

Die Kaustik in der Kaffeetasse

Hans Ulrich Keller, ehem. MNG Zürich; hukkeller@bluewin.ch

Als Kaustik oder Brennlinie bezeichnet man in der Optik einen Bereich, in welchem Lichtstrahlen Tangenten an einen Bogen sind. Eine solche Kaustik ist beispielsweise auf dem Boden einer zylindrischen Kaffeetasse mit reflektierender Innenseite zu sehen, die von parallelem Licht schräg von oben rechts angestrahlt wird.



Fig. 1: Kaustik in der Kaffeetasse.

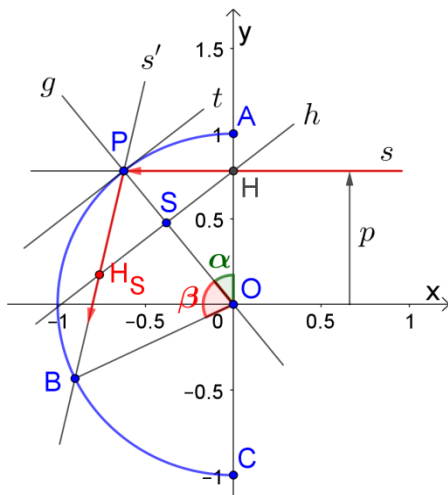


Fig. 2: Bezeichnungen beim Halbkreis.

Der Reflexionspunkt P hat die Koordinaten $(-\sqrt{1-p^2}, p)$. Die Tangente t im Punkt P hat die Steigung $\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}$, und die dazu senkrechte Gerade g hat die Gleichung $y = \frac{-p}{\sqrt{1-p^2}} \cdot x$. Die Parallele h zur Tangenten t durch den Punkt $H(0, p)$ hat die Gleichung $y = \frac{\sqrt{1-p^2}}{p} \cdot x + p$. Sie schneidet die Gerade g im Punkt $S(-p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, p^3)$. Wird der Punkt H an g gespiegelt, ergibt sich der Punkt

$H_S(-2p^2 \cdot \sqrt{1-p^2}, -p + 2p^3)$. Die gespiegelte Gerade s' hat damit die allgemeine Gleichung

$$y(p, x) := \frac{2p \cdot \sqrt{1-p^2}}{2p^2-1} \cdot x + \frac{p}{2p^2-1} \quad \text{Gl. 1}$$

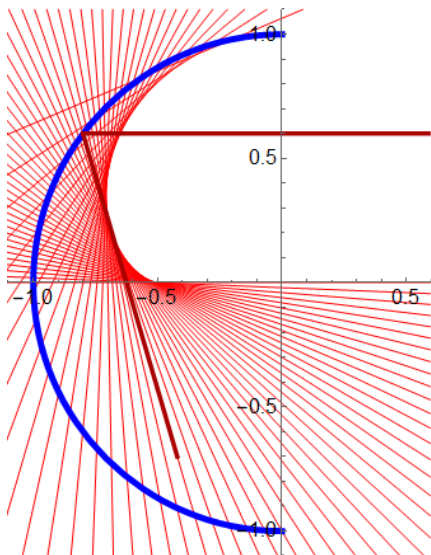


Fig. 3: Simulation der Kaustik in der Kaffeetasse.

In Fig. 3 wurden alle reflektierten Strahlen s' für $p \in \{0.02, 0.04, 0.06, \dots, 0.98\}$ eingezeichnet, zusammen mit dem speziellen einfallenden Strahl für $p = 0.6$ und seinem gespiegelten Strahl. Die Strahlen für Werte von p zwischen -1 und 0 wurden hier der Klarheit halber weggelassen.

Die sich so ergebende Kaustik-Kurve, aber auch die oben erwähnte Verdoppelung des Winkels POA zum Winkel BOP für jeden Wert von p , erinnert an die bekannte und z. B. vom 'Mathologer' sehr schön beschriebene graphische Multiplikationstabelle ⁽¹⁾, die zu einer Kardioide als Kaustikkurve führt.

Entspricht die Kaustik in der Kaffeetasse ebenfalls einer Kardioide?

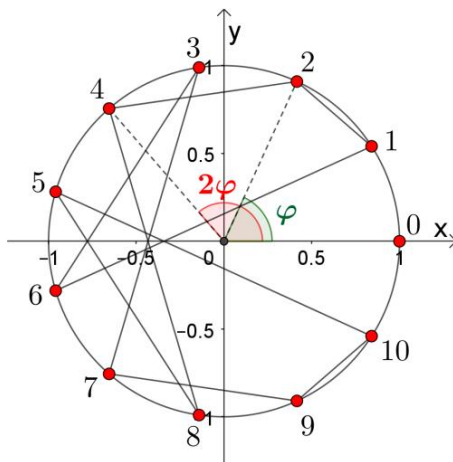


Fig. 4: Erklärung zum Vorgehen.

Für eine graphischen Multiplikationstabelle setzen wir m Punkte in regelmässigen Abständen auf den Einheitskreis, z. B. $m = 11$, und nummerieren diese Punkte von 0 bis 10 durch, beginnend mit dem Punkt $(1,0)$ auf der x -Achse. Dann wird von jedem Punkt mit der jeweiligen Nummer n aus die Verbindungsstrecke gezeichnet zum Punkt mit der zugehörigen Nummer $2n$, was eben gerade einer Verdoppelung des Winkels φ entspricht: S. Fig. 4. Vom Punkt mit der Nummer 0 geht darum keine Strecke aus; vom Punkt 1 geht eine Strecke zum Punkt 2 , vom Punkt 2 zum Punkt 4 , und so weiter. Vom Punkt 6 müsste eine Strecke zum Punkt mit der Nummer 12 gezeichnet werden.

Wären wir in der Nummerierung weitergefahren, hätte der Punkt 0 auch die Nummern $11, 22, 33, \dots$ erhalten, und der Punkt 1 auch die Nummern $12, 23, 34, \dots$. Allgemein führt darum eine Strecke vom Punkt mit der Nummer n zum Punkt mit der Nummer $((2n) \text{ modulo } m)$, und darum z. B. vom Punkt 6 zum Punkt 1 und vom Punkt 7 zum Punkt 3 .

Wählen wir $m = 200$, so zeichnet sich eine Kurve als Einhüllende ab, die wie die Kaustik in der Kaffeetasse aussieht: S. Fig. 5.

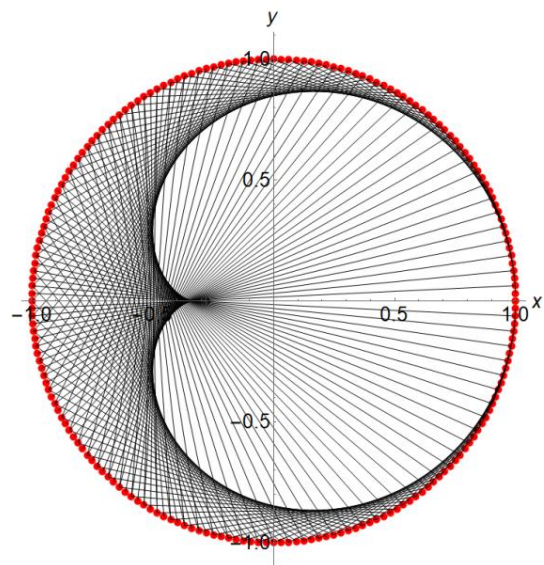


Fig. 5: Bild bei der Wahl $m = 200$.

Hätten wir hingegen Strecken von jedem Punkt n zum Punkt $3n$ statt zum Punkt $2n$ eingezeichnet, hätte sich als Einhüllende eine Nephroide oder Nierenkurve ergeben ⁽¹⁾.

Allgemein ergibt sich mit Strecken von jedem Punkt n zum Punkt $k \cdot n$ eine einhüllende Kurve mit $k-1$ 'Lappen' (¹).

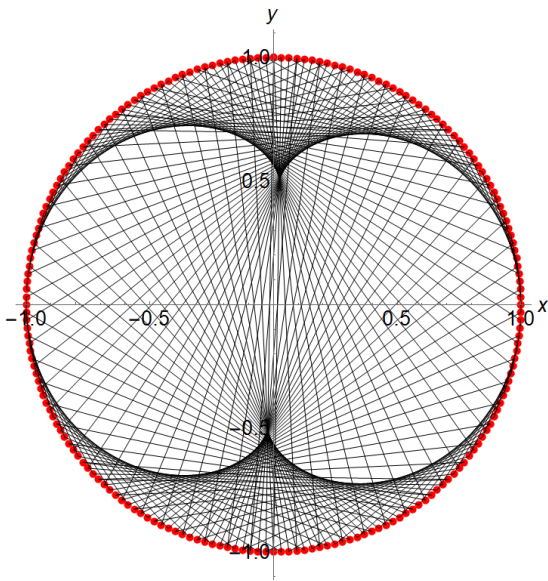


Fig. 6: Nephroide für $k = 3$.

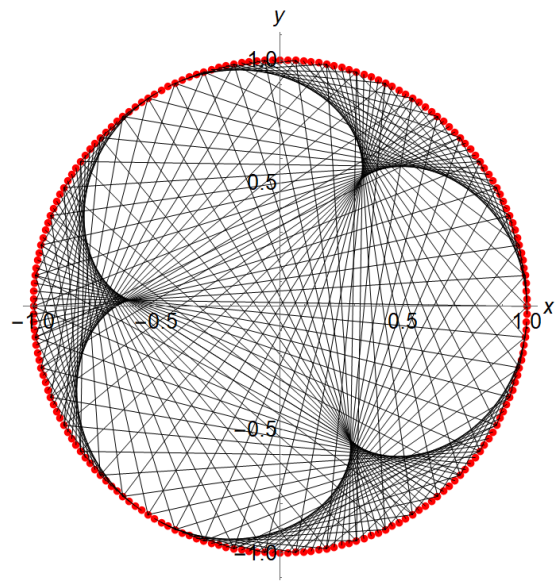


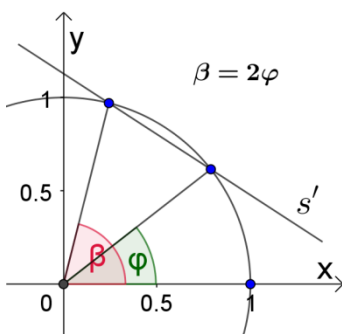
Fig. 7: Einhüllende für $k = 4$ mit 3 'Lappen'.

Die sich oben in Fig. 5 für $k = 2$ abzeichnende Einhüllende ist tatsächlich eine Kardioide, wie das im Folgenden nun hier gezeigt wird:

Die Gleichung einer Kardioide in Parameterform ist allgemein gegeben durch

$$\begin{cases} x(\varphi) = 2a \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) \\ y(\varphi) = 2a \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{Gl. 2 } (^2)$$

Der frei wählbare Streckfaktor a bestimmt dabei die Grösse der Kardioide.



Für den Kreis mit Radius 1 hat die Gerade s' (s. Fig. 8) der Geradenschar die Steigung

$$m = \frac{\sin(2\varphi) - \sin(\varphi)}{\cos(2\varphi) - \cos(\varphi)}$$

Dies ergibt für jeden Winkel φ die Gleichung der Geraden s' :

$$y(\varphi, x) = m \cdot x + \sin(\varphi) - m \cdot \cos(\varphi) \quad \text{Gl. 3}$$

Fig. 8: Zur Geradenschar s' .

Gemäss dem bekannten Vorgehen zum Auffinden der Gleichung einer Einhüllenden wird die Ableitung von $y(\varphi, x)$ nach dem Parameter φ gleich Null gesetzt und diese neue Gleichung nach x aufgelöst. Das ergibt denjenigen x -Wert, der zu diesem Winkel den gewünschten extremalen – hier minimalen – Wert aufweist.

Der zugehörige y -Wert der Einhüllenden ergibt sich, wenn in der allgemeinen Geradengleichung $y(\varphi, x) = m \cdot x + \sin(\varphi) - m \cdot \cos(\varphi)$ (Gl. 3) dieser so gefundene x -Wert eingesetzt wird.

Sowohl dieser x -Wert als auch der zugehörige y -Wert sind beides unübersichtliche Terme in $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$. Mit dem CAS *Mathematica* lassen sich beide diese Terme umformen, was zu der folgenden Parameterdarstellung dieser Kaustikkurve führt:

$$\boxed{\begin{aligned} x(\varphi) &= \frac{2}{3} \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \cos(\varphi) - \frac{1}{3} \\ y(\varphi) &= \frac{2}{3} \cdot (1 + \cos(\varphi)) \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \leq \varphi &\leq 2\pi \end{aligned}} \quad \text{Gl. 4}$$

Die Parameterdarstellung gem. Gl. 4 lässt sich aus der weiter oben wiedergegebenen allgemeinen Parameterdarstellung einer Kardioide gem. Gl. 2 herleiten, wenn $a = \frac{2}{3}$ gewählt wird und diese Kurve anschliessend um $\frac{1}{3}$ in negativer x -Richtung verschoben wird. Die sich in Fig. 5 für $k = 2$ abzeichnende Einhüllende bei der graphischen Multiplikationstabelle ist also tatsächlich eine Kardioide.

Mit den oben in Gl. 4 gegebenen Werten für $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ kann auch leicht der Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2) d\varphi = \frac{5\pi}{9}$$

dieser Kardioide berechnet werden, sowie deren Umfang, der erstaunlicherweise rational ist:

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} d\varphi = \frac{16}{3}.$$

Mit entsprechenden Umformungen der Gl. 2 kann weiter auch die kartesische Form der allgemeinen Kardioidengleichung gefunden werden: $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2 y^2 = 0$ (2).

Nun aber zurück zur Kaustik in der Kaffeetasse:

Um die Einhüllende aller Geraden gem. Gl. 1 zu finden, wird – mit analogem Vorgehen wie oben bei der Kaustik der graphischen Multiplikationstabelle gem. Fig. 5 und Gl. 3 – die Ableitung von $y(p, x)$ gem. Gl. 1 nach dem Parameter p gleich Null gesetzt und diese Gleichung nach x aufgelöst. Dies ergibt $x = -\frac{1}{2}\sqrt{1-p^2} \cdot (1+2p^2)$. Das ist derjenige x -Wert, für den die Gerade, die dem Parameter p entspricht, extremalen Wert hat. Der zugehörige y -Wert ist gleich $y(p, x)$, was vereinfacht gerade gleich p^3 ist. Die Kaustik in der Kaffeetasse hat damit die parametrische Gleichung

$$\boxed{\begin{aligned} x(p) &= -\frac{1}{2}\sqrt{1-p^2} \cdot (1+2p^2) \\ y(p) &= p^3 \\ -1 \leq p &\leq 1 \end{aligned}} \quad \text{Gl. 5}$$

Die Kurve gem. Gl. 5 ist sinnvollerweise nur gerade für Werte von p mit $-1 \leq p \leq 1$ definiert. In Fig. 9 wurde diese Kurve in grün zu der (komplettierten) Graphik der Fig. 3 hinzu gezeichnet: Sie passt mit dieser wie erwartet bestens zusammen.

Behauptung: Die Kurve gem. Gl. 5 ist eine (halbe) Epizykloide, die entsteht, wenn ein Kreis mit Radius $a = 0.25$ aussen auf einem Kreis mit Radius $b = 0.5$ abrollt. Wegen $b:a = 2$ ist sie ausserdem auch eine (halbe) Nephroide. Diese entspricht der folgenden Gleichung:

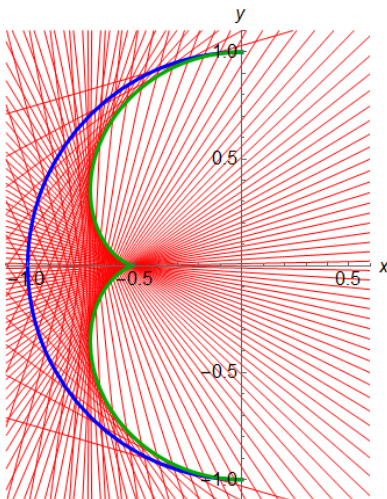


Fig. 9: Kaustik-Kurve gem. Gl. 5.

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= -(a+b) \cdot \cos(\varphi) + a \cdot \cos\left(\frac{(a+b) \cdot \varphi}{a}\right) \\ y(\varphi) &= (a+b) \cdot \sin(\varphi) - a \cdot \sin\left(\frac{(a+b) \cdot \varphi}{a}\right) \end{aligned} \quad \text{Gl. 6 } (^2)$$

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für $\sin(3\varphi)$ und $\cos(3\varphi)$ kann Gl. 6 zu Gl. 7 vereinfacht werden:

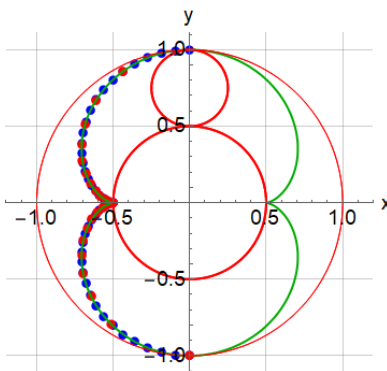


Fig. 10: Vergleich der Kurven gem. Gl. 5 und Gl. 7.

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= -\frac{3}{2} \cdot \cos(\varphi) + \cos^3(\varphi) \\ y(\varphi) &= \sin^3(\varphi) \end{aligned} \quad \text{Gl. 7}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

In Fig. 10 ist die Abrollsituation bei dieser Epizykloide wiedergegeben. Punkte gem. Gl. 5 sind in rot, Punkte gem. Gl. 7 in blau wiedergegeben. Graphisch ist die Übereinstimmung überzeugend: Diese beiden Kurven sind identisch!

Beweis: Mit der Substitution $p = \sin(\varphi)$ kann Gl. 5 sofort in Gl. 7 übergeführt werden.

Die Länge dieser Kaustik ist übrigens exakt gleich 3, und die von ihr und der y -Achse eingeschlossene Fläche misst $\frac{3\pi}{8}$, was drei Vierteln der halben Einheitskreisfläche entspricht.

Zusammenfassung:

Die Kaustik in der Kaffeetasse mit Radius 1 ist kongruent zu einer Hälfte derjenigen Epizykloide, die sich ergibt, wenn ein Kreis mit Radius $a = \frac{1}{4}$ aussen auf einem Kreis mit Radius $b = \frac{1}{2}$ abrollt.

Literatur:

- (¹): Burkard Polster, Blog 'Mathologer': Times Tables, Mandelbrot and the Heart of Mathematics. <https://youtu.be/qhbuKbxJsk8>.
- (²): Bronstein Semendjajew (1982). Taschenbuch der Mathematik, p. 141 ff.