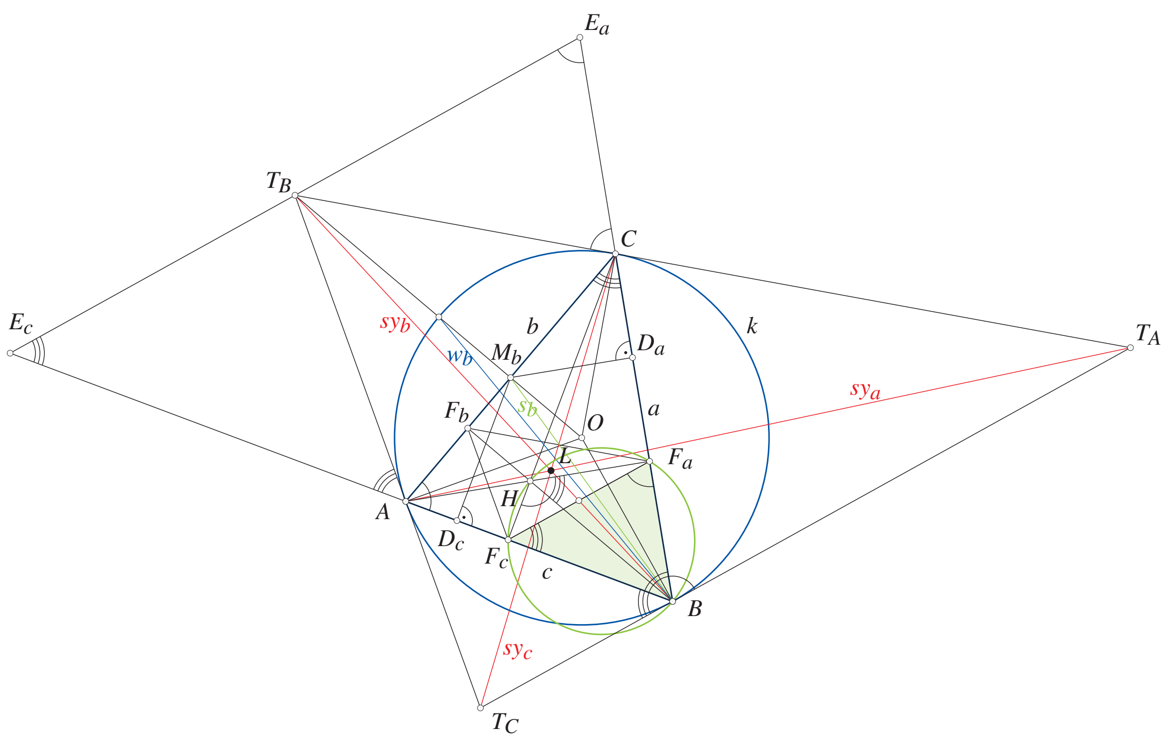
Verkannte Symmedianen, Lemoine-Punkt, Gergonne-Punkt und ein Muster von vielen ähnlichen Dreiecken

Peter Gallin, peter@gallin.ch

1 Einführung und Grundlagen

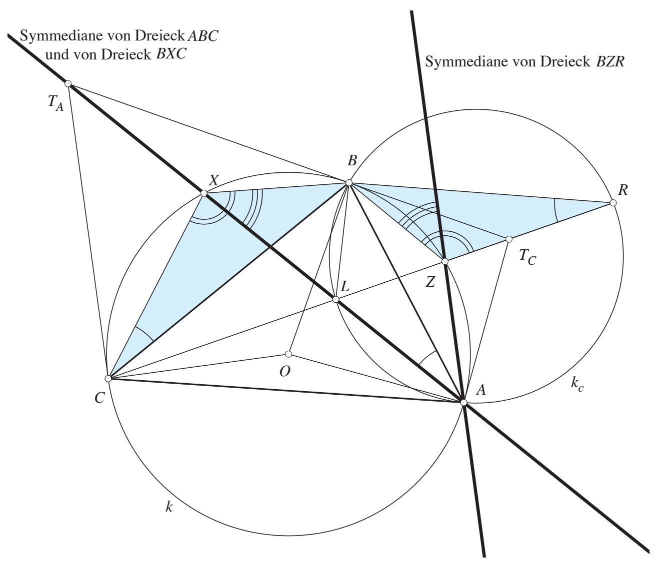
Man mag über die sozialen Medien — wie etwa Twitter — denken, was man will, in meinem Fall als pensioniertem Mathematiklehrer bietet gerade diese Plattform die Möglichkeit, sich mit anderen Mathematikbegeisterten zu vernetzen und so laufend neue kleine Probleme in Form von knappen Bildchen und kurzen Texten zu erhalten, auf die man dann durch eigene Lösungen reagieren kann. So bin ich vor Kurzem dank @Math26039335 auf zwei Probleme gestossen, die Symmediane und Lemoine-Punkt thematisierten. Die zugehörigen Links gebe ich später an.

Erinnern wir uns an ein paar Grundtatsachen zu den Symmedianen in einem $\triangle ABC$. Man erhält z. B. die Symmediane sy_b durch Spiegeln der Seitenhalbierenden s_b an der Winkelhalbierenden w_b des $\triangle ABC$. Da ein Punkt der Seitenhalbierenden — wie etwa der Mittelpunkt M_b auf b — wegen der Gleichheit des Flächeninhalts von $\triangle M_bCB$ und $\triangle M_bAC$ das Abstandsverhältnis $|M_bD_a| : |M_bD_c| = c : a$ hat, verhält sich der Abstand eines Punktes der Symmedianen sy_b zu a zum Abstand zu c wie $a : c$. Im VSMP-Bulletin Nr. 87 vom September 2001 (Seite 24) habe ich im kleinen Beitrag «Die Symmediane», nachgewiesen, dass die Symmediane sy_b die Gegenseite b im Verhältnis $a^2 : c^2$ teilt während ja die Winkelhalbierende w_b sie im Verhältnis $a : c$ teilt. Daraus ergibt sich mit dem Satz von Ceva direkt, dass sich die drei Symmedianen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, dem Lemoine-Punkt L.



Die eleganteste Konstruktion der Symmedianen geht nun allerdings nicht über das Spiegeln an den Winkelhalbierenden, sondern über das $\triangle T_A T_B T_C$, das aus den Tangenten an den Umkreis k des $\triangle^s ABC$ gebildet wird: $BT_B = sy_b$ usw. Um dies einzusehen, betrachten wir zuerst das Höhenfusspunktdreieck $F_aF_bF_c$ des $\triangle^s ABC$. Das (grüne) Teildreieck F_aF_cB besitzt einen Umkreis, der durch den Höhenschnittpunkt H geht, so dass mit dem Peripheriewinkelsatz sofort ersichtlich ist, dass es die gleichen Winkel wie das $\triangle ABC$ besitzt. Es ist also ähnlich zu ihm, allerdings ungleichsinnig ähnlich. (Das gilt für auch für $\triangle F_cF_bA$ und $\triangle F_bF_aC$.) Eine Spiegelung an w_b bringt es in perspektiv-ähnliche Lage zum $\triangle ABC$. Das bedeutet, dass seine Seitenhalbierende auf der Symmedianen sy_b liegen muss, denn nach dem Spiegeln fällt seine Seitenhalbierende auf die Seitenhalbierende s_b von $\triangle ABC$. Man kann also nur die Mittelpunkte der Seiten des Höhenfusspunktdreiecks bestimmen, um die Symmedianen zu konstruieren. Da nun aber mit dem Sehnen-Tangenten-Satz die Seiten des Höhenfusspunktdreiecks parallel zu den Seiten des Tangentendreiecks liegen, verschieben wir z. B. die Tangente T_CT_A parallel durch T_B und erhalten die Punkte E_a und E_c auf den verlängerten Seiten a und c des $\triangle^s ABC$. Dadurch entstehen — wieder nach dem Sehnen-Tangenten-Satz — zwei gleichschenklige Dreiecke T_BE_aC und T_BE_cA. Daraus ergibt sich $|T_BE_a| = |T_BC| = |T_BA| = |T_BE_c|$. T_B ist also Mittelpunkt der zu F_aF_c parallelen Strecke E_aE_c, womit gezeigt ist, dass T_B auf sy_b liegen muss. Damit ist gleichzeitig gezeigt, dass der Lemoine-Punkt von $\triangle ABC$ auch Gergonne-Punkt des aus den Tangenten an k in A, B und C gebildeten $\triangle^s T_AT_BT_C$ ist.

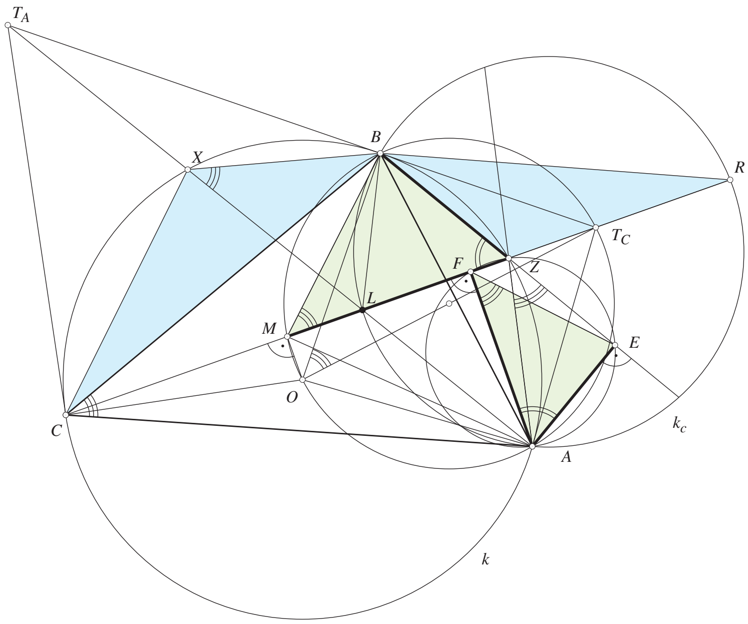
2 Eine erste Drehstreckung



Die Hauptrolle der folgenden Untersuchungen spielen die Umkreise von $\triangle ABL$, $\triangle BCL$ und $\triangle CAL$. Beginnen wir mit k_c, dem Umkreis von $\triangle ABL$. L haben wir natürlich über die Symmedianen sy_a resp. sy_c als Geraden AT_A resp. CT_C konstruiert. Sie schneiden k in X resp. Z. Erstaunlicherweise sind die Dreiecke BXC und BZR ähnlich zueinander, denn wegen des Peripheriewinkelsatzes sind die Winkel mit einem oder zwei Bogen jeweils gleich gross. Ausserdem stellen wir fest, dass die Gerade $sy_a = AT_A$ nicht nur Symmediane von $\triangle ABC$ ist, sondern auch Symmediane von $\triangle BXC$, denn k ist auch Umkreis dieses Dreiecks und die Tangenten in B und C sind für die Bestimmung der Symmedianen massgebend. Also ist XT_A Symmediane von $\triangle BXC$. Da nun auch die Winkel mit drei Bogen gleich sind, muss auch AZ Symmediane von $\triangle BZR$ sein. Insgesamt liegt also eine Drehstreckung mit Zentrum B, Drehwinkel $\angle XBZ$ und Faktor $|BZ| : |BX|$ vor, welche das $\triangle BXC$ in das $\triangle BZR$ mitsamt der Symmediane abbildet.

3 Ein interessantes Nebenergebnis

In der folgenden Abbildung sind nun neben den ähnlichen Dreiecken BXC und BZR mehr Details eingetragen. Zuerst geht es um den Nachweis, dass die beiden grünen Dreiecke ähnlich sind. Wir fällen von A aus die Lote AE resp. AF zu den Seitengeraden BZ resp. RZ. Dadurch werden automatisch die mit zwei Bögen markierten Winkel bei A und bei Z gleich. Dann konstruieren wir den Umkreis von $\triangle AEF$, der auch durch Z geht, da das Viereck $AEZF$ ein Sehnenviereck ist. Damit gilt:



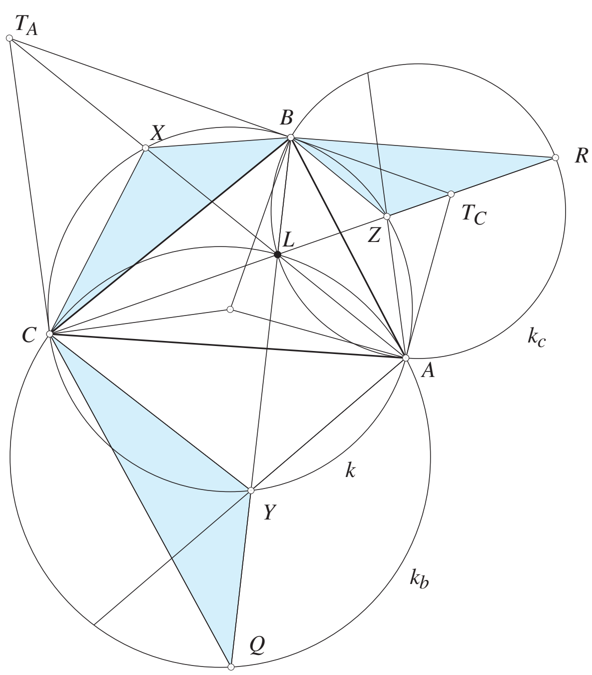
$\angle AFE = \angle AZE = \angle AXB = \angle ACB$. Nun konstruieren wir den Thaleskreis über der Strecke OT_C ein, der durch A und B geht, weil ja die Radien OA und OB senkrecht zu den Tangenten an k in A und B stehen. Der Thaleskreis liefert uns den Mittelpunkt M der Strecke CZ. Damit finden wir weitere Winkel mit drei Bogen: Der halbe Zentriwinkel $\angle T_COB$ ist gleich gross wie der Peripheriewinkel $\angle ACB$ und auch gleich dem $\angle T_CMB$. Somit folgt $\angle AFE = \angle ZMB$, womit die Ähnlichkeit nachgewiesen ist. Es gilt also $|AE| : |AF| = |ZB| : |ZM|$. Nun erinnern wir uns an die Tatsache, dass AZ Symmediane des $\triangle^s BZR$ ist. Damit hat jeder Punkte dieser Geraden zu den Seiten ZB und ZR ein Abstandsverhältnis, das genau dem Verhältnis dieser Seitenlängen entspricht. Es gilt also $|AE| : |AF| = |ZB| : |ZR|$. Damit ist nachgewiesen, dass $|ZM| = |ZR|$ oder $|ZR| = \frac{1}{2}|CZ|$, das ein eindrücklich einfaches Nebenergebnis ist, das als Problem in Twitter gestellt wurde: https://twitter.com/Math26039335/status/1365402736515309585/photo/1.

4 Eine weitere Ähnlichkeit

Ergänzen wir unsere Figur mit dem zweiten Umkreis k_b von $\triangle CAL$, auf dem der Punkt Q der Symmedianen BL von $\triangle ABC$ liegt. Der Punkt Y ist analog zu vorher der Schnittpunkt von k mit der Symmedianen BL. AY ist dann wiederum Symmediane von $\triangle QYC$, welches wiederum ähnlich ist zu $\triangle BXC$. Damit haben wir aber eine direkte Drehstreckung mit Zentrum A, Drehwinkel $\angle ZAY$ und Faktor $|YA| : |ZA|$, welche das $\triangle BZR$ ins $\triangle QYC$ überführt. Würde man in diesen beiden Dreiecken auf AZ resp. AY je den Lemoine-Punkt L_C resp. L_B eintragen, so vergrösserte sich deren Abstand zu Z resp. Y mit dem Faktor der Drehstreckung, so dass deren Verbindungsgerade nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes parallel zu ZY läge, was wieder ein nettes Nebenergebnis ist, das ebenfalls als Problem in Twitter gestellt wurde:

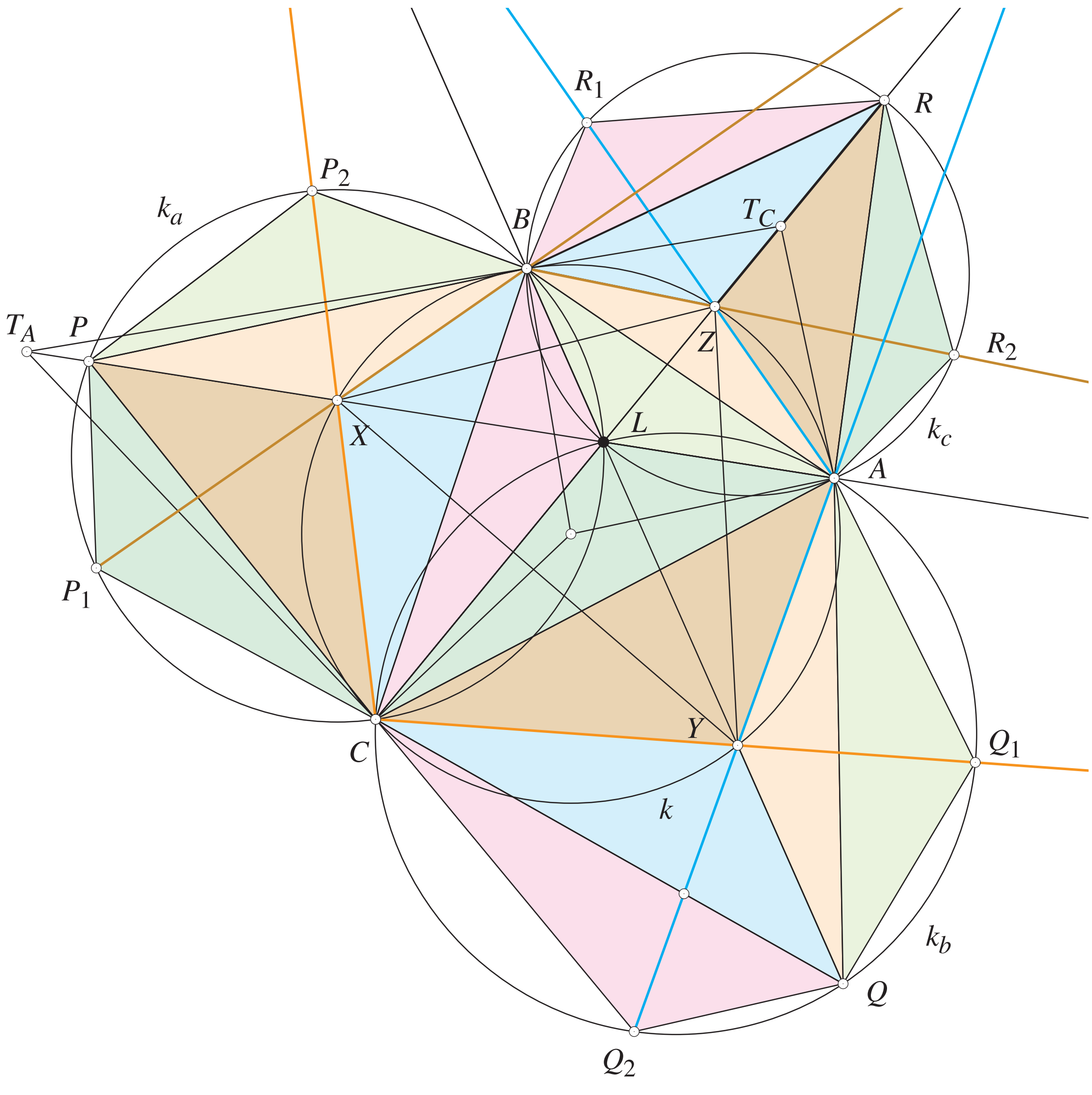
https://twitter.com/Math26039335/status/1367241539953557511/photo/1

Ausserdem halten wir fest, dass bei dieser Drehstreckung auch k_c in k_b abgebildet wird.



5 Ein Muster mit vielen ähnlichen Dreiecken

Das Spiel mit ähnlichen Dreiecken und Drehstreckungen kann nun auf die Spitze getrieben werden. Was wir mit dem $\triangle BXC$ (blau) gemacht haben, kann man auch mit $\triangle CYA$ (braun) oder $\triangle AZB$ (orange) tun. So erhält man je zwei weitere ähnliche Dreiecke mit den entsprechenden Farben. Aber die drei Drehstreckungen mit den Zentrem A, B oder C bewirken, dass auch die bisher nicht betrachteten, äusseren Dreiecke mit den Ecken P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1 und R_2 — also die ganzen Sechsecke mit den Umkreisen k_a, k_b oder k_c — mitabgebildet werden und so automatisch ähnlich zu den inneren Teildreiecken von $\triangle ABC$ mit Ecke L sind. Mit jeder Drehstreckung und ihrer Inversen, werden diese sechs Punkte auf L abgebildet. Insgesamt treten zu den blauen, braunen und orangen Dreiecken ausserhalb k je zwei zugehörige Symmedianen in gleichen Farben auf. Das blaue, braune und orangen Dreieck innerhalb k haben schwarze Symmedianen.



Zum Abschluss sei noch darauf hingewiesen, dass sich je zwei verschiedenfarbige Symmedianen mit einer dazwischen liegenden schwarzen Symmedianen in je einem Punkt treffen. Diese drei Punkte liegen auf einer Geraden (ausserhalb der hier gezeigten Figur), der Pascalgeraden der sechs Punkte A, Z, B, X, C und Y von k. Die Pascalgerade ist gleichzeitig Polare bezüglich k zum Pol L.