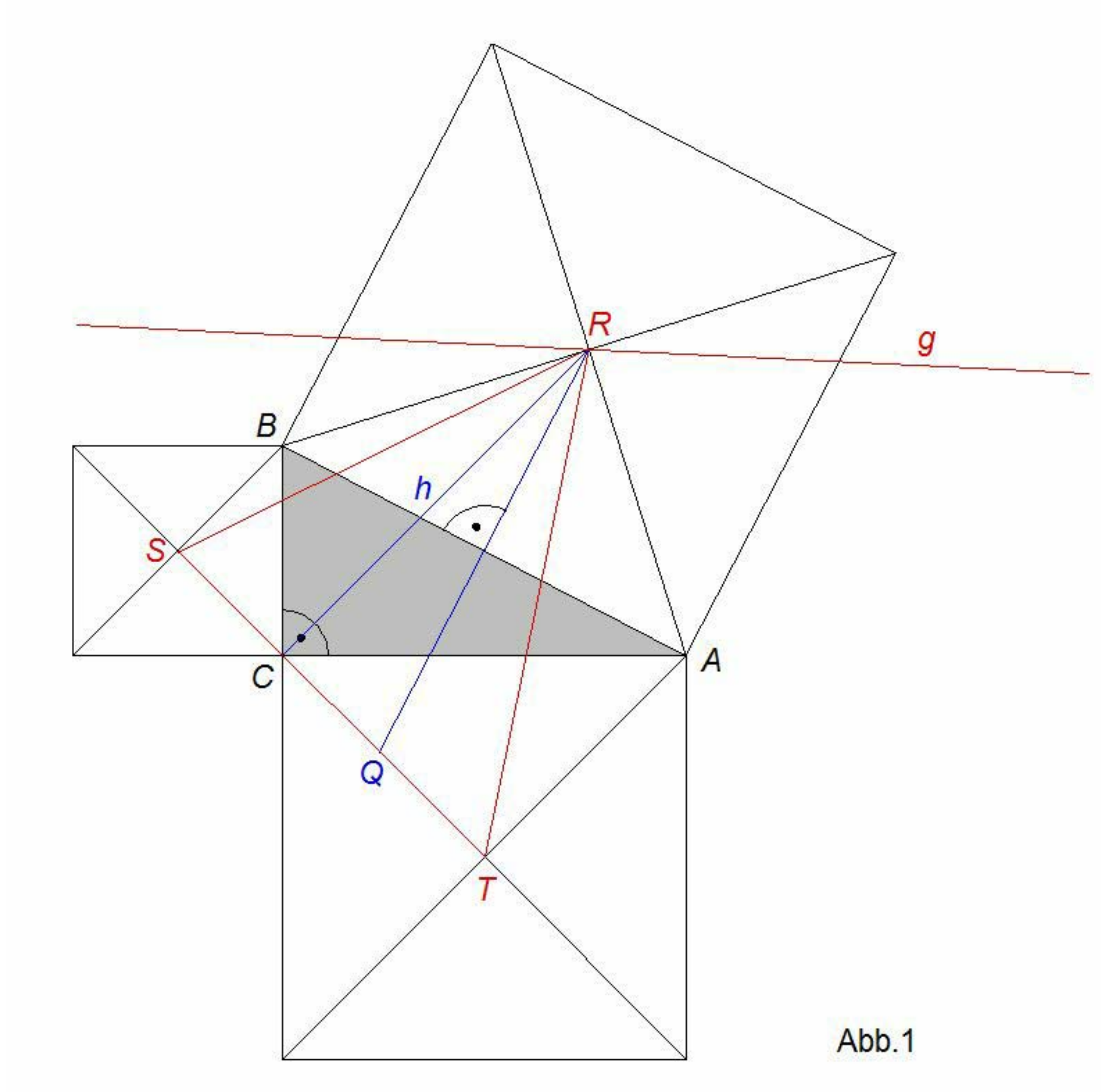
Ein interessantes geometrisches Problem

Elia von Salis, 3f Rämibühl MNG, elia.von.salis@gmail.com

Kürzlich forderte mich mein Grossvater mit folgendem Problem heraus:

Gegeben sind eine Strecke $\overline{ST}$ und eine Gerade g, die nicht parallel zur gegebenen Strecke ist. Finde einen Punkt $R \in g$ so, dass die Punkte R, S und T die Mittelpunkte der Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ABC sind. Konstruiere anschliessend das Dreieck ABC.



Packt man das Problem umgekehrt an, indem man sorgfältig zuerst das gesuchte rechtwinklige Dreieck *ABC* zeichnet und anschliessend die Mittelpunkte *R, S* und *T* der Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks konstruiert, so sieht man sofort, dass der Punkt *C* ein Punkt der Strecke $\overline{ST}$ sein muss, und man vermutet, dass die Verbindung von *R* nach *C* senkrecht auf $\overline{ST}$ steht. Misst man nach, so vermutet man zusätzlich, dass die Strecken $\overline{RC}$ und $\overline{ST}$ gleich lang sind.
Wenn dies alles wirklich zutrifft, so ist die Konstruktion sehr einfach:

1. Man zeichnet eine Parallele zu $\overline{ST}$ in einem Abstand h, der gleich gross ist wie die Länge der Strecke $\overline{ST}$ und schneidet diese Parallele mit der Geraden g. Der Schnittpunkt ist der Mittelpunkt R des Quadrates über der Hypotenuse c des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks.
2. Man zeichnet das Lot vom gefundenen Punkt R auf die Strecke $\overline{ST}$ und findet den Punkt C des rechtwinkligen Dreiecks. Der Rest ist trivial.

Im Folgenden zeige ich zuerst, dass die erste Vermutung zutrifft: die Strecken $\overline{RC}$und $\overline{ST}$ stehen senkrecht aufeinander.

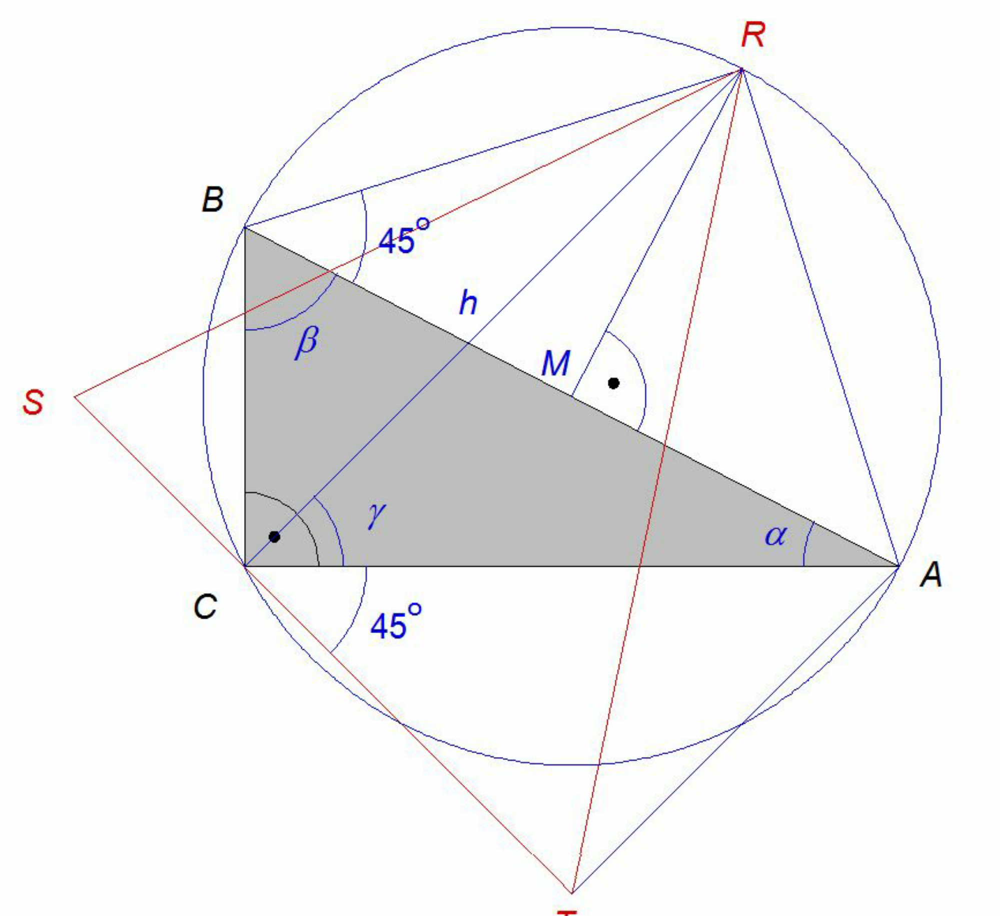


Abb.2

Wir zeichnen dazu den Thaleskreis mit dem Mittelpunkt M. Dieser Kreis verläuft auch durch den Mittelpunkt R des Quadrates über der Hypotenuse. Wir müssen zeigen, dass $\gamma = 45^o$ ist. Das ist aber klar, denn γ ist Peripheriewinkel zur Sehne $\overline{AR}$, deren Zentriwinkel 90^0 beträgt.

Die zweite Behauptung lautet: $\left|\overline{RC}\right| = \left|\overline{ST}\right|$

Zum Beweis betrachten wir die Abb. 3:
Die Dreiecke BCX und ARX sind ähnlich (Zentriwinkel und 45^0). Deshalb ist der Winkel ARD gleich β. Die Dreiecke ARD und RBE sind kongruent (gleiche Winkel, gleiche Hypothenuse).
Es gilt demnach: $\left|\overline{CE}\right| = \left|\overline{BE}\right| = \left|\overline{SC}\right| = \left|\overline{DR}\right|$ und $\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{CT}\right|$
Daraus folgt: $\left|\overline{CD}\right| + \left|\overline{DR}\right| = \left|\overline{SC}\right| + \left|\overline{CT}\right|$ q.e.d.

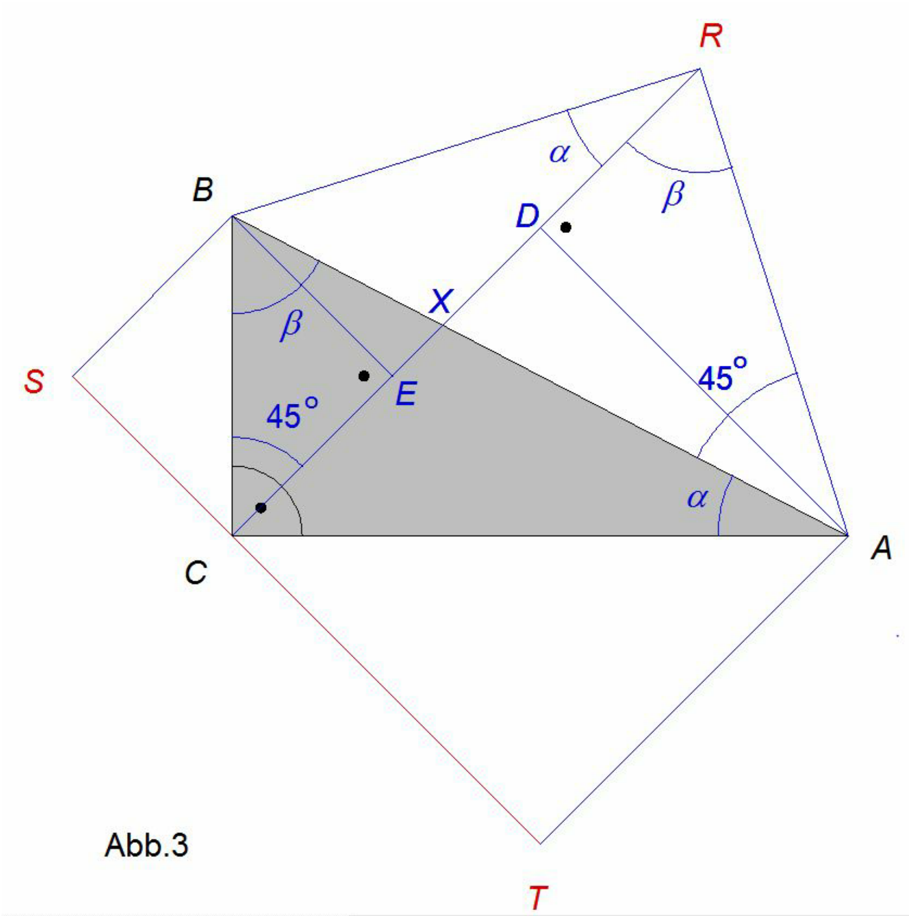


Abb.3

Bemerkungen:

1. Man kann ferner zeigen, dass $\left|\overline{SC}\right| = \left|\overline{QT}\right|$ gilt. (siehe Abbildung 1)
2. Das Problem ist nur dann lösbar, wenn die Projektion von R auf die Gerade durch S und T (Punkt C) innerhalb der Strecke $\overline{ST}$ liegt. Dann aber eindeutig. Allenfalls gibt es 2 Punkte R.
3. Interessant, aber weit schwieriger wäre das folgende Problem:
   Gegeben sind die Mittelpunkte R, S und T der Quadrate über den Seiten eines beliebigen Dreiecks ABC. Konstruiere daraus das Dreieck ABC!