

Dichteste Spaghettipackung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, martin.lieberherr@mng.ch

1 Einleitung

Wie viel Luft ist eigentlich noch zwischen den Spaghetti in der Packung? Lässt sich das von aussen ohne Röntgentomograph feststellen? Es kommt nicht in Frage, das Bündel ins Wasser zu tauchen, weil dann die Spaghetti quellen. Aber da ich gerade das Thema Dichte mit meinen Zweitklässlern abgeschlossen hatte, stand mir ja die Technologie zur Verfügung!

2 Experiment

Eine Packung getrockneter Spaghetti wog 523.14 g, wovon etwa 1 % auf die Plastikfolie fiel. Bündelte ich die Spaghetti zu einem Kreiszylinder und mass mit einem Rollmeter den Umfang, so erhielt ich 16.0 cm. Ich habe am metallischen Messband gezogen, um das Bündel etwas zu komprimieren.

Ich zupfte zehn Spaghetti heraus, mehr wollte ich nicht opfern. Sie wogen zusammen 9.95 g, waren im Durchschnitt 24.3 cm lang und hatten 1.95 mm Durchmesser. Alle Angaben sind auf Grössenordnung 1 % genau.

Aus den genannten Angaben erhält man eine mittlere Bündeldichte von 1.06 g/cm^3 und eine Spaghettodichte von 1.37 g/cm^3 . Das Dichteverhältnis beträgt 0.77, d.h. ein kompaktes Spaghettibündel besteht zu etwa $3/4$ aus getrocknetem Teig.

3 Theorie

Die Spaghetti sind etwas unregelmässig im Bündel angeordnet. Welches Verhältnis würde man denn nach Theorie erwarten, wenn die Anordnung regelmässig wäre? In Anlehnung an die Kristallographie habe ich die Anordnungen in Abbildung 1 als kubisch und in Abbildung 2 als hexagonal bezeichnet, aber ich rechne nur zweidimensional, d.h. ein Spaghetto erscheint im Querschnitt als Kreis.

Abbildung 1: Kubische Anordnung von Spaghetti auf einem periodischen Gitter

Wenn ein Spaghetto Durchmesser d hat, so ist d^2 die Fläche der Einheitszelle und $\frac{\pi}{4}d^2$ die (braun gefärbte) Fläche des Teigs in der Zelle. Das Verhältnis ist somit $\pi/4 = 0.785$.

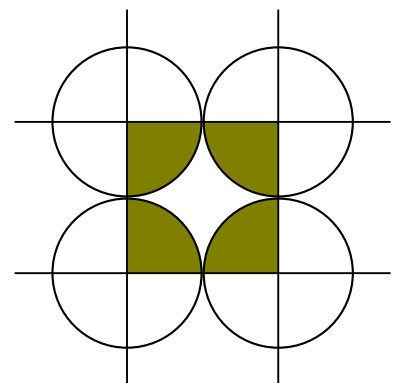
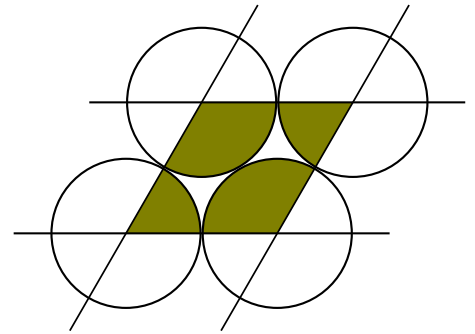


Abbildung 2: Hexagonale Anordnung von Spaghetti auf einem periodischen Gitter

Die braune Fläche stellt den Teiganteil $\frac{\pi}{4}d^2$ der Spaghetti in der Einheitszelle dar, welche ihrerseits Fläche $\frac{\sqrt{3}}{2}d^2$ hat. Der relative Anteil der braunen Fläche beträgt somit $\pi/(2\sqrt{3}) = 0.907$.



4 Diskussion

Der Vergleich von Theorie und Experiment zeigt, dass die Dichte der Spaghetti im Bündel im Bereich jener eines “kubischen Gitters” liegt (mit einer recht grossen Fehlerschranke). In Wirklichkeit sind die Spaghetti unregelmässig angeordnet. Leider habe ich keine passende Methode gefunden, wie man Kreisscheiben in der Ebene zufällig verteilen kann unter der Nebenbedingung, dass sie sich teilweise berühren und nicht überschneiden, sonst hätte ich das simuliert.

Die zweidimensionale Rechnung ist so einfach, dass sie im Anfangsunterricht durchgeführt werden könnte. Wer noch den Schritt ins Dreidimensionale wagen möchte, kann die dichteste Kugelpackung oder die – jetzt vermutlich bewiesene [1] – Keplervermutung vorstellen.

Literatur

- [1] https://de.wikipedia.org/wiki/Keplersche_Vermutung (Abruf am 25. November 2016)
25. November 2016, Lie.