Die Trinacci-Folge

Hans Ulrich Keller, hukkeller@bluewin.ch

1. Die Aufgabe

Der Name 'Trinacci-Folge' ist manchen Mathematikern bekannt, und zwar für die Folge 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, … , mit der folgenden rekursiven Definition der n–ten Trinacci-Zahl $T(n)$:

$$T(0)=0, T(1)=1, T(2)=1,$$
$$T(n)=T(n-1)+T(n-2)+T(n-3).$$

Wie bei der Fibonacci-Folge ist es auch hier möglich, diese Folge auf **negative** Werte von n auszudehnen:

$$\begin{pmatrix} n: & \dots & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ T(n): & \dots & -3 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 13 & 24 & \dots \end{pmatrix}$$

Es stellt sich die Frage, ob auch eine **explizite** Definition der Trinacci-Folge $T(n)$ existiert, also eine Trinacci-Formel, analog zur Binet-Formel $\boxed{F(n)=\dfrac{\varphi^n-(-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}}}$ für die Folge der Fibonacci-Zahlen 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, … . Eine solche Formel wird hier hergeleitet.

2. Vergleich mit der Binet-Formel

Für die Herleitung der Trinacci-Formel hilft ein Blick auf die Herleitung der Binet-Formel für die n–te Fibonacci-Zahl $F(n)$, die rekursiv wie folgt definiert ist:

$$F(0)=0, F(1)=1,$$
$$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$$

Der wichtigste Schritt zur Lösung dieser Aufgabe ist der Ansatz mit einer Exponentialfunktion, der sich als sehr erfolgreich erweisen wird: $F(n):=a^n$. Dann muss gemäss der Rekursionsbedingung gelten, dass $a^{n+2}=a^{n+1}+a^n$, oder nach Division durch a^n, dass $a^2=a+1$ ist.

Diese sog. 'charakteristische Gleichung' hat die beiden Lösungen $a_0=\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$, was gleich dem Verhältniswert des 'Goldenen Schnitts' ist und auch als 'Fibonacci – Konstante' bezeichnet wird, und $a_1=-\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.618$. Somit erfüllen sowohl $a_0^0, a_0^1, a_0^2, \dots$ als auch $a_1^0, a_1^1, a_1^2, \dots$ das rekursive Bildungsgesetz der Fibonacci-Zahlen, und damit hat auch jede Linearkombination wie die Folge $\dfrac{a_0^0}{u}+\dfrac{a_1^0}{v},\ \dfrac{a_0^1}{u}+\dfrac{a_1^1}{v},\ \dfrac{a_0^2}{u}+\dfrac{a_1^2}{v}, \dots$, mit $u,v\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, die Eigenschaft, dass jedes Folgeglied die Summe ihrer beiden Vorgänger ist! Die Fibonacci-Formel muss darum gleich dem Term $F(n)=\dfrac{a_0^n}{u}+\dfrac{a_1^n}{v}$ sein. Das Einsetzen der Anfangsbedingungen $F(0)=0$ und $F(1)=1$ führt sofort auf $u=\sqrt{5}$ und $v=-\sqrt{5}$, und damit genau zur oben bereits angegebenen Binet-Formel.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F(n+1)}{F(n)}$ gleich der Fibonacci–Konstanten φ ist, und dass die Fibonacci–Zahlen auch mit der folgenden erzeugenden Funktion gefunden werden können:

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}F(n)\cdot x^n \text{ (mit } |x|< \ r_K=1/\varphi\text{)}.$$

3. Erweiterung auf die Trinacci-Folge

Machen wir den gleichen Ansatz für die Trinacci-Folge: $T(n):=a^n$. Dann muss – wegen der Rekursionsbedingung für $T(n)$ – gelten: $a^{n+3}=a^{n+2}+a^{n+1}+a^n$, oder nach Division durch a^n, dass $a^3=a^2+a+1$ ist.

Diese charakteristische Gleichung hier ist kubisch und hat eine einzige reelle Lösung $a_0\approx 1.83929$, die auch als 'Trinacci – Konstante' bezeichnet wird. Die andern beiden Lösungen sind $a_1\approx -0.419643+0.606291i$ und $a_2\approx -0.419643-0.606291i$, die zueinander konjugiert komplex sind. Somit erfüllen sowohl $a_0^0, a_0^1, a_0^2, \ldots$ als auch $a_1^0, a_1^1, a_1^2, \ldots$ und $a_2^0, a_2^1, a_2^2, \ldots$ das rekursive Bildungsgesetz der Trinacci-Zahlen. Damit hat auch die Folge $\frac{a_0^0}{u}+\frac{a_1^0}{v}+\frac{a_2^0}{w},\ \frac{a_0^1}{u}+\frac{a_1^1}{v}+\frac{a_2^1}{w},\ \frac{a_0^2}{u}+\frac{a_1^2}{v}+\frac{a_2^2}{w},\ \ldots$ die Eigenschaft, dass jedes Folgeglied die Summe seiner drei Vorgänger ist. Für die Trinacci-Formel ergibt sich darum einmal der Term $T(n)=\frac{a_0^n}{u}+\frac{a_1^n}{v}+\frac{a_2^n}{w}$.

Aus den Anfangsbedingungen $T(0)=0$, $T(1)=1$ und $T(2)=1$ ergeben sich die Konstanten u, v und w:

$$\begin{aligned}
u&=-a_0^2+4a_0-1\approx 2.97417\\
v&=-a_1^2+4a_1-1\approx -2.48709-2.93401\,i\\
w&=-a_2^2+4a_1-1\approx -2.48709+2.93401\,i
\end{aligned}$$

…und daraus die exakte Trinacci–Formel:

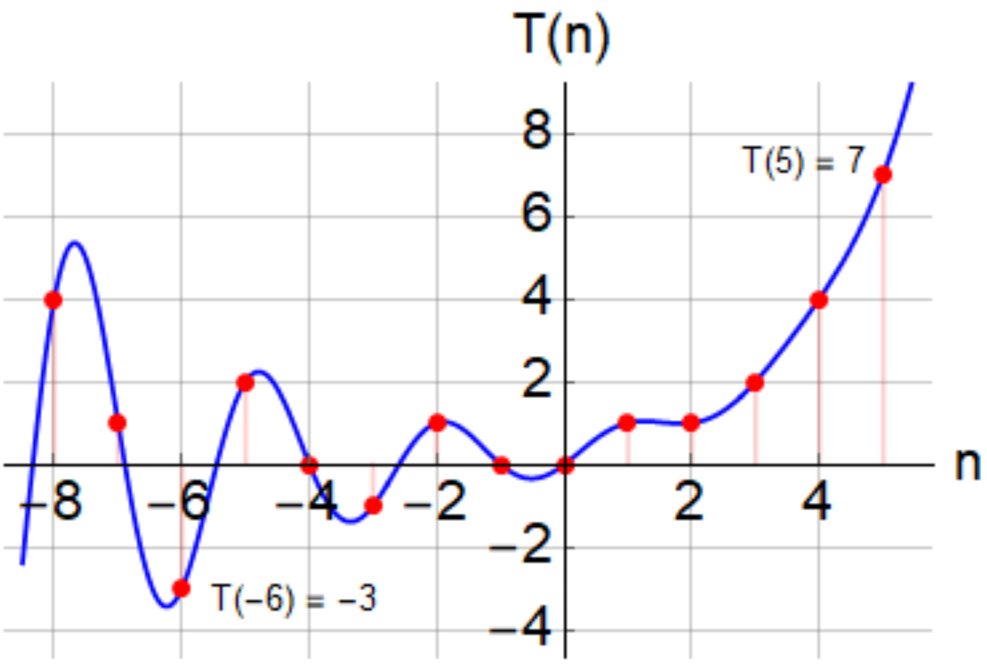
$$\boxed{T(n)=\frac{a_0^n}{-a_0^2+4a_0-1}+\frac{a_1^n}{-a_1^2+4a_1-1}+\frac{a_2^n}{-a_2^2+4a_2-1}},$$

mit den drei exakten respektive genäherten Lösungen der charakteristischen Gleichung $a^3=a^2+a+1$:

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{3}\left(1+\left(19-3\sqrt{33}\right)^{1/3}+\left(19+3\sqrt{33}\right)^{1/3}\right)\approx 1.83929\\
a_1&=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19-3\sqrt{33}\right)^{1/3}-\frac{1}{6}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19+3\sqrt{33}\right)^{1/3}\approx -0.419643+0.606291\,i\\
a_2&=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19-3\sqrt{33}\right)^{1/3}-\frac{1}{6}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(19+3\sqrt{33}\right)^{1/3}\approx -0.419643-0.606291\,i
\end{aligned}$$

Der erste Summand in der obigen Trinacci-Formel ist reell. Der zweite Summand ist für jedes n gleich dem konjugiert komplexen des dritten Summanden. Das gilt auch für gebrochene reelle Werte von n, wenn für Potenzen mit einer komplexen Zahl z als Basis und einem reellen Exponenten n hier, und für alles Weitere, die Konvention $z^n = \left(r \cdot e^{i\cdot\varphi}\right)^n := r^n \cdot e^{i\cdot\varphi\cdot n}$ (mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in \mathbb{R}$) verwendet wird. Dann ergibt diese Formel für jede reelle Zahl n einen **reellen** Funktionswert; sie ist somit die Funktionsgleichung einer reellwertigen Funktion reeller Zahlen n.

Unten ist der Graph dieser Funktion $T(n)$ wiedergegeben, mit welchem grob überprüft werden kann, dass z. B. $T(-4.4) \approx 1.52084$ ist:



Ähnlich wie bei den Fibonacci-Zahlen ist der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{T(n+1)}{T(n)}$ gleich der Trinacci – Konstanten $a_0 \approx 1.83929$. Weiter können auch die Trinacci-Zahlen mit Hilfe einer erzeugenden Funktion gefunden werden:

$$\frac{x}{1-x-x^2-x^3} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} T(n)\cdot x^n \quad (\text{mit } |x| < \ r_K = 1/a_0).$$

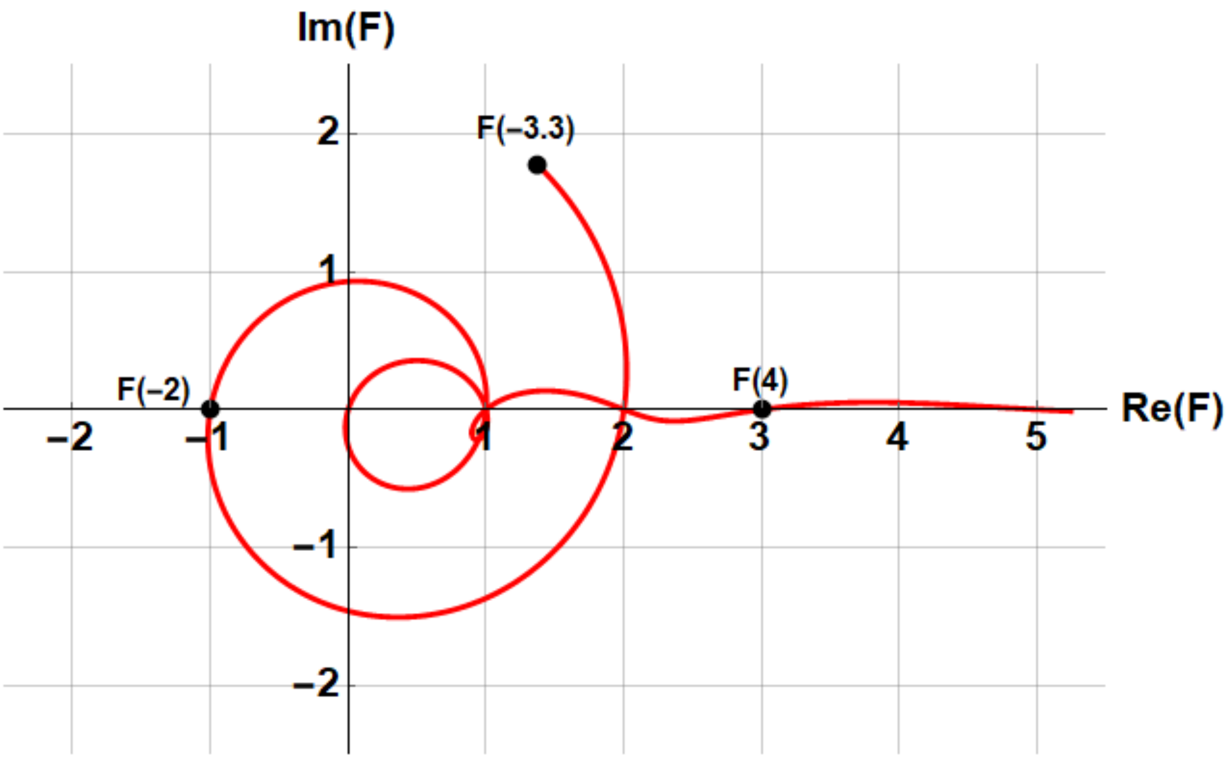
Mit anderen Anfangswerten ergeben sich andere, verwandte Folgen $T'(n)$, die die Rekursionsbedingung $T'(n) = T'(n-1) + T'(n-2) + T'(n-3)$ ebenfalls erfüllen. Die jeweils dazugehörigen Funktionsgleichungen für $T'(n)$ ändern sich dabei natürlich auch, aber sie liefern dennoch nur reelle Werte für gebrochene Exponenten n.

4. Das geheime Leben der Fibonacci-Zahlen

Es erstaunt, dass die oben gefundene Trinacci-Formel für $T(n)$ für **gebrochene** reelle Werte von n nur **reelle** Werte ergibt, weil dies bei der Binet-Formel ganz anders ist: Diese liefert für **gebrochene** reelle Werte von n **nichtreelle** Werte für $F(n)$!

So sind gemäss der Binet-Formel die 'gebrochenen Fibonacci-Zahlen' $F(4.5) \approx 3.899 + 0.05129i$, und $F(-3.3) \approx 1.3778 + 1.7706i$.

In der untenstehenden Figur ist der erstaunliche Graph der Relation $\{Re(F(n)), Im(F(n))\}$ für $-3.3 \le n \le 5.1$ wiedergegeben. Mit zunehmenden positiven Werten $n > 2$ schlängelt sich diese Kurve immer enger an den positiven Teil der reellen Achse heran; für abnehmende Werte von $n < 0$ spiralt sie sich mit immer grösser werdendem Radius irgendwie um den Ursprung! Sofort ersichtlich ist aus der Graphik, dass die Gleichung $F(n) = 1$ genau drei und $F(n) = 2$ genau zwei verschiedene Lösungen hat:



Für Lukas–Folgen, wie z. B. für $L(n) := F(n-1) + F(n+1)$, ergeben sich übrigens ganz ähnliche Darstellungen.

5. Die Tetranacci-Folge

In gleicher Weise wie für die Fibonacci-Zahl $F(n)$ und die Trinacci-Zahl $T(n)$ lässt sich auch eine explizite Definition für die n–te Tetranacci-Zahl $Q(n)$ ('Q' wie 'Quattro' …!) finden. Die rekursive Definition der zugehörigen Folge lautet:

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(2) = 1, \quad Q(3) = 2,$$
$$Q(n) = Q(n-1) + Q(n-2) + Q(n-3) + Q(n-4)$$

Mit den oben gegebenen Anfangsbedingungen ergibt sich die folgende Wertetabelle, die bereits schon auch auf negative n erweitert worden ist:

$$\begin{pmatrix} n: & \ldots & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ Q(n): & \ldots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 & 8 & 15 & 29 & 56 & \ldots \end{pmatrix}$$

Aus dem Ansatz $Q(n) := a^n$ folgt hier, analog zum Vorgehen bei der Trinacci–Folge, der Term $Q(n) = u_0 \cdot a_0^n + u_1 \cdot a_1^n + u_2 \cdot a_2^n + u_3 \cdot a_3^n$ für die Tetranacci-Formel, wobei a_o, a_1, a_2, a_3 die vier Lösungen der charakteristischen Gleichung $a^4 = a^3 + a^2 + a + 1$ sind. Diese Gleichung ist zwar exakt lösbar, aber ihre Lösungen sind alle sehr unübersichtliche Wurzelungetüme! Hier ist zur Illustration eine der vier Lösungen exakt wiedergegeben:

$$a == \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{\frac{3}{11-56\left(\frac{2}{-65+3\sqrt{1689}}\right)^{1/3}+2\times 2^{2/3}\left(-65+3\sqrt{1689}\right)^{1/3}}}} -$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{11}{6}+\frac{14}{3}\left(\frac{2}{-65+3\sqrt{1689}}\right)^{1/3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(-65+3\sqrt{1689}\right)\right)^{1/3}-\right.}$$

$$\left.\frac{13}{2}\sqrt{\frac{3}{11-56\left(\frac{2}{-65+3\sqrt{1689}}\right)^{1/3}+2\times 2^{2/3}\left(-65+3\sqrt{1689}\right)^{1/3}}}\right)$$

Der Einfachheit halber ist es darum hier sinnvoll, mit gerundeten Zahlen weiter zu rechnen. Die vier Konstanten u_0, u_1, u_2, u_3 ergeben sich wiederum aus den oben vorgegebenen Anfangsbedingungen.

So ergibt sich die folgende (angenäherte) explizite Definition der n–ten Tetranacci-Zahl $Q(n)$:

$$\boxed{\begin{aligned} &Q(n) \approx 0.293813 \cdot 1.92756^n - 0.1929123 \cdot (-0.774804)^n \\ &-(0.0504502 - 0.169682\mathrm{i}) \cdot (-0.0763789 - 0.814704\mathrm{i})^n \\ &-(0.0504502 + 0.169682\mathrm{i}) \cdot (-0.0763789 + 0.814704\mathrm{i})^n \end{aligned}}$$

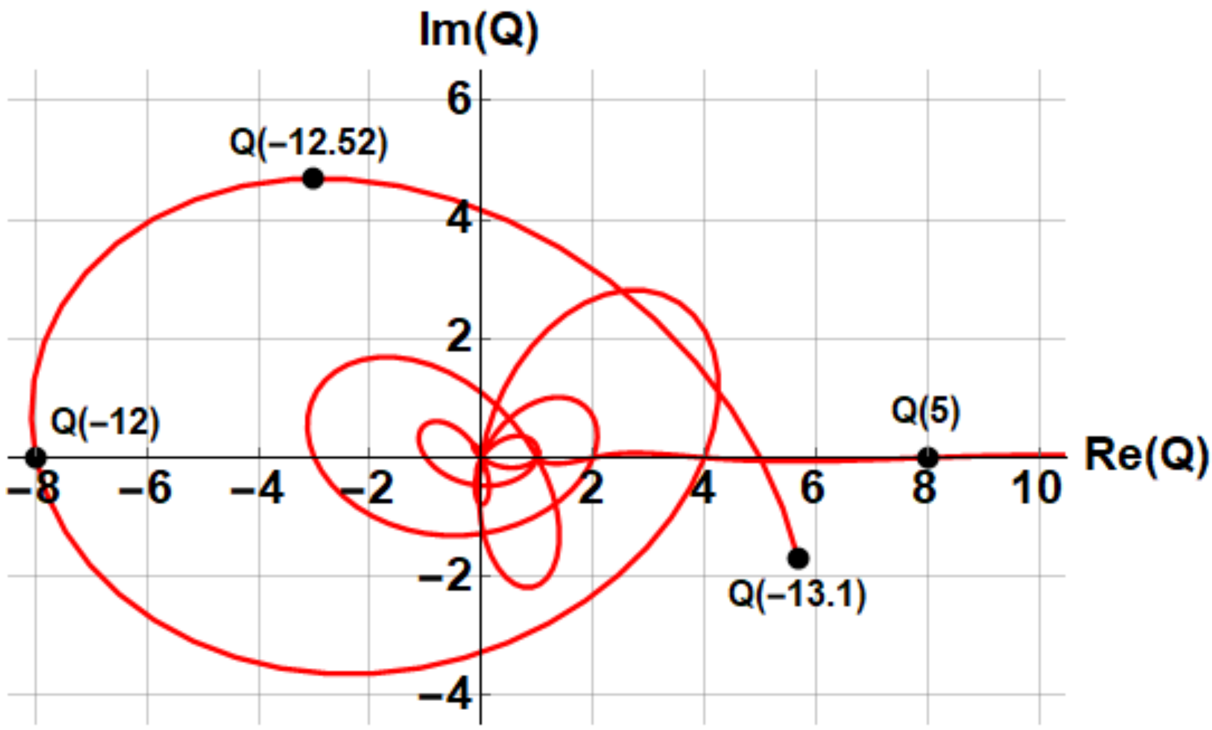
Nicht ganz unerwartet strebt auch hier der Quotient $\frac{Q(n+1)}{Q(n)}$ gegen die 'Tetranacci – Konstante':

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q(n+1)}{Q(n)} = a_0 \approx 1.92756\,.$$

Die Tetranacci-Zahlen $Q(n)$ können ebenfalls mit Hilfe einer erzeugenden Funktion gefunden werden:

$$\frac{x}{1-x-x^2-x^3-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} Q(n) \cdot x^n \text{ (mit } |x| < \; r_K = 1/a_0 \approx 1/1.92756\text{).}$$

Für gebrochene reelle Werte von n nehmen die Tetranacci-Zahlen $Q(n)$, gleich wie die Fibonacci-Zahlen, nichtreelle Werte an, im Gegensatz zu entsprechenden Werten der Trinacci-Zahlen. In der unten wiedergegebenen, erneut recht interessanten Graphik ist die Relation $\{Re(Q(n)), Im(Q(n))\}$ für $-13.1 \le n \le 5.5$ dargestellt. So ist beispielsweise $Q(-13.1) \approx 5.67811 - 1.68628\,i$, $Q(-12.52) \approx -3.025 + 4.697\,i$, $Q(-12) = -8$ und $Q(5) = 8$:



6. Ausblick

Mit diesem Verfahren können auch explizite Definitionen für Folgen gefunden werden, die für eine rekursive Definition des n – ten Folgegliedes auf mehr als vier – oder andere – frühere Folgeglieder zurückgreifen. Für eine 'Pentanacci-Folge', also für eine Folge, bei der jedes Folgeglied die Summe der letzten fünf vorhergehenden Glieder ist, müsste zunächst die charakteristische Gleichung $a^5 = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ gelöst werden. Das ist eine 'gefürchtete Quintic', für die es nach Galois im Allgemeinen nicht notwendigerweise eine Lösung mit Radikalen gibt! Die verschiedenen Lösungen dieser oder noch komplizierterer Gleichungen können aber alle im Prinzip **numerisch** mit beliebiger Genauigkeit gefunden werden. Damit ist der Weg frei, um auch bei solchen oder noch exotischeren Folgen **explizite** Definitionen mit beliebig genauen Näherungen zu finden.

P. S.:

Alle oben genannten Folgen, und auch die Folge $\{\ldots,0,1,1,2,4,8,16,31,61,120,236,464,912,1793,3525,6930,\ldots\}$, finden sich in der **oeis** (= ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES), www.oeis.org:

Fibonacci: A000045, Trinacci: A000073, Tetranacci: A000078 und Pentanacci: A001591.