie der Grenzfall der Kreisrundfahrt nun aussehen wird.

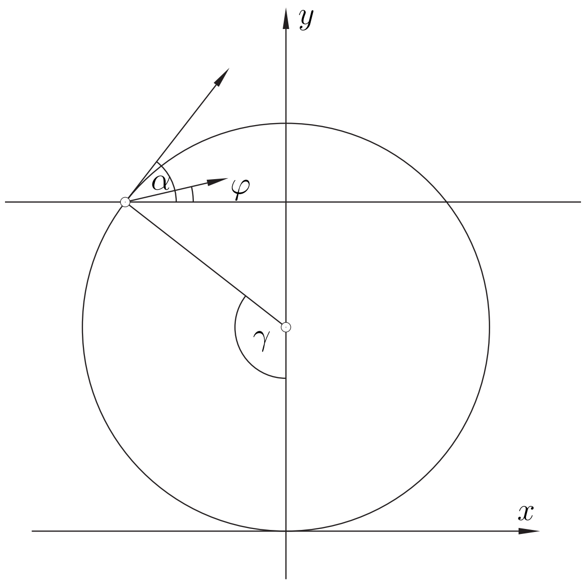

Abb. 7: Kreisrundfahrt

Für die Rundfahrt lassen wir nun den Zentriwinkel γ von 0 bis 2π wachsen. Daraus ergibt sich der Richtungswinkel $\alpha(\gamma) = \pi - \gamma$. Damit die Länge der Rundfahrt wiederum 1 beträgt, muss der Radius des Kreises $r = \frac{1}{2\pi}$ gewählt werden. Das infinitesimale Längenelement auf dem Kreis ist $r \cdot \mathrm{d}\gamma$. Damit erhalten wir für die Gesamtzeit T wiederum mit $v = 1$:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{r \cdot \mathrm{d}\gamma}{1 + w \cdot \cos(\alpha - \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\gamma}{1 + w \cdot \cos(\pi - \gamma - \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\gamma}{1 - w \cdot \cos(\gamma + \varphi)}$$

Setzen wir vorübergehend $u = \frac{1}{w}$ $(u > 1)$, so ergibt sich

$$T = \frac{u}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\gamma}{u - \cos(\gamma + \varphi)} = \left[\frac{u}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} \cdot \arctan\left(\tan(\frac{\gamma + \varphi}{2}) \cdot \sqrt{\frac{u+1}{u-1}} \right) \right]_0^{2\pi} \quad .$$

Die mit dem Taschenrechner TI-89 ermittelte Stammfunktion des positiven und stetigen Integranden ist als Funktion von γ periodisch mit Periodenlänge 2π. Das hat zur Folge, dass die Funktionswerte für $\gamma = 0$ und $\gamma = 2\pi$ gleich sind. Damit versagt das Standardverfahren mit dem Einsetzen der oberen und unteren Grenze in die Stammfunktion. Es liegt nämlich wegen der Singularität der Tangensfunktion an der Stelle $\gamma = \pi - \varphi$ ein Sprung vor. Der Betrag des Sprungs ist jedoch immer gleich gross, weil der Summand φ nur eine Verschiebung des Graphen der Stammfunktion in γ-Richtung bewirkt. Da nun für beliebiges positives c die Grenzwerte

$$\lim_{x\uparrow\frac{\pi}{2}}(\arctan(c\cdot\tan(x))) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow\frac{\pi}{2}}(\arctan(c\cdot\tan(x))) = -\frac{\pi}{2}$$

gelten, springt diese Funktion an der Stelle $\frac{\pi}{2}$ um den Wert π nach unten. Damit beträgt die Sprunghöhe der Stammfunktion an irgend einer Stelle, je nach φ, immer gleich viel, nämlich

$$\frac{u}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\pi \quad .$$

Somit ist das der Wert, den unser bestimmtes Integral annimmt. Es gilt also mit Rücksubstitution von $u = \frac{1}{w}$ schliesslich unabhängig von φ:

$$T = \frac{u}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\cdot\pi = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$$

Es überrascht nicht, dass diese Gesamtzeit unabhängig von der Windrichtung φ ist, denn bei einer Kreisbahn spielt es für die Gesamtzeit keine Rolle, aus welcher Richtung der Wind weht. Zum Vergleich mit T_5 stellen wir die horizontalen Geraden, welche den Parameterwerten $w = 0$, $w = 0.1$, …, $w = 0.9$ in der konstanten Funktion $T(\varphi)$ entsprechen, zusammen mit den Kurven aus Abb. 6 dar. Man erkennt also, dass mit zunehmender Eckenzahl die Wellenlinien gegen diese Geraden konvergieren.

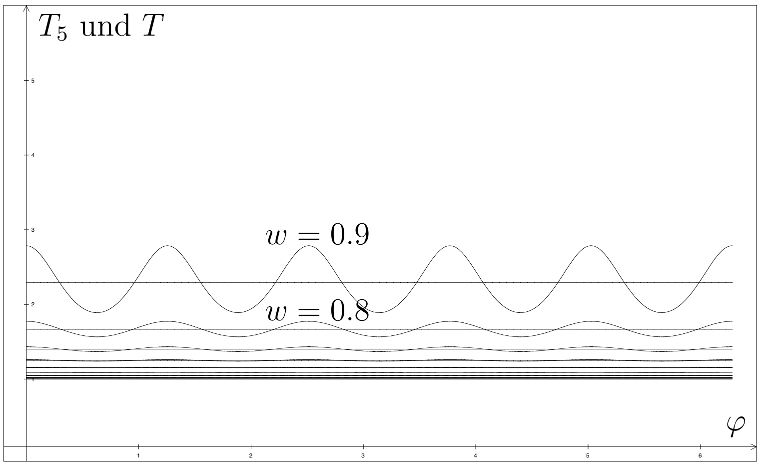

Abb. 8: Zeitbedarf T bei einer Kreisrundfahrt im Vergleich mit T_5 einer Fünfecksrundfahrt