Der Satz von Eddy

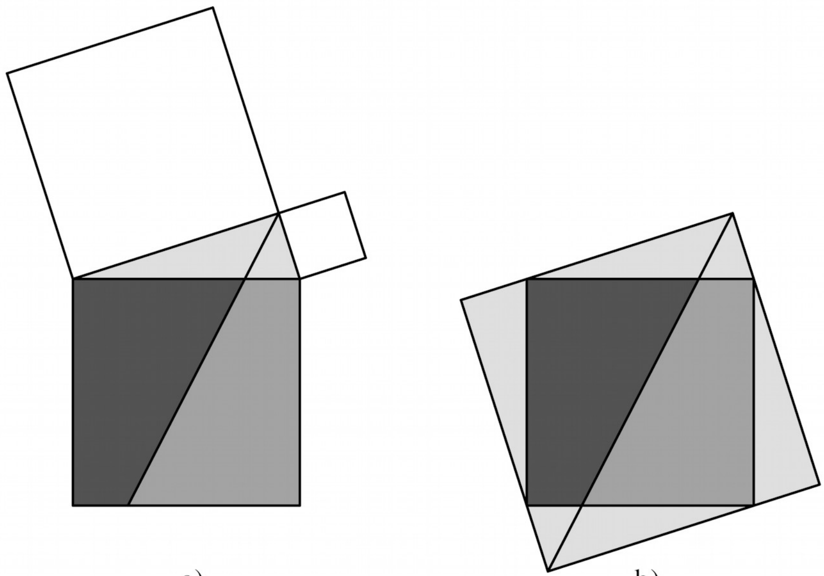
Hans Walser, hwalser@bluewin.ch, www.walser-h-m.ch/hans

Worum geht es?

In seiner Buchbesprechung erwähnt Hansjürg Stocker (2019) den elementargeometrischen Satz von Eddy, der mir bislang unbekannt war. Der Beweis führt auf eine neue Sicht des Satzes von Pythagoras und eine Invarianz von Flächenquadratsummen.

Der Satz von Eddy

Die Halbierende des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck halbiert das Hypotenusenquadrat (Abb. 1a). Die Abbildung 1b zeigt einen eleganten Beweis ohne Worte.

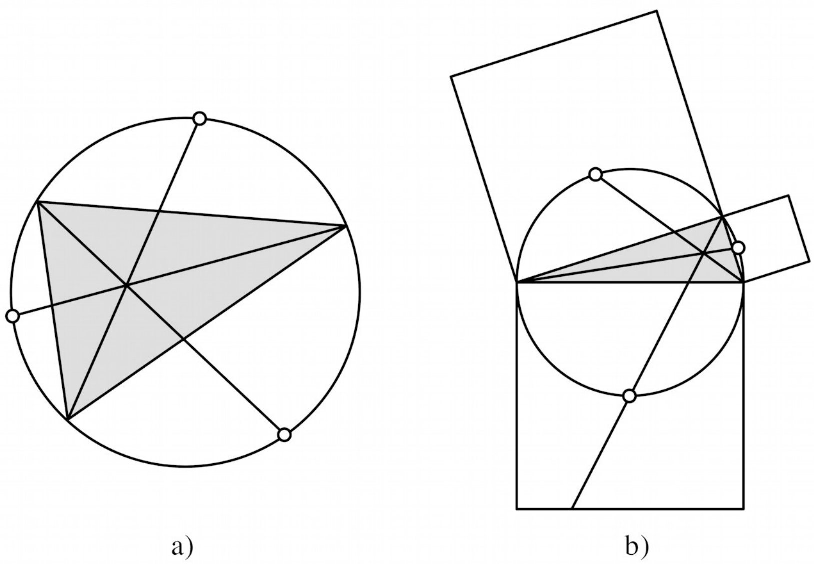


a) b)

Abb. 1: Der Satz von Eddy. Beweis ohne Worte

Der weniger elegante Beweis

Zunächst erinnern wir uns an folgenden Sachverhalt. In einem (beliebigen) Dreieck halbieren die Winkelhalbierenden je den Umkreisbogen über der Gegenseite (Abb. 2a). Zu halben Winkel gehören halbe Peripheriebögen.



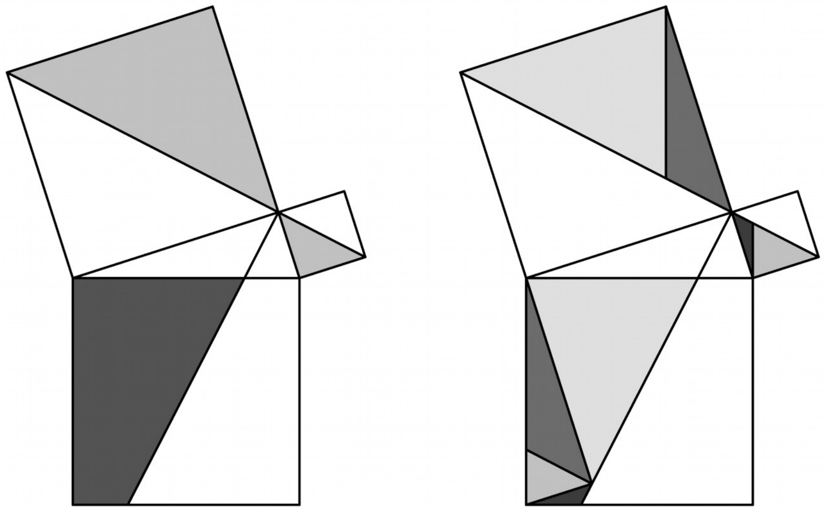
a) b)

Abb. 2: Winkelhalbierende halbieren die Umkreisbögen

In unserem Sonderfall des rechtwinkligen Dreiecks ist der Umkreis der Thaleskreis. Der Mittelpunkt des Bogens über (anschaulich: „unter“) der Hypotenuse ist auch der Mittelpunkt des Hypotenusenquadrates (Abb. 2b). Eine Gerade durch den Quadratmittelpunkt halbiert das Quadrat. Damit ist der Satz von Eddy bewiesen.

Die äussere Winkelhalbierende

Die äussere Winkelhalbierende des rechten Winkels halbiert die beiden Kathetenquadrate. Damit ergibt sich eine „halbe“ Version des Satzes von Pythagoras (Abb. 3a).



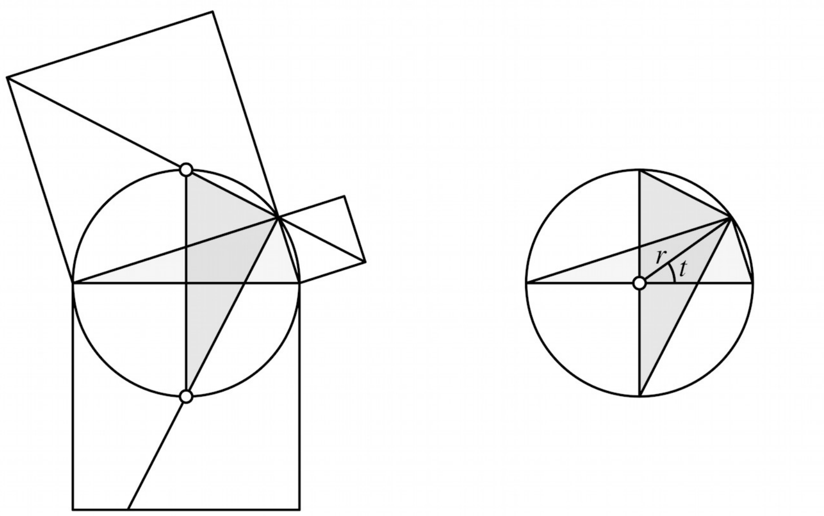
a) b)

Abb. 3: Dunkelgrau = Hellgrau. Zerlegungsbeweis

Die Abbildung 3b zeigt eine gemeinsame Zerlegung nach Paul Epstein (1871-1939) und Jakob Nielsen (1890-1959). Die Zerlegung kommt mit vier Teilen aus. Die mir bekannten Zerlegungen für den „vollen“ Pythagoras benötigen fünf oder mehr Teile.

Schnitt mit dem Thaleskreis

Die äussere Winkelhalbierende des rechten Winkels schneidet den Thaleskreis in einem Punkt im Inneren des grösseren Kathetenquadrates (Abb. 4a).



a) b)

Abb. 4: Schnitt mit Thaleskreis. Zweites rechtwinkliges Dreieck

Dieser Punkt liegt auf der Mittelsenkrechten der Hypotenuse und gibt Anlass zu einem zweiten rechtwinkligen Dreieck.

Der Flächensatz

Wir bezeichnen mit r den Radius des Thaleskreises. A_1 und A_2 seien die Flächeninhalte der beiden rechtwinkligen Dreiecke. Es gilt der Flächensatz:

$$A_1^2 + A_2^2 = r^4$$

Diese Formel erinnert an den Satz von Pythagoras, spielt aber in der Dimension vier. Daher kann die Situation nicht zweidimensional illustriert werden. Es gibt keinen Zerlegungsbeweis.
Für den rechnerischen Beweis des Flächensatzes arbeiten wir mit dem in der Abbildung 4b eingezeichneten Winkel t. Das erste Dreieck hat die Hypotenusenlänge $2r$ und die dazu senkrechte Höhe $r\sin(t)$. Daher ist $A_1 = r^2\sin(t)$. Analog finden wir $A_2 = r^2\cos(t)$. Durch Quadrieren und Addieren ergibt sich der Flächensatz.

Literatur

Stocker, Hansjürg (2019): Rezension: Wolfgang Zeuge: Nützliche und schöne Geometrie. VSMP Bulletin. Ausgabe 140, Mai 2019, 40.
Zeuge, Wolfgang (2018): Nützliche und schöne Geometrie. Eine etwas andere Einführung in die Euklidische Geometrie. Springer Spektrum. ISBN 978-3-658-22832-3.

Links

Hans Walser: Epstein-Nielsen-Zerlegungsbeweis für den Satz des Pythagoras:
www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/E/Epstein-Nielsen/Epstein-Nielsen.htm