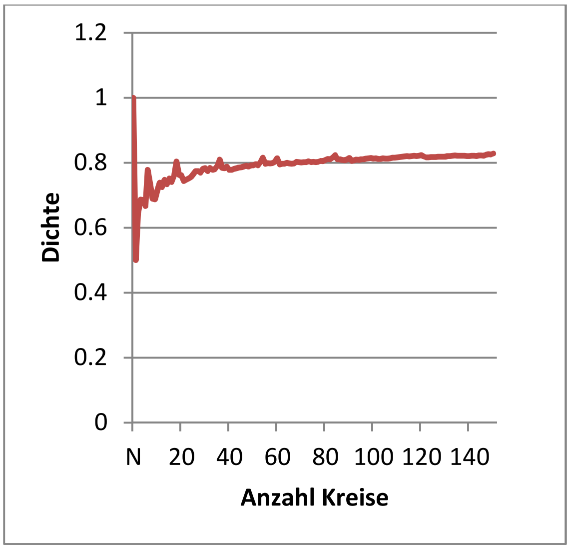
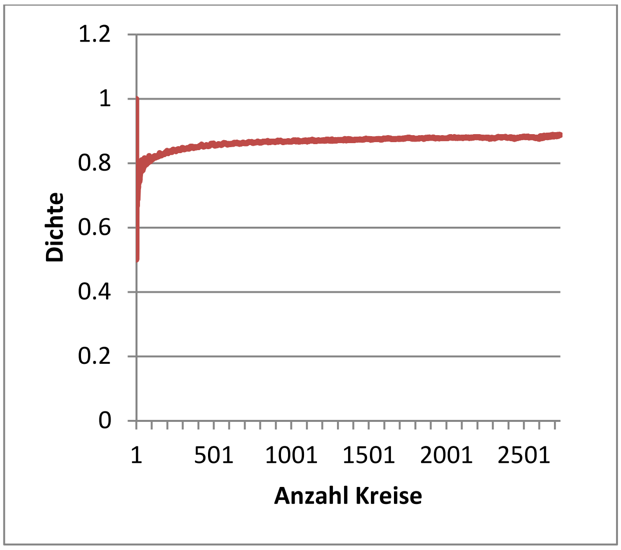
Zur dichtesten Spaghetti–Packung

H.U. Keller, ehem. MNG Rämibühl, Zürich

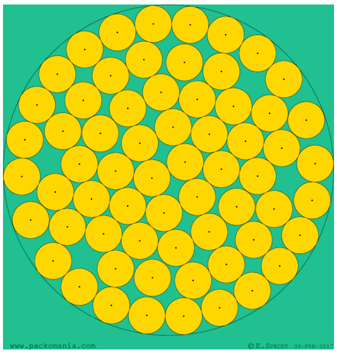
Vielen Dank, Martin Lieberherr, einmal mehr für eine neue Deiner wie immer höchst anregenden Ideen, im Bulletin Nr. 133 vom Januar 2017! Mit der dichtesten Kreispackung, speziell auch innerhalb eines Kreises, hat sich insbesondere auch Eckard Specht von der Uni Magdeburg (eckard.specht@physik.uni-magdeburg.de) intensiv befasst. Er unterhält eine Site (www.packomania.com), in welcher u. a. die Dichten der (bewiesenen oder auch nur vermuteten) dichtesten Packungen für jede Anzahl Kreise N von 1 bis etwa 2600 lückenlos, dann für die meisten Anzahlen bis N = 5000, zusammengestellt sind, jeweils zusammen mit Angaben zum Autor der entsprechenden Vermutung oder des Beweises.





In der obigen Figur links sind diese maximal möglichen Dichten für N von 1 bis 150 Kreise dargestellt, in der zweiten rechts die Dichten für N von 1 bis etwa 2500. Es scheint, als ob Dichten grösser als 89% nicht möglich wären! Die maximale Dichte für alle Zahlen N > 1 in der oben erwähnten Tabelle ist gleich 88.86% für N = 4483 (eine Dichte von 100% ergibt sich trivialerweise für N = 1!).

Weiter wird in der oben erwähnten Site ein Tool angeboten, mit dem für jeden Radius R des grossen Kreises und jeden Radius r der kleinen Kreise die dazugehörige dichteste Packung graphisch wiedergegeben werden kann; dieses Tool ergibt beispielsweise für R = 0.5 und r = 0.111582 die folgende Grafik, die 64 Kreise enthält:

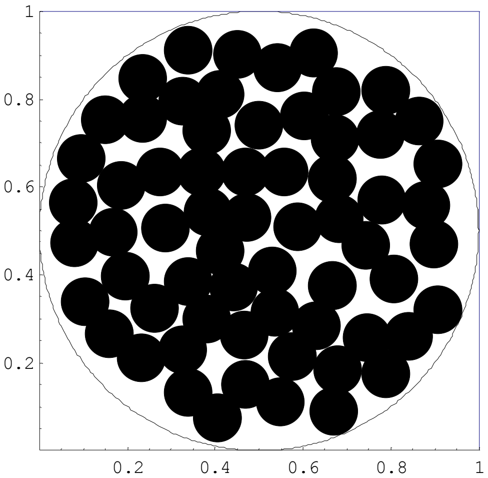


Die Dichte dieser Anordnung beträgt 79.68 %; dies stimmt ganz nett mit dem experimentellen Befund von Martin überein!

Mir ist nicht klar, wie dieses Tool diese Anordnungen findet. Vielleicht mit einer Anordnung, die zunächst einmal die Innenseite des Kreises mit kleinen Kreisen vollpflastert, und nachher analog die entstehenden Lücken optimal ausfüllt?!

Nett wäre es darum schon, diese Anordnungen irgendwie simulieren zu können! Eine denkbare Simulationsmöglichkeit besteht darin, in den grossen Kreis einfach an zufälligen Koordinaten eine nach der anderen "Spaghetti" so in den grossen Kreis hinein zu stopfen, dass sie alle andern der schon vorhandenen höchstens gerade berührt. Das Resultat ist allerdings ernüchternd: Auf diese Weise lassen sich Dichten von nur gerade etwa 50% erzielen, und es ist grafisch offensichtlich, dass mit "Zusammendrücken" der so verteilten Spaghetti noch viel mehr Platz entstehen würde!

Als kleiner Trick habe ich darum weiter angenommen, dass sich eine neue Spaghetti auch dann noch nachschieben lässt, wenn ihr Mittelpunkt von den Mittelpunkten aller anderen, schon vorhandenen Spaghetti mindestens z. B. 77% der eigentlich erlaubten Nähe von zwei Radien der kleinen Kreise entfernt ist – die Spaghetti werden dann halt ein wenig gequetscht! Damit ergibt sich beispielsweise das unten dargestellte Bild:



Hier sind ebenfalls genau 64 kleine Kreise mit Radien 0.111582 im grossen Kreis mit Radius 0.5 dargestellt, und es ist anschaulich nicht unplausibel, dass die sich teilweise überdeckenden Kreise "mit etwas Schütteln" (!) so platziert werden könnten, dass sich keiner der kleinen Kreise mit irgend einem seiner Nachbarn überdeckt. Dies führt dann wiederum zu einer Dichte von knapp 80%.

Ich werde jedenfalls beim nächsten Spaghetti–Essen mit Vergnügen an Martin und an seinen Input zurück denken!