Ein Zick-Zack-Streckenzug im gleichschenkligen Dreieck

René Fehlmann, PH FHNW, rene.fehlmann@fhnw.ch

1 Einleitung

Der Artikel von Beat Jaggi [1] im Bulletin 138 hatte mich an eine Beobachtung betreffend regulärer n-Ecke erinnert. Und zwar hat, wenn n *ungerade* ist, jede Seite eines regulären Polygons einen der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt. Diese Seite des Polygons bildet zusammen mit dem gegenüberliegenden Punkt ein gleichschenkliges Dreieck mit besonderen Eigenschaften (Abb. 1). Auch hier handelt es sich um ein Phänomen, wo offensichtlich die Parität eine Rolle spielt.

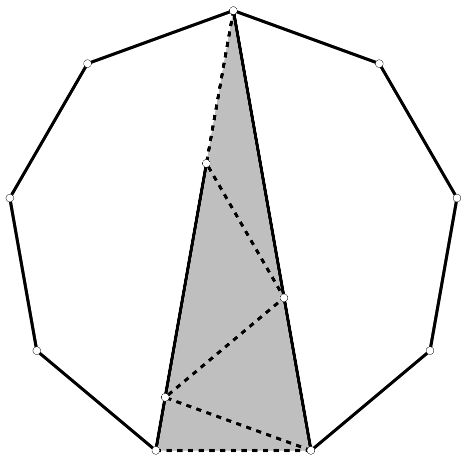

Abbildung 1 – 9-Eck mit eingeschriebenem gleichschenkligen Dreieck und Zick-Zack-Streckenzug.

Die Schenkel dieses Dreiecks sind zwei *längste* Diagonalen des Polygons. Der in der Figur gestrichelt eingezeichnete Zick-Zack-Streckenzug besteht aus Strecken, welche alle gleich lang wie die Seitenlänge des Polygons sind. Die Eckpunkte des Streckenzugs liegen auf den Schenkeln des Dreiecks. Es scheint so, als habe der Streckenzug und das reguläre n-Eck drei gemeinsame Punkte. Wir untersuchen deshalb solche Zick-Zack-Streckenzüge in beliebigen gleichschenkligen Dreiecken.

2 Zick-Zack-Streckenzüge in gleichschenkligen Dreiecken

Man betrachte ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck. Die Basis wird mehrfach in einem Zick-Zack-Streckenzug auf die beiden Schenkel abgetragen (siehe Abb 2). Je nachdem wie gross der der Basis gegenüberliegende Winkel α ist, endet der Streckenzug im Dreieckspunkt C (Spitze des gleichschenkligen Dreiecks) oder nicht. Wir untersuchen für welche Winkel α dieser Streckenzug in C endet. Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein: Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks bezeichnen wir mit P_1P_2. Der Zick-Zack-Streckenzug besteht aus den Eckpunkten $P_1P_2P_3\dots P_n$. Die Frage ist also: Für welchen Wert α ist $P_n = C$. Innerhalb des Streckenzugs betrachten wir die Winkel

$$\begin{array}{lll} \alpha_i = \angle P_{i+2}P_{i+1}P_i\,, & \beta_i = \angle P_{i+1}P_iP_{i+2} & \text{falls } i \text{ ungerade bzw.} \\ \alpha_i = \angle P_iP_{i+1}P_{i+2}\,, & \beta_i = \angle P_{i+2}P_iP_{i+1} & \text{sonst.} \end{array}$$

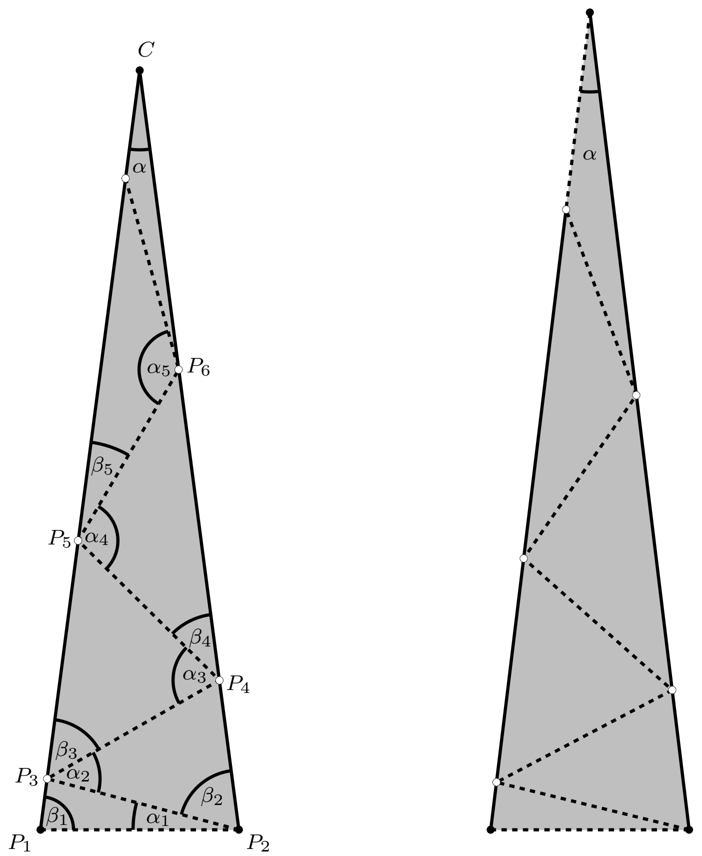

Abbildung 2 – Gleichschenkliges Dreieck mit Zick-Zack-Streckenzug. Der Streckenzug in der rechten Figur endet in der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks.

2.1 Rekursive Darstellung der Folge (β_n)

Zunächst gilt offensichtlich $\beta_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$ und $\alpha_1 = \alpha$, da die Dreiecke P_1P_2C und $P_3P_1P_2$ beide gleichschenklig sind und die Basiswinkel beider Dreiecke gleich gross sind.

Der Figur entnimmt man:

$$\left.\begin{array}{rcll} 2\beta_n + \alpha_n & = & 180° & \text{Winkelsumme im gleichschenkligen} \\ & & & \text{Dreieck } P_nP_{n+1}P_{n+2} \\ \beta_{n-1} + \alpha_n + \beta_{n+1} & = & 180° & \text{gestreckter Winkel über } P_{n+1} \end{array}\right\} \text{für } n > 1$$

Das heisst, die Folge der β_i's genügt der rekursiven Gleichung

$$\beta_{n+1} = 2\beta_n - \beta_{n-1}\,, \quad n > 1 \tag{1}$$

2.2 Explizite Darstellung der Folge (α_n) und (β_n)

Die rekursive Beschreibung (1) der Folge (β_n) ist äquivalent zu:

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$$

Es handelt sich also um eine arithmetische Folge 1. Ordnung. Mit $\beta_2 + \alpha_1 = \beta_2 + \alpha = \beta_1$ und dem Startwert für β_1 erhält man eine explizite Darstellung der beiden Winkelfolgen:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (2n-1)\cdot\alpha \\ \beta_n &= 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - n\cdot\alpha \end{aligned}$$

2.3 Schliessungsbedingung

Die Bedingung $P_n = C$ ist erfüllt, wenn $\beta_{n-2} = \alpha$ gilt. Mit Hilfe der expliziten Darstellung für die Folge β_n erhält man

$$90^\circ + \frac{\alpha}{2} - (n-2)\cdot\alpha = \alpha$$

und aufgelöst nach dem Winkel zwischen den Schenkeln des Dreiecks ergibt sich

$$\alpha = \frac{180^\circ}{2n-3}\,.$$

Die Zick-Zack-Linie schliesst sich also immer, wenn α ein ungerader Teil von 180° ist.

In Abbildung 3 sind ein paar Fälle dargestellt:

- Für $n = 3$ ist $\alpha = 60^\circ$. Es handelt sich also um ein gleichschenkliges Dreieck und der Streckenzug setzt sich aus zwei Seiten des Dreiecks zusammen.
- Für $n = 4$ ist $\alpha = 36^\circ$. Der Streckenzug besteht aus drei Teilen, P_3 teilt die Strecke P_1C im Verhältnis des goldenen Schnitts.
- Für $n = 5$ ist $\alpha = \frac{1}{7}\cdot 180^\circ$. Der Streckenzug besteht aus 6 Teilen. Dieses gleichschenklige Dreieck lässt sich nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren.

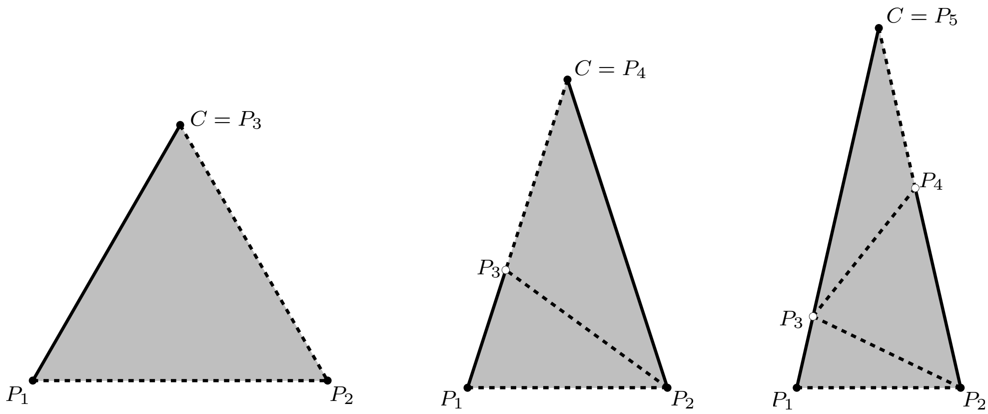

Abbildung 3 – Spezialfälle für $\alpha = 60^\circ$, 36° und $\frac{1}{7}\cdot 180^\circ$.

3 Das reguläre Vieleck mit ungerader Eckenzahl

Man betrachte nun ein reguläres Vieleck mit ungerader Eckenzahl $2n+1$. Wie oben beschrieben, schreibe man dem $2n+1$-Eck ein gleichschenkliges Dreieck ein (siehe Abb. 4). Der Punkt C bezeichne wieder die Spitze des gleichschenkligen Dreiecks. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass der Zentriwinkel 2α beträgt und natürlich ist $(2n+1)\cdot 2\alpha = 360^\circ$ und damit $\alpha = \dfrac{180^\circ}{2n+1}$. Die Bedingung ist damit erfüllt, dass der Zick-Zack-Streckenzug in diesem gleichschenkligen Dreieck im Punkt C endet.

Wir zeigen, dass die Längen der Strecken CP_2, CP_3, CP_4, ... jeweils gleich gross sind wie die Längen der Diagonalen des regulären Vielecks, d.h. auf Kreisen mit Mittelpunkt in C, die durch einen Punkt P_i gehen, liegt auch ein Eckpunkt des regulären Polygons.

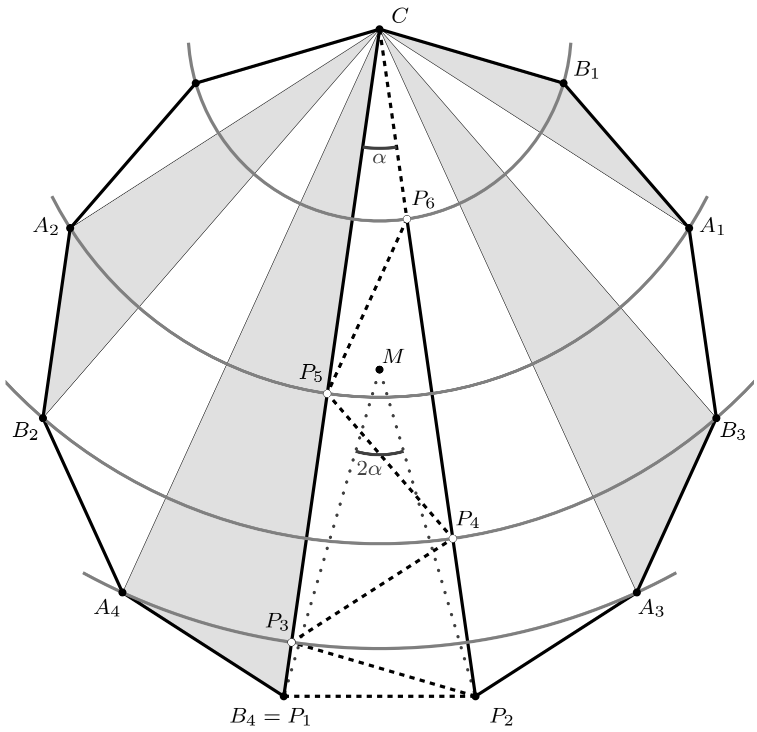

Abbildung 4 – 11-Eck mit eingeschriebenem gleichschenkligen Dreieck.

Man betrachte dazu die Dreiecke A_iB_iC wie in Abbildung 4 eingezeichnet. Aus dem Peripheriewinkelsatz folgt, dass $\angle A_iCB_i = \alpha$, d.h. die Winkel im Punkt C dieser Dreiecke sind alle gleich gross. Die (gleichschenkligen) Dreiecke A_1B_1C und P_5P_6C sind kongruent, denn sie haben in C den gleichen Innenwinkel und die Seiten B_1C und P_6C bzw. A_1B_1 und P_5P_6 sind jeweils gleich lang. Folglich sind die beiden Seiten CA_1 und CP_5 gleich lang. Die Strecke CP_5 ist also gleich lang wie die kürzeste Diagonale im regulären Polygon. Mit einem Induktionsschritt geht es nun weiter. Man zeigt, dass die Dreiecke A_2B_2C und P_5P_4C kongruent sind und folglich die Strecke CP_4 gleich lang wie die zweitlängste Diagonale im Polygon ist.

Die Argumentation gilt nicht nur für das reguläre 11-Eck wie in Abbildung 4, sondern für beliebige reguläre Polygone mit ungerader Anzahl Ecken.

Literatur

[1] B. Jaggi: *Gerade oder ungerade – das ist hier die Frage!*, Bulletin 138, 2018, pp. 30–45