Drehmomente beim konischen Doppelpendel

Rolf Strassfeld, 6318 Walchwil, rolfst@alumni.ethz.ch

1 Einleitung

In seiner Untersuchung eines konischen Stangenpendels in der Ausgabe 137 des Bulletins hat Martin Lieberherr den Angriffspunkt der Fliehkraft in einem mitbewegten Bezugssystem ermittelt und festgestellt, dass er nicht mit dem Schwerpunkt der Stange zusammenfallen kann, weil sich sämtliche Drehmomente aufheben müssen. Nun gehören Angriffspunkte und Wirkungslinien von Kräften eher zur technischen Mechanik, beim Newtonschen Kraftbegriff und in der theoretischen Mechanik kommen beide meines Wissens nach nicht vor. Daher hat mich interessiert, wie sich die Situation aus der Perspektive der klassischen Mechanik darstellt. In Inertialsystemen können alle Bewegungen starrer Körper in Translationen ihrer Schwerpunkte und Rotationen um durch sie verlaufende Achsen zerlegt werden. Um zu ermitteln, welche Kräfte und Drehmomente bei einem in einem Inertialsystem rotierenden Körper (einem Kreisel) auftreten, habe ich anstatt einer Stange ein starres Doppelpendel untersucht. Hier treten die gleichen Phänomene wie an der Stange auf, die Situation ist aber ein wenig übersichtlicher. Es zeigt sich, dass das Doppelpendel im Inertialsystem Drehmomenten unterworfen ist, wie die Bewegung seines Schwerpunktes unter dem Einfluss der wirkenden Kräfte entsteht, und wie die Bilanz der Drehmomente in einem mitrotierenden Bezugssystem ausfällt.

2 Das konische Doppelpendel mit rotierendem Drehimpuls

In Abbildung 1 sind zwei im folgenden punktförmig gedachte Pendelkörper mit gleichen Massen m zu sehen, die auf gerader Strecke mit masselosen Stangen der Länge ℓ miteinander starr und einem Drehlager D reibungsfrei verbunden sind. Sie mögen mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω und dem konstanten Spreizwinkel ϑ um eine vertikale Achse kreisen und im abgebildeten Moment in die Zeichenebene eintauchen. Wo nicht anders gesagt, beziehen sich Ortsvektoren, Drehimpulse und -momente auf D als Bezugspunkt und Ursprung eines Koordinatensystems. Im dargestellten, zweidimensionalen Schnitt treten horizontale und vertikale Richtungen auf, auf die wir uns später beziehen. Für die Koordinatenachsen wählen wir die Richtungen «nach rechts» und «nach oben». Senkrecht in die Schnittebene weisende Drehmomente können im Bedarfsfall negativ, entgegengesetzte positiv gezählt werden.

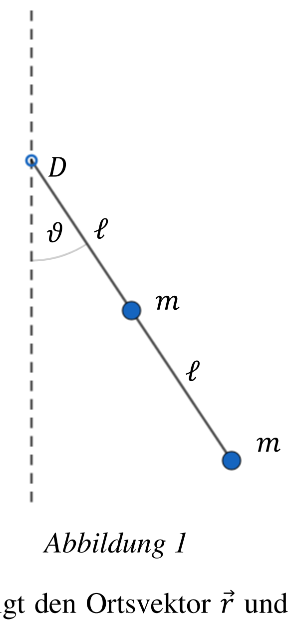

Abbildung 1

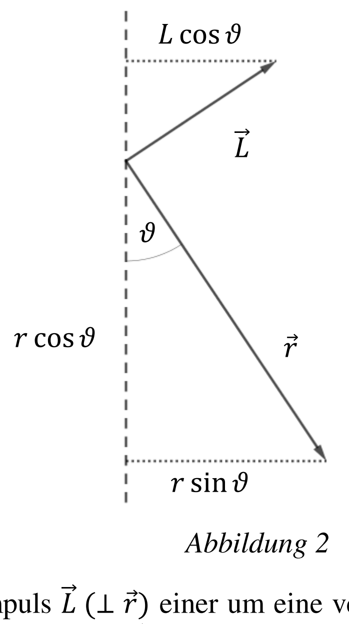

Abbildung 2

Abbildung 2 zeigt den Ortsvektor $\vec{r}$ und den Drehimpuls $\vec{L}$ ($\perp \vec{r}$) einer um eine vertikale Achse rotierenden Masse. Mit dem Impuls weist auch das Drehmoment $\vec{M}$ in die Zeichenebene. Da $\vec{L}$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω einen Kreis vom Radius $L\cos\vartheta$ beschreibt, hat das Drehmoment $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$ die Grösse $M = \omega L\cos\vartheta$.

3 Drehimpulse und ihre Änderung durch Zentripetalkräfte

Wir können die beiden rotierenden Pendelmassen als Ganzes oder separat untersuchen. Zunächst untersuchen wir sie einzeln.

Für den Drehimpuls der oberen (ersten) Masse erhalten wir $L_1 = m\omega\ell^2 \sin\vartheta$, für den der unteren (zweiten) $L_2 = 4m\omega\ell^2 \sin\vartheta$. Beide Drehimpulsvektoren stehen senkrecht zu den Ortsvektoren der kreisenden Massen und rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Diese Rotationen können nur mit Drehmomenten erzwungen werden, deren Größen durch $M_1 = m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$ bzw. $M_2 = 4m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$ gegeben sind.

Wir prüfen, wie die Drehmomente aus den angreifenden Kräften entstehen. Zwar kennen wir die von den Stangen ausgeübten Kräfte noch nicht, da aber die Zentripetalkräfte $\vec{F}_Z$ die Summen aller wirkenden Kräfte sind, berechnen sich die Drehmomente jeweils als $\vec{M} = \vec{r} x \vec{F}_Z$.

Kaum überraschend finden wir daher mit $F_{Z,1} = m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta$ und $F_{Z,2} = 2m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta$ die zur zeitlichen Änderung der Drehimpulse nötigen Drehmomente wieder:

Für die erste Masse ist $F_{Z,1} \cdot \ell \cos\vartheta = m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta \cdot \ell \cos\vartheta = M_1$
und für die zweite Masse $F_{Z,2} \cdot 2\ell \cos\vartheta = 2m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta \cdot 2\ell \cos\vartheta = M_2$.

Betrachten wir nun die beiden Massen als einen einzigen Körper, so stellt sich dessen Bewegung als eine Translation seines Schwerpunkts S dar, die so erfolgt, als wäre die gesamte Masse des Körpers in S konzentriert und dem Einfluss aller äusseren Kräfte unterworfen, und einer Drehung bezüglich S, wobei allenfalls auftretende Drehmomente ebenfalls durch die äusseren Kräfte in Bezug auf S zu berechnen sind. Der Drehimpuls $\vec{L}$ des Körpers zerfällt analog in einen Bahndrehimpuls $\vec{L}_B$ und einen Eigendrehimpuls $\vec{L}_E$.

Für den Bahndrehimpuls (in Bezug auf den Drehpunkt D) und den Eigendrehimpuls (bezüglich S) erhalten wir

$L_B = 2m\omega\left(\frac{3}{2}\ell\right)^2 \sin\vartheta = \frac{9}{2}m\omega\,\ell^2 \sin\vartheta$ und $L_E = 2m\omega\left(\frac{1}{2}\ell\right)^2 \sin\vartheta = \frac{1}{2}m\omega\,\ell^2 \sin\vartheta$.

Ihre zeitlichen Änderungsraten werden durch die Drehmomente $\vec{M}_B \coloneqq \dot{\vec{L}}_B$ und $\vec{M}_E \coloneqq \dot{\vec{L}}_E$ verursacht:

$M_B = \frac{9}{2}m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$ bzw. $M_E = \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$, da die Momente gleich orientiert sind insgesamt also $5m\omega^2\ell^2 \sin\vartheta \cos\vartheta$.

Der Betrag der Zentripetalkraft $\vec{F}_Z$, die die Kreisbewegung des Schwerpunktes bewirkt, ergibt sich mit der Gesamtmasse $2m$ zu $F_Z = 2m\omega^2 \frac{3}{2}\ell \, sin\,\vartheta = 3m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta$. Das ihr zugehörige Drehmoment hat mit $M = 3m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta \cdot \frac{3}{2}\ell \, cos\,\vartheta$ genau die Größe, die zur Änderungsrate des Bahndrehimpulses passt.

Die Drehmomente der Kräfte $\vec{F}_{Z,1}$ und $\vec{F}_{Z,2}$ im Schwerpunktsystem betragen unter Berücksichtigung ihrer Orientierung $m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta \cdot \frac{\ell}{2}\cos\vartheta$ für die obere Masse und $-2m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta \cdot \frac{\ell}{2}\cos\vartheta$ für die untere, in der Summe erzeugen sie das Drehmoment zur Änderungsrate des Eigendrehimpulses.

Addiert man die Kräfte $\vec{F}_{Z,1}$ und $\vec{F}_{Z,2}$ im Sinne der technischen Mechanik unter Einbezug ihrer parallelen Wirkungslinien, so findet man ihre Ersatzkraft (wie beim Hebel) mit der Größe $3m\omega^2\ell \, sin\,\vartheta$ und einer Wirkungslinie, die den Abstand der Massen im Verhältnis 2:1 teilt. Da ihr Kraftarm bezüglich S die Länge $\frac{1}{6}\ell \, sin\,\vartheta$ besitzt, verursacht ihr Drehmoment wieder genau die zeitliche Änderungsrate des Eigendrehimpulses.

4 Zu den Winkelgeschwindigkeiten passende Spreizwinkel

Zur weiteren Untersuchung ermitteln wir die konstanten Winkel $\vartheta > 0$, bei denen Rotationen mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten erfolgen können.

Unter Einbezug von Wirkungslinien erhielten wir die gesuchte Relation geschenkt: Da das Drehmoment der Zwangskraft bezüglich des Drehpunktes D verschwindet, weil dieser auf ihrer Wirkungslinie liegt, muss das gesamte Drehmoment ausschliesslich durch die Gewichtskräfte entstehen. Demnach wäre $5m\omega^2\ell^2 \, sin\,\vartheta \, cos\,\vartheta = 2mg\frac{3}{2}\ell \, sin\,\vartheta \Leftarrow \ell\omega^2 = \frac{3g}{5\,cos\,\vartheta}$*, wobei g den Ortsfaktor bezeichnet. Hier können wir das Geschenk nicht annehmen.*

Im Kontext der klassischen Mechanik verwenden wir eine Lagrange-Funktion, am besten eine zweiter Art, also mit einbezogenen Zwangsbedingungen. Rotiert das Pendel mit der Winkelgeschwindigkeit ω , so erhalten wir als kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m(\ell^2\omega^2 sin^2\vartheta) + \frac{1}{2}m(4\ell^2\omega^2 sin^2\vartheta\omega^2) = \frac{5}{2}m(\ell^2\omega^2 sin^2\vartheta),$$

die potentielle Energie ergibt sich zu

$$U = -mg\ell\cos\vartheta - 2mg\ell\,cos\,\vartheta = -3mg\ell\cos\vartheta$$

Ist $\mathcal{L} = T - U$ die Lagrange-Funktion des Systems, so liefert

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = 0 = 5m\ell^2\omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta - 3mg\ell\cos\vartheta = m\ell(5\ell\,\omega^2\cos\vartheta - 3g)\sin\vartheta$$

die Bedingung, unter der Rotationen mit konstanten $\vartheta > 0$ möglich sind, nämlich

$$\cos\vartheta = \frac{3g}{5\ell\omega^2} \;\Leftrightarrow\; \ell\omega^2 = \frac{3g}{5\cos\vartheta} \qquad (*)$$

Wir beobachten an dieser Stelle, dass ein Fadenpendel der Länge $\ell_F = \frac{5}{3}\ell$ mit gleichen ϑ und ω wie das Doppelpendel rotieren kann, denn bei Fadenpendeln finden wir

$$\frac{F_Z}{F_G} = \tan\vartheta \;\Leftrightarrow m\ell_F\omega^2\sin\vartheta = mg\tan\vartheta \;\Leftrightarrow\; \cos\vartheta = \frac{g}{\ell_F\omega^2}$$

Das erinnert an den Schwingungsmittelpunkt eines physikalischen Pendels. Ausserdem erkennen wir daran, dass die beiden Massen nicht durch eine gerade gespannte Schnur auf ihrer Bahn gehalten werden könnten. (Analog zum Reversionspendel könnte das Doppelpendel in diesem Punkt gestützt mit gleichen Kombinationen von ϑ und ω wie im hier untersuchten Fall rotieren.)

5 Drehmomente von Gewichts- und Zwangskräften

Über die Zentripetalbeschleunigungen berechnete Zentripetalkräfte verraten nichts über ihre Herkunft. Beim Doppelpendel entstehen sie als Summen von Gewichtskräften und der vom Lager auf die Massen ausgeübte Zwangskraft $\vec{F}_{Zwang}$. Diese Kraft muss die Gewichtskräfte der Massen kompensieren und die nötigen Zentripetalkräfte erzeugen. Ihre Horizontalkomponente beträgt daher $F_{Zwang,h} = -3m\omega^2\ell\,sin\,\vartheta$, ihre Vertikalkomponente $F_{Zwang,v} = 2mg$. Die Richtung der Zwangskraft kann über das Verhältnis ihrer Komponenten mit Hilfe von (*) ermittelt werden:

$$\tan\vartheta' = \frac{3m\omega^2\ell\,sin\,\vartheta}{2mg} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 5}\frac{sin\,\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{9}{10}\tan\vartheta$$

Weil die vom Lager ausgeübte Kraft nicht parallel zu den Stangen ist, bewirkt sie ein Drehmoment beim Pendel. Mit dem Ortsvektor $\vec{r}_S$ des Schwerpunkts können wir dieses Drehmoment komponentenweise berechnen. Aufgrund $r_S = \frac{3}{2}\ell$ betragen die von der Horizontal- und der Vertikalkomponente verursachten Anteile

$$F_{Zwang,h}\frac{3}{2}\ell\cos\vartheta = -3m\omega^2\ell\,sin\,\vartheta\frac{3}{2}\ell\cos\vartheta \qquad \text{bzw.} \qquad F_{Zwang,v}\frac{3}{2}\ell\sin\vartheta = 2mg\frac{3}{2}\ell\sin\vartheta$$

In der Summe ergibt sich mit (*) das Drehmoment

$$\begin{aligned} M_{Zwang} &= -3m\omega^2\ell\, sin\,\vartheta \frac{3}{2}\ell\cos\vartheta + 2mg\frac{3}{2}\ell\sin\vartheta \\ &= -3m\omega^2\ell\, sin\,\vartheta\frac{3}{2}\ell\cos\vartheta + 5m\ell\omega^2\cos\vartheta\,\ell\sin\vartheta \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{aligned}$$

Die Gewichtskraft als zweite am Pendel angreifende Kraft bewirkt mit dem Kraftarm $\frac{3}{2}\ell\, sin\,\vartheta$ das Drehmoment $M_G = -2mg\frac{3}{2}\ell\sin\vartheta = -5m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta$. Addiert erzeugen beide hier das zur Änderung des Bahndrehimpulses nötige Moment.

$$M_B = \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta - 5m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta = -\frac{9}{2}m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

Bei dieser Berechnung des Drehmomentes hätten wir uns durchaus auf die Horizontalkomponenten der Kräfte beschränken können, weil sich die Anteile der Vertikalkomponenten kompensieren. Zwangs- und Gewichtskraft verändern auch den Eigendrehimpuls wie gewünscht mit $M_E = \frac{1}{9}M_B$, denn der Abstand der beiden Massen von ihrem Schwerpunkt beträgt mit $\frac{1}{2}\ell$ ein Drittel der Distanz des Schwerpunktes zum Drehpunkt ($\frac{3}{2}\ell$). Da die betreffenden Längen bei der Berechnung der Drehmomente quadratisch auftreten, weil sie im Kraftarm ebenso wie in den Kräften linear erscheinen, ergibt sich der Multiplikator $\frac{1}{9}$.

6 Drehmomente im mitrotierenden Bezugssystem

Bei der Beobachtung des Pendels in einem mitrotierenden Bezugssystem (mit dem Drehpunkt als Ursprung) kommt zu den Gewichtskräften und der vom Lager ausgeübten Zwangskraft noch die Fliehkraft hinzu. Für das Gleichgewicht der Drehmomente sind alle drei Kräfte zu berücksichtigen. Zum Drehmoment der Zwangskraft ($M_{Zwang} = \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta$) und dem der Gewichtskraft ($M_G = -2mg\frac{3}{2}\ell\sin\vartheta = -5m\ell\omega^2\cos\vartheta\,\ell\sin\vartheta$) kommt das der Fliehkraft ($M_F = 2m\omega^2\frac{3}{2}\ell\, sin\,\vartheta\cdot\frac{3}{2}\ell\cos\vartheta$) hinzu, zusammen heben sie sich auf:

$$\begin{aligned} M_{Zwang} + M_G + M_F &= \frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\sin\vartheta\cos\vartheta - 5m\omega^2\ell^2\cos\vartheta\,\sin\vartheta + \frac{9}{2}m\omega^2\ell^2\, sin\,\vartheta\cos\vartheta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dabei ist die Wirkung der Kräfte bei der Berechnung der Drehmomente auf die im Massenzentrum konzentriert gedachte Gesamtmasse $2m$ bezogen. Entfernt man M_F aus der Gleichung, erhält man das «Bahndrehmoment» im Inertialsystem.

Die Drehmomente kompensieren sich ebenso, wenn sie auf den Schwerpunkt bezogen sind: Dann verursacht die Zwangskraft das Drehmoment $\frac{9}{2}m\omega^2\ell^2\, sin\,\vartheta\cos\vartheta - 5m\omega^2\ell^2\cos\vartheta\,\sin\vartheta$, das Drehmoment der Gewichtskraft verschwindet, und das der an den beiden einzelnen Massen wirkenden Fliehkräfte beträgt $\frac{1}{2}m\omega^2\ell^2\, sin\,\vartheta\cos\vartheta$. Letzteres Drehmoment findet man natürlich auch, wenn man die beiden Fliehkräfte durch eine einzelne ersetzt, deren Wirkungslinie nicht durch den Schwerpunkt verläuft, und entfernt man es aus der Gleichung, bleibt das «Eigendrehmoment» im Inertialsystem übrig.