# Mathematische Miniatur

Oliver Riesen, KS Zug, oliver.riesen@ksz.ch

## 1. Ausgangslage

Beim Vorbereiten eines Skripts zur Trigonometrie habe ich mich auf die Suche nach *schön aufgehenden* Ergebnissen gemacht. Was ich damit meine, folgt.
Die Aufgabe ist ganz einfach: Von den Werten der trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ im rechtwinkligen Dreieck soll ein Wert gegeben sein, der andere gesucht.
So erhält man beispielsweise für $\sin(x) = 0.2$ den Wert $\cos(x) = \sqrt{0.96} = 0.979795897\ldots$, für $\sin(x) = 0.352$ erhält man den Wert $\cos(x) = 0.936$. In diesem letzten Beispiel sind beide Dezimalbrüche abbrechend, die Werte also exakt.
Genau solche Beispiele suchte ich: Sowohl der Sinus- als auch der Cosinus-Wert sollen abbrechende Dezimalbrüche sein.

## 2. Bekanntes

a) Für jedes Pythagoreische Zahlentripel erhält man rationale Lösungen für die verlangten Werte. Beispielsweise ergibt sich aus dem Tripel $(5, 12, 13)$ die Möglichkeit, dass $\sin(x) = \frac{5}{13}$ und $\cos(x) = \frac{12}{13}$. Die Darstellung dieses Beispiels in Dezimalbrüchen liefert aber keine abbrechenden Werte.

b) Wir müssen nur primitive (=nicht kürzbare) Tripel betrachten, denn das Tripel $(6, 8, 10)$ liefert dieselben Werte wie das Tripel $(3, 4, 5)$, nämlich 0.6 und 0.8.

c) Auch bekannt ist, dass für ein primitives Pythagroas-Tripel die Hypotenuse eine ungerade Zahl ist.

d) Damit ein Dezimalbruch eine abbrechende Darstellung hat, darf der Nenner nur Potenzen von 2 und 5 enthalten. Auch das ist bekannt.

## 3. Folgerungen

Aus den obigen Überlegungen folgt sofort, dass für die gestellte Aufgabe nur Pythagoreische Tripel in Frage kommen, bei denen die Hypotenuse eine Potenz von 5 ist. Passende Tripel findet man in jeder Formelsammlung:

a) Aus dem Tripel $(3, 4, 5)$ ergeben sich die Werte $\sin(x) = 0.6$ und $\cos(x) = 0.8$.

b) Aus dem Tripel $(7, 24, 25)$ ergeben sich die Werte $\sin(x) = 0.28$ und $\cos(x) = 0.96$.

c) Aus dem Tripel $(44, 117, 125)$ ergeben sich die Werte $\sin(x) = 0.352$ und $\cos(x) = 0.936$. Das war mein Einstiegsbeispiel.

Diese Beispiele sind mit den Potenzen $5^1$, $5^2$ resp. $5^3$ jeweils die einzigen Möglichkeiten.

## 4. Höhere Potenzen von 5

Mich nahm es dann Wunder, ob es für höhere Potenzen von 5 weitere solche Lösungen gibt, bei denen sowohl der Sinus- als auch der Cosinus-Wert eine abbrechende Dezimalbruchdarstellung haben.
Mit einem kleinen Programm fand ich folgende Lösungen:

a) $(336, 527, 625)$ ist das (einzige primitive) Pythagoras-Tripel mit Hypotenuse $5^4$. Die Dezimalbrüche sind 0.5376 und 0.8432.

b) Für $5^5$ ist die (wieder einzige) Lösung $(237, 3116, 3125)$.

c) Auch für die weiteren untersuchten Potenzen $5^6$, $5^7$ und $5^8$ fand das Programm wieder nur ein einziges primitives Pythagoras-Tripel. Die entstehenden abbrechenden Dezimalbrüche scheinen jedoch keinem erkennbaren Schema zu folgen.

## 5. Fragen

Somit habe ich mich gefragt:

a) **Gibt es für jede Potenz von 5 genau ein primitives Pythagoras-Tripel mit dieser Zahl als Hypotenuse?**

b) Gibt es, falls ja, dafür einen Beweis?

## 6. Ergänzung

Ich habe meine Miniatur der dmk gezeigt, worauf sich die Herren Lorenz Halbeisen und Norbert Hungerbühler von der ETH des Problems angenommen haben.
Offenbar hat die diophantische Gleichung $x^2 + y^2 = 5^k$ immer genau eine Lösung mit teilerfremden $x$ und $y$. Die Werte von $x$ und $y$ erhält man relativ leicht als Betrag des Real- bzw. Imaginärteils von $(1 + 2\mathrm{i})^k$. Um zu zeigen, dass $x$ und $y$ die *einzigen* teilerfremden Lösungen sind, braucht es dann noch etwas mehr.
Für meine Miniatur brauche ich nur die geraden Werte von $k$. Somit erhält man die Lösungen der diophantischen Gleichung als Betrag des Real- bzw. Imaginärteils von $z = (4 + 3\mathrm{i})^n, n \in \mathbb{N}$ und die gesuchten Dezimalbrüche sind dann $\left|\mathrm{Re}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|$ und $\left|\mathrm{Im}\left(\frac{z}{|z|}\right)\right|$.
So gesehen ist die eingangs gestellte Aufgabe (abgesehen von der Eindeutigkeit der Lösung) in *einer* Linie gelöst.