Fixpunktfreie Permutationen — Aller guten Dinge sind drei

Peter Gallin, eh. Kantonsschule Zürcher Oberland und Universität Zürich, peter@gallin.ch

Nachdem nun auf kunstvolle Weise in den Bulletins Nr. 137 und Nr. 138 die Anzahl Permutationen berechnet wurde, bei denen kein Element auf seinem ursprünglichen Platz liegen bleibt — sog. fixpunktfreie Permutationen —, möchte ich eine dritte Berechnungsvariante vorstellen, welche auf nur einer Seite Platz findet. Ich habe sie von meinem Doktorvater Prof. Dr. Max Jeger † (ETH) gelernt.

Dazu betrachten wir die Menge Ω aller Permutationen von n Elementen und deren Mächtigkeit $\mu(\Omega) = n!$. Dann definieren wir die Menge A_i als die Menge derjenigen Permutationen, bei denen das i-te Element an seinem Platz sitzt. Dann ist $\overline{A_i}$ die Menge der Permutationen, bei denen das i-te Element nicht an seinem Platz sitzt. Die Mächtigkeiten der Permutationen, bei denen gewisse Elemente an ihrem Platz sitzen, lässt sich leicht berechnen: $\mu(A_i) = (n-1)!$, $\mu(A_i \cap A_j) = (n-2)!$ $(i \neq j)$, $\mu(A_i \cap A_j \cap A_k) = (n-3)!$ $(i \neq j \neq k,\ i \neq k)$, usw. bis $\mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = 1$.

Gesucht ist nun $f(n) = \mu(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n})$ = Mächtigkeit der Menge der Permutationen, bei denen weder das 1. noch das 2. noch … noch das n-te Element an seinem Platz sitzt.

Nach der De Morganschen Regel gilt:

$$f(n) = \mu(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) = \mu(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = \mu(\Omega) - \mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

Nun kommt die sogenannte Ein- und Ausschaltregel zum Zug, mit der man die Mächtigkeit von Vereinigungsmengen berechnen kann:

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i \neq j} \mu(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ i \neq k}} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) - + \cdots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \ A_n)$$

Da man die Anzahl Summanden in diesen Summen kennt und jeder Summand innnerhalb einer Summe den gleichen, oben berechneten Wert hat, erhalten wir:

$$f(n) = n! - \left(n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot 1 \right) =$$

$$= n! - n(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + - \cdots + (-1)^n \cdot 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \approx \frac{n!}{\mathrm{e}}$$

Die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass eine beliebige Permutation fixpunktfrei ist, beträgt damit

$$p(n) = \frac{f(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \approx \frac{1}{\mathrm{e}} \quad .$$

Erstaunlicherweise kann $f(n)$ für alle natürlichen n einfach dadurch berechnet werden, dass man $n!$ durch die Eulersche Zahl e dividiert und das Ergebnis auf die nächste ganze Zahl rundet.