DMK

Bekanntes und weniger Bekanntes zu Lucas-Folgen

Beat Jaggi, beat.jaggi@phbern.ch und Philipp Reinhard, philippreinhard@hotmail.com

1 Einleitung

Es erstaunt immer wieder, mit wie vielen mathematischen Themen die berühmte Fibonacci-Folge in Verbindung gebracht werden kann (siehe zum Beispiel [2]):

Zu nennen sind da Matrizen und Eigenwerte, spezielle irrationale Zahlen (goldener Schnitt), Kettenbrüche (im Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus), Diophantische Gleichungen (Gleichungen, bei denen ausschliesslich ganzzahlige Lösungen gesucht sind), erzeugende Funktionen und - last but not least - das 'goldene Rechteck'. Die Liste ist sicher nicht abschliessend.

Einige dieser Verbindungen behalten ihre Gültigkeit auch für Verallgemeinerungen der Fibonacci-Folge. Bei diesen Verallgemeinerungen sind vor allem die nach dem französischen Mathematiker Édouard Lucas (1842 - 1891) benannten allgemeinen Lucas-Folgen zu nennen, definiert durch
$u_0 = 0,\ \ u_1 = 1,\ \ u_{n+1} = p \cdot u_n - q \cdot u_{n-1}$ für $n \geq 1$ mit fest vorgegebenen ganzen Zahlen p und q.

Im nachfolgenden Hauptteil geht es um Verbindungen von gewissen Lucas-Folgen mit den obgenannten Themen.

2 Hauptteil

Wir verwenden eine leicht andere und eingeschränkende

Definition: r und s sind fest vorgegebene natürliche Zahlen.

Die Folge a_n ist rekursiv definiert durch

$$a_0 = 0,\ \ a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = r \cdot a_n + s \cdot a_{n-1} \text{ für } n \geq 1$$

Die ersten Folgenglieder sind $a_0 = 0,\ \ a_1 = 1,\ \ a_2 = r,\ \ a_3 = r^2 + s,\ \ a_4 = r^3 + 2rs, \cdots$

Bemerkung: Eigentlich müssten wir die Folgenglieder a_n mit Indices r, s versehen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir darauf.

Es gelten die folgenden Sachverhalte:

A. Matrizen und Eigenwerte

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Beweis: mit elementarer Matrizenrechnung.

Bemerkungen:

(a) Matrizen sind wohl das einfachste Mittel, um die explizite Darstellung der Folge a_n zu finden.

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ lässt sich diagonalisieren. Das charakteristische Polynom

$$\det(A - x \cdot E) = (r-x)(-x) - s = x^2 - rx - s$$

liefert die Eigenwerte

$$\alpha = \frac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2} \text{ und } \beta = \frac{r - \sqrt{r^2+4s}}{2}.$$

Man rechnet nach, dass $A = UDU^{-1}$ resp.

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & s \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{s(\alpha-\beta)} & \frac{1}{\alpha-\beta} \\ -\frac{\beta}{s(\alpha-\beta)} & \frac{-1}{\alpha-\beta} \end{pmatrix} \quad \text{gilt.}$$

Mit $A^n = UD^nU^{-1}$ findet man schliesslich die Formel für die explizite Darstellung

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Dabei sind $\alpha = \frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}$ und $\beta = \frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}$ (wie oben) die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - rx - s = 0$.

(b) Die Richtigkeit der Formel $a_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ kann auch mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

(c) Für $r = s = 1$ ergibt sich die von De Moivre im Jahr 1718 gefundene und von Binet im Jahr 1843 wiederentdeckte Formel für die explizite Darstellung der Fibonacci-Zahlen.

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad ; \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

B. Quotienten benachbarter Folgeglieder

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha = \frac{r + \sqrt{r^2+4s}}{2}$$

Beweis: Es gilt nachzuweisen, dass die Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ der Quotienten konvergiert.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}}{\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \frac{\alpha^{n+1} \cdot \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}\right]}{\alpha^n \cdot \left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right]} = \alpha \cdot \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

Man rechnet leicht nach, dass $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ gilt.

Mit Grenzwertkalkül folgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\cdot\frac{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}}\right)=\alpha \qquad \square$$

Bemerkung: Für $r=s=1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618 \text{ (Zahl des goldenen Schnittes).}$$

C. 'Euklidischer Algorithmus'

Es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}=\alpha &= r\cdot 1+s\cdot\frac{1}{\alpha}\\ 1 &= r\cdot\frac{1}{\alpha}+s\cdot\frac{1}{\alpha^2}\\ \frac{1}{\alpha} &= r\cdot\frac{1}{\alpha^2}+s\cdot\frac{1}{\alpha^3}\\ \frac{1}{\alpha^2} &= r\cdot\frac{1}{\alpha^3}+s\cdot\frac{1}{\alpha^4}\\ \vdots\quad &\vdots \qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus $\alpha^2=r\cdot\alpha+s$.

Bemerkungen:

(a) $r=s=1$: Der Euklidische Algorithmus, angewandt auf φ und 1, liefert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi=1\cdot 1+(\varphi-1) &\implies \varphi=1\cdot 1+\frac{1}{\varphi}\\ 1=1\cdot(\varphi-1)+(2-\varphi) &\implies 1=1\cdot\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2}\\ (\varphi-1)=1\cdot(2-\varphi)+(2\varphi-3) &\implies \frac{1}{\varphi}=1\cdot\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^3}\\ (2-\varphi)=1\cdot(2\varphi-3)+(5-3\varphi) &\implies \frac{1}{\varphi^2}=1\cdot\frac{1}{\varphi^3}+\frac{1}{\varphi^4}\\ \vdots\qquad\qquad &\vdots\qquad\qquad \vdots\end{aligned}$$

Dabei ist $\varphi-1<2-\varphi<2\varphi-3<5-3\varphi<\ldots$ resp. $1>\frac{1}{\varphi}>\frac{1}{\varphi^2}>\frac{1}{\varphi^3}>\frac{1}{\varphi^4}>\ldots$.

Es zeigt sich, dass im allgemeinen Fall $a_{n+1}=r\cdot a_n+s\cdot a_{n-1}$ die Gleichungen nicht mehr als Divisionen (wie beim Euklidischen Algorithmus) interpretiert werden können.

D. Kettenbrüche

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ sind Näherungsbrüche des Kettenbruches $$\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2} = r + \cfrac{s}{r+\cfrac{s}{r+\cfrac{s}{r+\cfrac{s}{r+\cfrac{s}{r+\cdots}}}}}$$

Also:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{r}{1} = r;\quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{r^2+s}{r} = r+\frac{s}{r};\quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{r^3+2rs}{r^2+s} = r+\cfrac{s}{r+\cfrac{s}{r}};\quad \frac{a_5}{a_4} = r+\cfrac{s}{r+\cfrac{s}{r+\cfrac{s}{r}}};\quad \ldots$$

<u>Beweis</u>: In $\alpha = r + \frac{s}{\alpha}$ ersetze man im Term rechts den Nenner α sukzessive durch $\alpha = r + \frac{s}{\alpha}$.

<u>Bemerkungen</u>:

(a) Für $r = s = 1$ erhält man den berühmten Kettenbruch des goldenen Schnittes.

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1} = 1;\quad \frac{f_3}{f_2} = \frac{2}{1} = 1+\frac{1}{1};\quad \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}};\quad \frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = \frac{8}{5};\quad \ldots$$

(b) Der Ausdruck $\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}$ ist nicht für alle Wahlen von r und s irrational!

Für $r = m - k$ (mit $k < m$) und $s = k \cdot m$ wird $\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2} = m$ und somit

$$m = (m-k) + \cfrac{k\cdot m}{(m-k)+\cfrac{k\cdot m}{(m-k)+\cfrac{k\cdot m}{(m-k)+\cfrac{k\cdot m}{(m-k)+\cfrac{k\cdot m}{(m-k)+\cdots}}}}}$$

Für $m = 5$ und $k = 2$ ergibt das:

$$5 = 3 + \cfrac{10}{3+\cfrac{10}{3+\cfrac{10}{3+\cfrac{10}{3+\cfrac{10}{3+\cdots}}}}}$$

Die (unendliche!) Folge der Näherungsbrüche $3, 3+\frac{10}{3},\ 3+\frac{10}{3+\frac{10}{3}}, \ldots$ konvergiert gegen die natürliche Zahl 5.

E. 'Diophantische' Gleichungen

Die Zahlenpaare (a_{n+1}, a_n) sind Lösungen der Gleichungen

$$y^2 - sx^2 - rxy = (-s)^n$$

$$\text{Das heisst } a_{n+1}^2 - s \cdot a_n^2 - r \cdot a_{n+1} \cdot a_n = (-s)^n \;;\quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

<u>Beweis</u>: Mit Induktion: Für $n = 0$ bekommt man: $a_1^2 - s \cdot a_0 - r \cdot a_1 \cdot a_0 = 1 = (-s)^0$.
Das stimmt!

$a_{k+1}^2 - s \cdot a_k^2 - r \cdot a_{k+1} \cdot a_k = (-s)^k$ sei richtig für ein k.

$a_{k+2}^2 - s \cdot a_{k+1}^2 - r \cdot a_{k+2} \cdot a_{k+1}$

$= (r \cdot a_{k+1} + s \cdot a_k)^2 - s \cdot a_{k+1}^2 - r\,(r \cdot a_{k+1} + s \cdot a_k) \cdot a_{k+1}$

$= r^2 \cdot a_{k+1}^2 + 2 \cdot r \cdot s \cdot a_{k+1} \cdot a_k + s^2 \cdot a_k^2 - s \cdot a_{k+1}^2 - r^2 \cdot a_{k+1}^2 - r \cdot s \cdot a_{k+1} \cdot a_k$

$= r \cdot s \cdot a_{k+1} \cdot a_k + s^2 \cdot a_k^2 - s \cdot a_{k+1}^2 = -s \cdot \left(a_{k+1}^2 - s \cdot a_k^2 - r \cdot a_{k+1} \cdot a_k\right)$

$= -s \cdot (-s)^k = (-s)^{k+1}$: Die Formel stimmt auch für $k + 1$. □

<u>Bemerkungen</u>:

(a) Die hier vorkommenden Gleichungen sind nicht wirklich 'diophantisch', da die rechte Seite von n abhängt. Im Fall $s = 1$ wird das aber in der Literatur doch ab und zu akzeptiert (siehe [1]).

(b) Für $r = s = 1$ ergibt sich

$$f_{n+1}^2 - f_n^2 - f_{n+1} \cdot f_n = (-1)^n \;;\quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

eine der zahlreichen Identitäten für die Fibonacci-Zahlen.

F. Erzeugende Funktion

Die Folgenglieder a_n werden von der Funktion $f(x) = \frac{x}{1-rx-sx^2}$ erzeugt. Das heisst

$$\frac{x}{1 - rx - sx^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe beträgt $\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{r+\sqrt{r^2+4s}}$.

<u>Beweis</u>: Ansatz

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots \\
xf(x) &= \phantom{a_0x^0 + {}} a_0x^1 + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + \cdots \\
x^2f(x) &= \phantom{a_0x^0 + a_1x^1 + {}} a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_3x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

Wegen $a_{n+1} - r \cdot a_n - s \cdot a_{n-1} = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) - rxf(x) - sx^2f(x) &= a_0 + a_1x - ra_0x \\
\left(1 - rx - sx^2\right) f(x) &= x \qquad\qquad (\text{wegen } a_0 = 0,\ a_1 = 1)
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{1 - rx - sx^2}$$

Der Konvergenzradius R lässt sich sowohl mit

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\alpha}$$

als auch mit der Formel von Cauchy-Hadamard berechnen:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)} = \frac{1}{\alpha}$$

Bemerkungen:

(a) Die erzeugende Funktion bekäme man (theoretisch) auch, wenn man $f(x) = \frac{x}{1-rx-sx^2}$ in eine Taylorreihe entwickelt.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \cdots$$

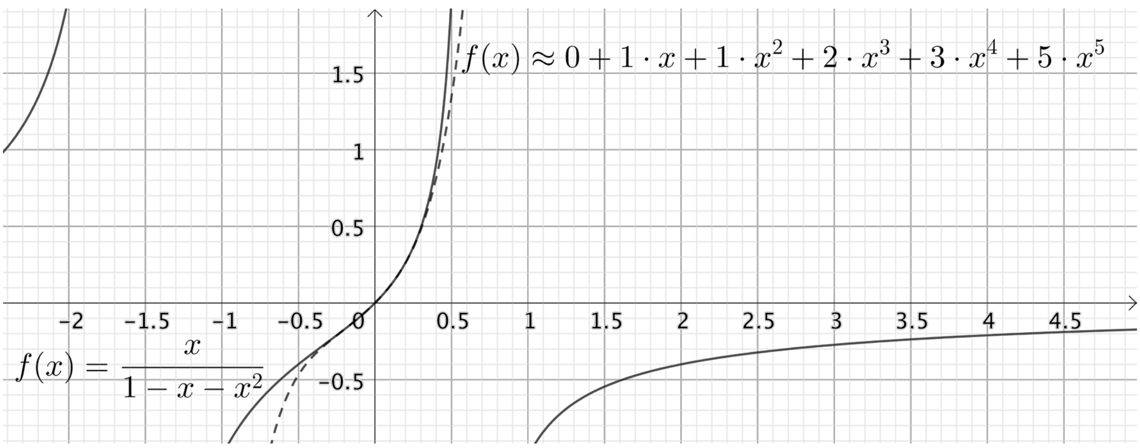
Wegen $f(x) = \frac{x}{1-rx-sx^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ gilt also

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

(b) $r = s = 1$: Die Fibonacci-Zahlen werden durch

$$\frac{x}{1-x-x^2} = f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \cdots$$

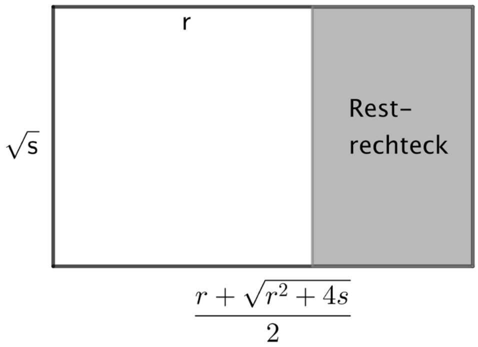
erzeugt. Der Konvergenzradius der Reihe beträgt $\frac{2}{1+\sqrt{5}} \approx 0.618$.

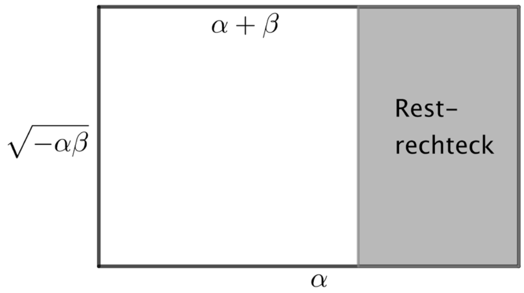


Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ (schwarze Linie) und der Graph des Taylor-Polynoms $f_0 + f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + f_5x^5$ (gestrichelte Linie).

G. Spezielle Rechtecke

Schneidet man bei einem Rechteck der Breite $\sqrt{s}$ und der Länge $\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}$ ein Rechteck (der Breite $\sqrt{s}$ und) der Länge r ab, dann ist das Restrechteck ähnlich zum ursprünglichen Rechteck. (Bild links)





Mit den Nullstellen $\alpha = \frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}$ und $\beta = \frac{r-\sqrt{r^2+4s}}{2}$ von $x^2 - rx - s = 0$ lautet die Behauptung: (Bild rechts)

Schneidet man bei einem Rechteck der Breite $\sqrt{-\alpha\beta}$ und der Länge α ein Rechteck (der Breite $\sqrt{-\alpha\beta}$ und) der Länge $\alpha+\beta$ ab, dann ist das Restrechteck ähnlich zum ursprünglichen Rechteck. (Man beachte, dass $\beta < 0$ gilt.)

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}}{\sqrt{s}} &= \frac{\sqrt{s}}{\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2} - r} \\
\left(\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2}\right)\left(\frac{-r+\sqrt{r^2+4s}}{2}\right) &= \sqrt{s}\cdot\sqrt{s} \\
\frac{-r^2+r^2+4s}{4} &= s \qquad \square
\end{aligned}$$

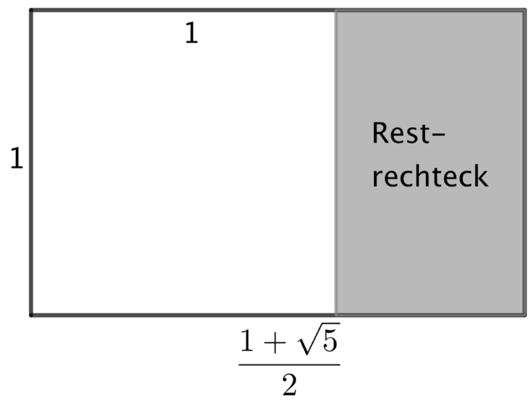
Bemerkungen:

(a) Auch hier kommen als Längen und Breiten des Rechteckes rationale, sogar ganzzahlige Werte vor.

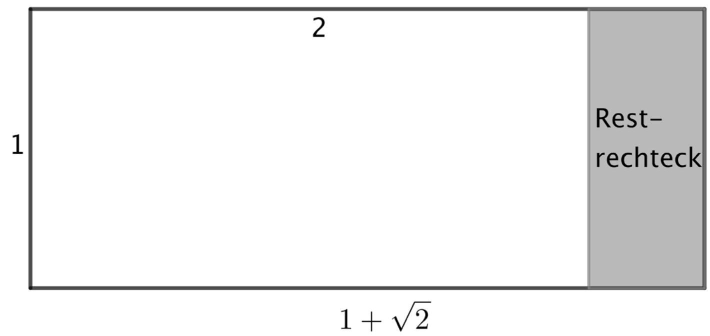
Für $r=1$ und $s=2$ wird $\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2} = 2$. Die Aussage lautet:
Schneidet man von einem Rechteck der Breite $\sqrt{2}$ und der Länge 2 ein Rechteck (der Breite $\sqrt{2}$ und) der Länge 1 ab, so ist das Restrechteck (Breite 1 und Länge $\sqrt{2}$) ähnlich zu Ausgangsrechteck. Das ist gerade die charakteristische Eigenschaft der DIN A-Papierformate!

Für $r=3$ und $s=4$ wird $\frac{r+\sqrt{r^2+4s}}{2} = 4$. Die Aussage lautet:
Schneidet man von einem Rechteck der Breite $\sqrt{4}=2$ und der Länge 4 ein Rechteck (der Breite 2 und) der Länge 3 ab, so ist das Restrechteck (Breite 1 und Länge 2) ähnlich zu Ausgangsrechteck.

(b) Für $r = s = 1$ ist das Rechteck ein 'goldenes Rechteck':
Schneidet man bei einem Rechteck der Breite 1 und der Länge $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ein Quadrat der Seitenlänge 1 ab, dann ist das Restrechteck ähnlich zum ursprünglichen Rechteck.



(c) Für $r = 2$ und $s = 1$ ergibt sich ein 'silbernes Rechteck'.



Die Definition eines 'bronzenen Rechtecks' sei den geneigten Leserinnen und Lesern überlassen.

Abschliessende Bemerkungen:

1. Die meisten der aufgeführten Tatsachen sind natürlich schon lange bekannt. Ein paar Dinge (unendliche Kettenbrüche für natürliche Zahlen, spezielle Rechtecke) aber haben wir in der Literatur nicht (oder wenigstens nicht mit den hier dargestellten Zusammenhängen) gefunden und wären dankbar für sachdienliche Hinweise.

2. Mit unserer Wahl von r und s sind alle Folgenglieder a_n natürliche Zahlen. Etliche Tatsachen gelten auch für positive reelle Zahlen r und s.

Literatur, Quellen

[1] Jones, J. P., Diophantine Representation of the Fibonacci Numbers, The Fibonacci Quarterly, Vol. 13 (1975): pp. 84–88

[2] Koshy, Th., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Second edition, Wiley 2018