Encore un calcul de π

Jean-Marc Ledermann, Neuchâtel, jean-marc.ledermann@net2000.ch

Ayant enseigné les mathématiques, les applications des mathématiques et la géométrie descriptive pendant 40 ans, me voici à la retraite et j'en profite agréablement pour … faire des maths !

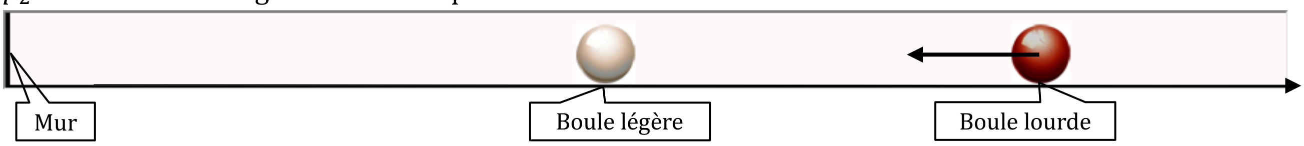
Le Monde publie chaque mercredi une rubrique intitulée « affaire de logique » contenant un problème de maths souvent intéressant et parfois difficile ainsi que divers liens vers des sites internet traitant de mathématiques. Un tel lien m'a mené à une vidéo[1] présentant un problème lié au « billard à deux billes et une bande », problème que je vous résume ci-dessous.

Une expérience simple, mais théorique, de physique permet de calculer π avec une précision voulue. Le dispositif est le suivant : sur un plan horizontal on place deux boules, une lourde et l'autre légère, la première se déplace et vient heurter la deuxième boule initialement immobile, cette deuxième boule va alors se déplacer jusqu'à rebondir contre un mur puis à nouveau contre la boule lourde. Ainsi de suite un certain nombre de fois.

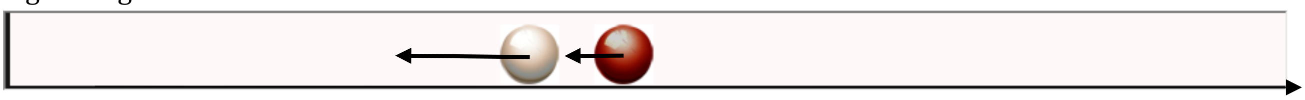
- Si le rapport des masses des boules vaut 1, alors le nombre total de chocs vaut 3.
- Si le rapport des masses vaut 100, alors le nombre total de chocs vaut 31.
- Si le rapport des masses vaut 10'000, alors le nombre total de chocs vaut 314.
- Si le rapport des masses vaut 1'000'000, alors le nombre total de chocs vaut 3141.

Le but de cet article est de montrer que si l'on note m le rapport des masses et n le nombre de chocs alors $\pi = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{m}}\right)$ et, plus précisément, si $m = 10^{2k}, k \in \mathbb{N}^*$ alors $n = \left\lfloor \sqrt{m} \cdot \pi \right\rfloor$.

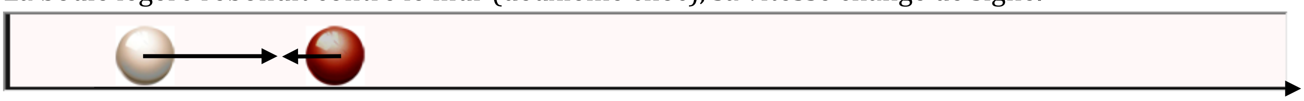
La boule lourde a une masse m supérieure ou égale à 1, une vitesse initiale v_1, disons $v_1 = -1$, et une position initiale p_1. La boule légère a une masse de 1, une vitesse initiale $v_2 = 0$ et une position initiale p_2. Les unités de longueur et de temps sont volontairement omises.



Après le premier choc entre les deux boules, la vitesse de la boule lourde diminue, celle de la boule légère augmente.



La boule légère rebondit contre le mur (deuxième choc), sa vitesse change de signe.



Après le troisième choc (deuxième choc entre boules), les vitesses peuvent soit changer l'une ou/et l'autre de signe, soit garder le même signe.
Dans un premier temps la boule lourde se dirige contre le mur, puis dans un deuxième temps, s'éloigne du mur. La boule légère rebondit alternativement contre la boule lourde et contre le mur.
Le processus se poursuit jusqu'à ce que la vitesse en valeur absolue de la boule légère soit inférieure à celle de la boule lourde. Si la boule légère se dirige alors contre le mur, il y a encore un dernier choc.

---

1 https://www.youtube.com/watch?v=t8IoL-LXuAk

Nombre de chocs en fonction de m

On souhaite exprimer le nombre n de chocs en fonction de m.

Les chocs entre deux boules sont supposés élastiques, la quantité du mouvement $m_1 v_1 + m_2 v_2$ et l'énergie cinétique $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$ sont conservées.

Si l'on note v_1 et v_2 les vitesses avant un choc entre deux boules et v_1', v_2' les vitesses après ce choc, on a (en posant $m_1 = m$ et $m_2 = 1$).

$$\begin{cases} mv_1 + v_2 = mv_1' + v_2' \\ mv_1^2 + v_2^2 = mv_1'^2 + v_2'^2 \end{cases}$$

Je propose au lecteur de résoudre ce système, résolution qui est toutefois donnée en annexe, et de trouver

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{m-1}{m+1} v_1 + \dfrac{2}{m+1} v_2 \\ v_2' = \dfrac{2m}{m+1} v_1 - \dfrac{m-1}{m+1} v_2 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m-1}{m+1} & \dfrac{2}{m+1} \\ \dfrac{2m}{m+1} & \dfrac{1-m}{m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Un choc contre le mur, qui ne provoque qu'un changement de sens de v_2, s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

et la composition des deux chocs est donné par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{m-1}{m+1} & \dfrac{2}{m+1} \\ \dfrac{-2m}{m+1} & \dfrac{m-1}{m+1} \end{pmatrix}$$

Dans un premier temps, la création d'un programme informatique permet d'illustrer la situation par une animation graphique. Sa conception n'est pas trop difficile, il peut être réalisé par nos (vos) élèves dans le cadre d'un cours d'applications des maths (voir l'annexe 1).

Ma première idée pour déterminer le nombre de chocs en fonction de m a été de calculer M^k, puis de déterminer la valeur de k pour laquelle la deuxième composante de $M^k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est plus petite que la première.

Une première approche avec Mathematica permet de vérifier que, pour $m = 10'000$, la vitesse de la deuxième boule est supérieure à celle de la première après 156 doubles-chocs, mais inférieur après 157 doubles-chocs. Les 2 vitesses étant positives, on en déduit que $n = 314$.

Vitesses finales des deux boules

Nombre de doubles chocs

Vitesses initiales des deux boules

$$m = 10000; \text{MatrixPower}\left[\frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m-1 & 2 \\ -2m & m-1 \end{pmatrix}, 156\right] \cdot \begin{pmatrix} -1. \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9997646369800843 \\ 2.169494512738102 \end{pmatrix}$$

$$m = 10000; \text{MatrixPower}\left[\frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m-1 & 2 \\ -2m & m-1 \end{pmatrix}, 157\right] \cdot \begin{pmatrix} -1. \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9999985595629778 \\ 0.16973131619503998 \end{pmatrix}$$

On a

$$M^k = \frac{1}{(m+1)^k}\begin{pmatrix} m-1 & 2 \\ -2m & m-1 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{(m+1)^k}N^k$$

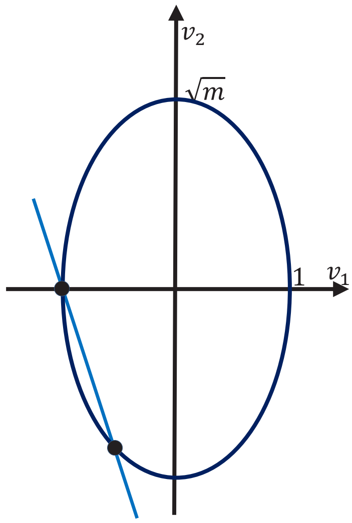
Les valeurs propres de N étant $m-1\pm 2\mathrm{i}\sqrt{m}$, et les vecteurs propres $\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\sqrt{m}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\sqrt{m}\end{pmatrix}$, on obtient

$$N^k = \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{m} & -\mathrm{i}\sqrt{m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \left(m-1+2\mathrm{i}\sqrt{m}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(m-1-2\mathrm{i}\sqrt{m}\right)^k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m & -\mathrm{i}\sqrt{m} \\ m & \mathrm{i}\sqrt{m}\end{pmatrix}$$

Ce calcul me semble bien difficile, j'abandonne cette piste !

Une autre vidéo[2] présente une méthode élégante en illustrant le processus dans l'espace de phase. Je tente de vous la présenter ci-dessous.

Exprimons les vitesses dans le plan $v_{1,}v_2$.



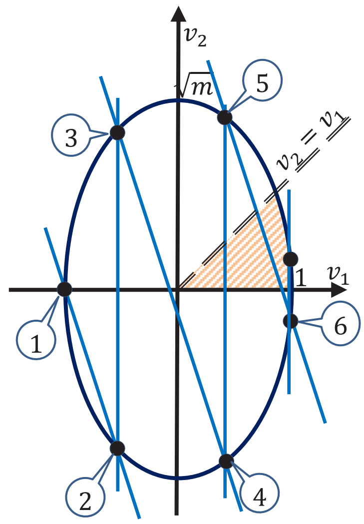
Lors d'un choc entre deux boules, la conservation de l'énergie $mv_1^2+v_2^2=$ constante, indique que les points du plan de phase avant et après le choc appartiennent les deux à l'ellipse d'équations $v_1^2+\frac{1}{m}v_2^2=c_1$.

La conservation du mouvement $mv_1+v_2=$ constante indique que les points du plan de phase avant et après le choc appartiennent les deux à la droite de pente $-m$ et d'équation $v_2=-mv_1+c_2$.

Au début $v_1=-1$ et $v_2=0$.

En remplaçant les coordonnées de ce point $(-1;0)$ du plan $v_{1,}v_2$ dans l'équation de l'ellipse, on obtient $v_1^2+\frac{1}{m}v_2^2=1$ et pour la droite on obtient $v_2=-mv_1-m$.

Le deuxième point de l'espace de phase, correspondant à la situation après le premier choc (1→2), se trouvera à l'intersection de la droite et de l'ellipse.



Le choc contre le mur (2→3) a pour effet de changer le signe de v_2 sans changer v_1. Le troisième point de l'espace de phase, correspondant à la situation après le deuxième choc (choc contre le mur), se trouvera sur cette même ellipse, symétrique du point précédent par rapport à l'axe horizontal.

Le troisième choc (3→4), choc entre les deux boules, satisfait (conservation du mouvement) l'équation $mv_1+v_2=const$, le point de l'espace de phase (4) correspondant à la situation après le troisième choc se trouve donc à l'intersection de la droite de pente $-m$ et passant par le troisième point et cette même ellipse.

Ce procédé (symétriques – droite de pente $-m$) est répété jusqu'à ce que le point obtenu se trouve dans le secteur de l'ellipse compris entre la partie positive des abscisses et la droite $v_2=v_1$ (hachuré sur le dessin ci-contre). La vitesse de la boule légère est alors positive et inférieure à celle de la boule lourde et aucun choc ne peut plus avoir lieu.

Pour terminer ce problème, il « suffit » de compter, en fonction de m, le nombre de points ainsi obtenus sur l'ellipse.

[2] https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE

Effectuons le changement de variable

$$v_2 \to \frac{1}{\sqrt{m}} v_2$$

définissant une affinité axiale qui transforme l'ellipse en un cercle d'équation

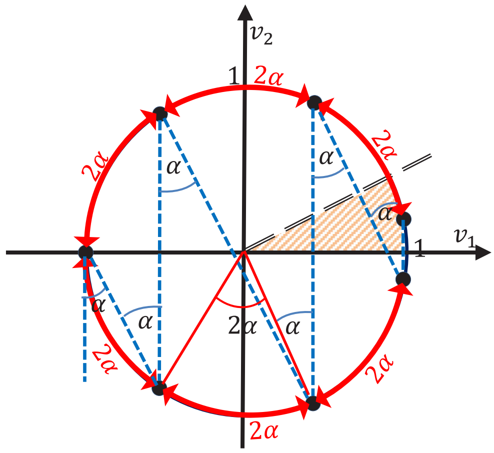
$$v_1^2 + v_2^2 = 1$$

et les droites de pente $-m$ par des droites de pente $-\sqrt{m}$ et d'équation

$$v_2 = -\sqrt{m}\, v_1 + h$$

Notons α l'angle entre les verticales et les droites de pente $-\sqrt{m}$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$



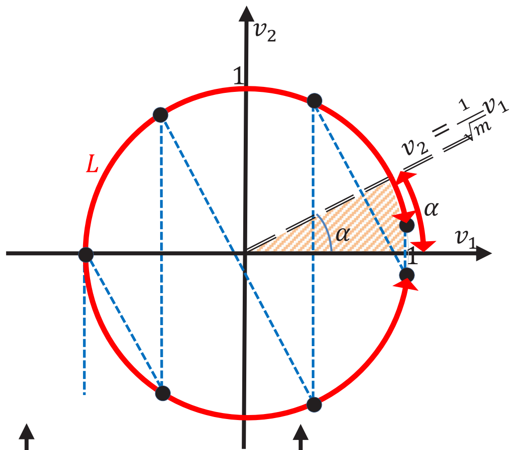
Le théorème de l'angle au centre indique que tous les arcs de cercle délimités par une verticale et une droite de pente $-\sqrt{m}$ sont de même longueur et que cette longueur vaut 2α (le cercle est de rayon 1).

Notons L la longueur de la partie de la circonférence du cercle décrite par ces n arcs de cercle

$$L = n \cdot 2\alpha \; = n \cdot 2 \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

Le secteur de l'ellipse compris entre la partie positive des abscisses et la droite $v_2 = v_1$ est transformé par l'affinité axiale en un secteur circulaire compris entre la partie positive des abscisses et la droite $v_2 = \frac{1}{\sqrt{m}} v_1$ qui forme avec l'axe horizontal un angle $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \alpha$.
La longueur de l'arc de cercle correspondant est donc également α.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$



La circonférence du cercle de 2π est formée par les n arcs d'une longueur totale de $L = n \cdot 2\alpha$ et par un dernier arc de longueur inférieure à 2α.
Le dernier arc est de longueur inférieure à 2α car il est défini par le point situé dans le secteur *interdit* et le point précédent qui est,

- soit situé sous l'axe des abscisses et formant avec celui-ci un angle inférieur à α (fig 1),
- soit situé au-dessus de l'axe des abscisses, mais formant avec cet axe un angle inférieur à 2α (fig. 2).

fig. 1

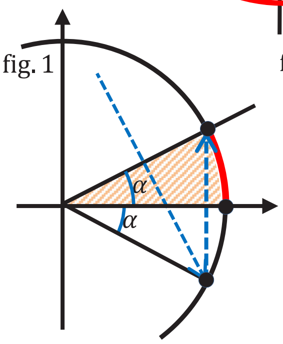
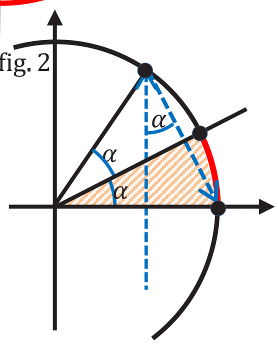


fig. 2



Montrons que $\pi = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{m}}\right)$

$$2\pi - 2\alpha \le L \le 2\pi \quad \Rightarrow \quad \pi - \alpha \le n \cdot \alpha \le \pi \quad \Rightarrow \frac{\pi}{\alpha\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m}} \le \frac{n}{\sqrt{m}} \le \frac{\pi}{\alpha\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)} \cdot \pi - \frac{1}{\sqrt{m}} \le \frac{n}{\sqrt{m}} \le \frac{1}{\sqrt{m}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)} \cdot \pi$$

Mais $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\sqrt{m}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\right) \underbrace{=}_{h=\frac{1}{\sqrt{m}}} \lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{\arctan(h)}{h}\right) = \lim\limits_{h\to 0^+}\left(\frac{h - \frac{1}{3h^3} + o(h^5)}{h}\right) = 1^-$

Ainsi $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{m}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)}\right) = 1^+$ et $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = 0^+$

Donc $\lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{n}{\sqrt{m}}\right) = \pi$

Tentons de montrer que si $\boldsymbol{m = 10^{2k}, k \in \mathbb{N}^*}$ alors $\boldsymbol{n = \left[\sqrt{m} \cdot \pi\right]}$.

Par exemple, si $m = 10'000$ alors $n = [100\,\pi] = 314$, si $m = 1'000'000$ alors $n = 3141$, …

Il s'agit de montrer que pour $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \arctan\left(10^{-k}\right)$ on a

$$\pi - \alpha \leq n \cdot \alpha \leq \pi \quad \Longrightarrow \quad n = \left[\sqrt{m} \cdot \pi\right] = [10^k \cdot \pi]$$

ou que

$$\pi - \alpha \leq n \cdot \alpha \leq \pi \quad \Longrightarrow \quad 10^k \cdot \pi - 1 < n < 10^k \cdot \pi$$

avec n est le nombre de chocs et m la masse de la boule lourde.

- $\pi - \alpha \leq n \cdot \alpha \quad \Longrightarrow \quad n \geq \frac{\pi}{\alpha} - 1 = \frac{\pi}{\arctan(10^{-k})} - 1 \underbrace{\geq}_{\arctan(10^{-k}) = 10^{-k} - \frac{1}{3}10^{-3k} + \cdots < 10^{-k}} \frac{\pi}{10^{-k}} - 1 = 10^k \cdot \pi - 1$
- On a $\arctan\left(10^{-k}\right) = 10^{-k} - \frac{1}{3}10^{-3k} + \frac{1}{5}10^{-5k} \mp \cdots > 10^{-k} - \frac{1}{3}10^{-3k} = \frac{3 \cdot 10^{2k} - 1}{3 \cdot 10^{3k}}$

  $$\Longrightarrow \frac{1}{\arctan(10^{-k})} < \frac{3 \cdot 10^{3k}}{3 \cdot 10^{2k} - 1} = 10^k + \frac{10^k}{3 \cdot 10^{2k} - 1}$$

  $$n \cdot \alpha \leq \pi \Longrightarrow n \leq \frac{\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\arctan(10^{-k})} < \left(10^k + \frac{10^k}{3 \cdot 10^{2k} - 1}\right) \cdot \pi = 10^k \cdot \pi + \underbrace{\frac{10^k}{3 \cdot 10^{2k} - 1} \cdot \pi}_{\cong 1{,}05 \cdot 10^{-k}}.$$

  On n'obtient pas l'implication souhaitée $n \cdot \alpha \leq \pi \quad \Longrightarrow \quad n < 10^k \cdot \pi$, mais une implication plus faible :

  $$n \cdot \alpha \leq \pi \quad \Longrightarrow n < 10^k \cdot \pi + 1{,}05 \cdot 10^{-k}$$

Pour que $n = [10^k \cdot \pi]$ il faut donc que $[10^k \cdot \pi + 1{,}05 \cdot 10^{-k}] = [10^k \cdot \pi]$. Par exemple pour $m = 10^4 = 10'000$, $[100 \cdot \pi] = 314$ et $[100 \cdot \pi + 1{,}05 \cdot 10^{-2}] = [314{,}159 + 0{,}0105] = [314{,}160] = 314$ également.

La question se résume à une particularité de π qui me semble difficilement prouvable :
les $2k$ premières décimales de π peuvent-elles se terminer par k fois le chiffre 9 ?

Mathematica, encore, montre par un calcul de quelques heures, que ce n'est pas le cas pour les 200'000 premières décimales de π.

La probabilité que π satisfasse à cette propriété me semble être inférieure à $\frac{1}{9 \cdot 10^{99}}$, donc nulle, ou presque, mais la démonstration reste probabiliste, le problème reste ainsi ouvert…

On peut encore se poser la question si n, le nombre de chocs, est égal à la partie entière de $\sqrt{m} \cdot \pi$ pour toutes les valeurs de $m \in \mathbb{N}^*$ et m assez grand.

Tant le programme de simulation que les calculs Mathematica avec la matrice des doubles-chocs montrent qu'il existe des valeurs de m pour lesquelles $n > [\sqrt{m} \cdot \pi]$, j'en ai dénombré 2125 entre 0 et 1'000'000, mais leur nombre se raréfie lorsque m augmente.

Par exemple, pour $m = 36$, le programme affiche $n = 19$ alors que $\left[\sqrt{36} \cdot \pi\right] = [6 \cdot \pi] = [18{,}85] = 18$. Autre exemple, pour $m = 204'304 = 452^2$, le programme et Mathematica trouvent que le nombre de chocs vaut 1420 alors que la partie entière de $452 \cdot \pi$ vaut 1419 ($452 \cdot \pi = 1419{,}99988$).

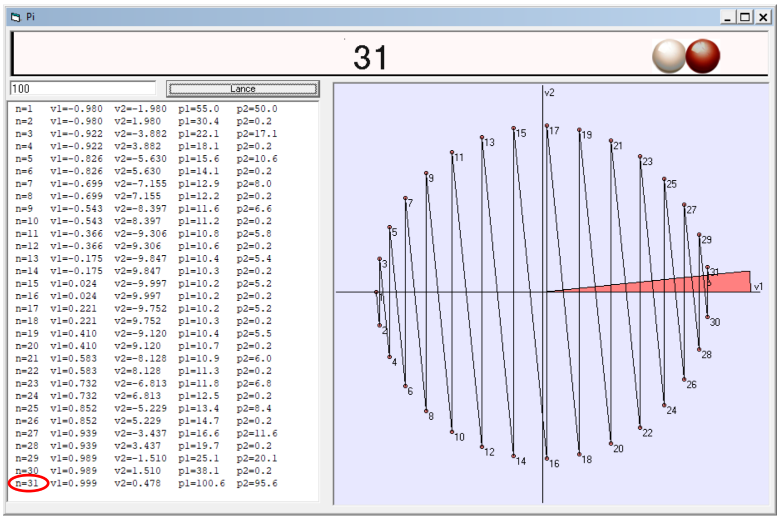
Cette méthode qui consiste à compter le nombre de chocs ne permet pas de déterminer une bonne approximation de π, l'expérience physique n'est pas réalisable pour de grandes valeurs de m et le calcul de n n'est pas rapide. Le résultat est toutefois surprenant, le nombre π apparaissant une fois de plus dans une situation inattendue.

Annexe 1, programme informatique en pseudo-code

```
PROCEDURE Chocs
   p1 := 800 , v1 := -1                         -- positions en pixels et vitesses en
   p2 := 400 , v2 := 0                          --      pixels/dt des deux boules
   dt := 1/32 , n := 0 , r := 20                -- unité de temps, nb chocs, rayon boules
   LIRE(m)                                      -- masse de la boule 2
   DANS FENETRE_GRAPHIQUE_2                     -- dessine le secteur rouge
      CERCLE((250,250),250,0,-ATN(1/RACINE(m)),ROUGE)
   REPETER
      BOULES(p1,p2,r)                           -- dessine les boules dans une fenêtre
      SI p2 <= r ET v2 < 0 ALORS                -- choc contre le mur
         v2 := -v2                              -- v2 change de signe
         n := n + 1                             -- un choc de plus
         ECRIRE(n,v1,v2,p1,p2)
         ESPACE_PHASE(v1,v2,n,m)                -- dessine dans l'espace de phase
      SI p1 - p2 < 2*r ALORS                    -- choc entre les deux boules
         nv1 := ((m-1)*v1 + 2*v2)/(m + 1)       -- modification des vitesses des
         v2 := (2*m*v1 - (m - 1) *v2)/(m + 1)   --      deux boules
         v1 := nv1
         n := n + 1
         ECRIRE(n,v1,v2,p1,p2)
         ESPACE_PHASE(v1,v2,n,m)
      p1 := p1 + v1 * dt , p2 := p2 + v2 * dt   -- mise à jour de la position des boules
   JUSQU'À CE QUE v2 > 0 ET v2 <= v1
FIN Chocs

PROCEDURE BOULES(p1,p2,r)
   DANS FENETRE_GRAPHIQUE_1
      EFFACE
      DISQUE(p1,r,r,rouge)
      DISQUE(p2,r,r,bleu)
FIN BOULES

PROCEDURE ESPACE_PHASE(v1,v2,n,m)
   d1 := 200 , d2 := 200 / RACINE(m)
   DANS FENETRE_GRAPHIQUE_2
      SI n = 1
         PLACE(250+d1*v1,250-d2*v2)
      SINON
         TIRE(250+d1*v1,250-d2*v2)
      DISQUE(250+d1*v1,250-d2*v2,3)
      ECRIRE(n)
FIN ESPACE_PHASE
```



On constate sur cette copie d'écran que, pour $m = 100$, le nombre de chocs simulés est égal à 31. Sans le graphisme, le programme effectue le calcul pour $m = 10^{14}$ ($n = 31415926$) en moins d'une minute.

Annexe 2, résolution du système

$$\begin{cases} mv_1 + v_2 = mv_1' + v_2' & \text{①} \\ mv_1^2 + v_2^2 = mv_1'^2 + v_2'^2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(v_1 - v_1') = v_2' - v_2 & \text{①} \\ m\left(v_1^2 - v_1'^2\right) = v_2'^2 - v_2^2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(v_1 - v_1') = v_2' - v_2 & \text{①} \\ m(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = (v_2' - v_2)(v_2' + v_2) & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(v_1 - v_1') = v_2' - v_2 & \text{①} \\ v_1 + v_1' = v_2' + v_2 & \text{③} = \text{②} : \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m-1)v_1 - (m+1)v_1' = -2v_2 \ \Rightarrow v_1' = \frac{m-1}{m+1}v_1 + \frac{2}{m+1}v_2 & \text{①} - \text{③} \\ 2mv_1 = (m+1)v_2' + (m-1)v_2 \ \Rightarrow v_2' = \frac{2m}{m+1}v_1 - \frac{m-1}{m+1}v_2 & \text{①} + m\cdot\text{③} \end{cases}$$