Logik? – Logisch!

Armin P. Barth

1 Motivation und Geschichte

Wenn wir uns im Folgenden mit Logik befassen, der Wissenschaft von der Folgerichtigkeit, so bauen wir ein Spezialwissen auf. Für jede Art von Wissensaufbau gilt aber, was der österreichisch-amerikanische Philosoph Ernst von Glasersfeld geschrieben hat:

Wissen wird vom lebenden Organismus aufgebaut, um den an und für sich formlosen Fluss des Erlebens soweit wie möglich in wiederholbare Erlebnisse und relativ verlässliche Beziehungen zwischen diesen zu ordnen. Die Möglichkeiten, so eine Ordnung zu konstruieren, werden stets durch die vorhergehenden Schritte in der Konstruktion bestimmt. Das heisst, dass die „wirkliche" Welt sich ausschliesslich dort offenbart, wo unsere Konstruktionen scheitern. Da wir das Scheitern aber immer nur in eben jenen Begriffen beschreiben und erklären können, die wir zum Bau der scheiternden Strukturen verwendet haben, kann es uns nie ein Bild der Welt vermitteln, die wir für das Scheitern verantwortlich machen.[1]

Die wirkliche, durch die Logik nur teilweise modellierte Welt, wird sich also vor allem dort offenbaren, wo die Logik unzureichend ist. Dann aber wird die Offenbarung keine Rückschlüsse auf die reale Welt ermöglichen. Dieser Tatsache sollten wir uns von Anfang an bewusst sein, dass die Logik ein Modell ist, ein künstliches Produkt, mit Hilfe dessen wir das abzubilden, zu formalisieren hoffen, was wir unter Folgerichtigkeit verstehen. Keineswegs gibt uns die Logik verlässliche Anweisungen, wie wir zu denken haben, aber immer dann, wenn wir ein schlüssiges, lupenreines Argument bilden möchten, ist die Logik das stützende Gerüst, an dem das Argument empor wächst. Da logisches Schliessen bei jeglichem mathematischen Tun mitspielt (in dem Sinne nämlich, dass die theoriespezifischen Axiome durch die logischen ergänzt und dass Regeln des logischen Schliessens immer verwendet werden), ist es, egal, womit man sich in der Mathematik beschäftigt, sinnvoll, sich auch mit Logik auseinanderzusetzen.

Die Logik untersucht die Zusammenhänge zwischen Aussagen. Welche Aussage kann aus welchen anderen hergeleitet werden? Was heisst überhaupt ‚hergeleitet'? Und wenn das geklärt ist: Wann ist eine Herleitung korrekt? Beispielsweise ist der Schluss

Einige Griechen sind Philosophen.
Alle Philosophen sind weise.
Also: Einige Griechen sind weise.

allein aufgrund seiner äusseren Form korrekt. Der Inhalt spielt dabei gar keine Rolle. Wir könnten „Griechen" ohne weiteres durch „Eskimos" ersetzen und „weise" durch „grün", und der Schluss als Ganzes wäre korrekt ganz unabhängig davon, ob *tatsächlich* einige Eskimos Philosophen und ob *tatsächlich* alle Philosophen grün sind. Um ganz vom Inhalt zu abstrahieren, könnten wir auch, wie Aristoteles das in seinen „Syllogismen" getan hat, schreiben:

Einige A sind B.
Alle B sind C.
Also: Einige A sind C.

---

[1] Ernst von Glasersfeld, „Wissen, Sprache und Wirklichkeit", Arbeiten zum radikalen Konstruktivismus. In: „Wissenschaftstheorie, Wissenschaft und Philosophie" 24, Vieweg-Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1987.

Die Logik ersetzt die Umgangssprache nicht, schmälert nicht ihren Wert. Die Logik verhält sich zur Umgangssprache wir ein Mikroskop zum Auge, um einen Vergleich von Gottlob Frege, einem der Gründer der modernen Logik, zu verwenden[2]. Das Auge ist beweglich, vielseitig, aber unfähig zu scharfer Unterscheidung in kleinen Details. Dort leistet das Mikroskop wertvolle Dienste, aber es ist unfähig, den ganzen Reichtum des Sichtbaren zu erfassen. Die Zeile „Ich bin, der ich bin..." eines Renaissancegedichtes von Thomas Wyatt[3] zum Beispiel wäre für einen Logiker nichts weiter als eine langweilige Identitätsaussage

Wenn ich A bin, so bin ich A,

während sich für einen Philosophen einiges an Tiefsinn aus dieser Zeile schälen mag. Die Logik ist das Instrument, das uns hilft, die kleinen und vertrackten Fallgruben des Folgerns und Argumentierens zu umgehen.

Aristoteles wurde schon erwähnt. Sein Werk „Organon" (zu Deutsch etwa: „Instrument der Vernunft") zusammen mit den „Elementen" von Euklid gilt als Anfang der Logik und als Höhepunkt des klassisch-griechischen Strebens nach absoluter Gewissheit. Im Organon legt der Philosoph mit 14 Vorschriften, den sog. „Syllogismen", fest, wie man Schlüsse folgerichtig aus Annahmen ziehen kann. In den „Elementen" benutzt Euklid die Prinzipien des logischen Schlussfolgerns, um Hunderte von geometrischen Lehrsätzen aus nur wenigen Voraussetzungen (Definitionen, Postulaten und Axiomen) herzuleiten.

Während der über 2000 Jahre, die seit Aristoteles vergangen sind, wandten immer wieder Philosophen, Naturwissenschaftler und Literaten die logischen Prinzipien an, um ihrem Gegenstandsbereich vermeintlich absolute Gewissheit zu verleihen. Im 13. Jahrhundert etwa versuchte Thomas von Aquin die Logik einzusetzen, um die Wahrhaftigkeit von Glaubensgegenständen zu bestätigen. Immer wieder wurde versucht, durch logisches Schlussfolgern die Existenz Gottes zu beweisen, zum (wahrscheinlich) letzten Mal von Kurt Gödel Mitte des 20. Jahrhunderts[4]. Gottfried Wilhelm Leibniz plante, einen logischen Kalkül, die „mathesis universalis", zu konstruieren, mit dem sich selbst ethische und metaphysische Aussagen entscheiden lassen, so dass die Menschen dann nur noch glücklich sein könnten, weil sie ein automatisches Verfahren an der Hand hätten, um alle quälenden Fragen zu beantworten[5]. Die Logik wurde enorm bereichert durch die „Gesetze des Denkens" von G. Boole (1854), die „Begriffsschrift" von G. Frege (1870) und die „Formulario Mathematico" von G. Peano (1900).

Die moderne Logik hat die „mathesis universalis" nicht im geringsten realisieren können. Stattdessen zeigte sie, dass gewisse Erkenntnisse auf rein formalem Weg, also unter Benutzung logischer Kalküle, nicht möglich sind. Es gehört zu den faszinierendsten Facetten der Logik, dass sie in der Lage ist zu zeigen, wozu sie nicht in der Lage ist. Die moderne Logik hat unglaublich viel geleistet: Heerscharen von Logikern haben daran gearbeitet, die mathematischen Theorien auf saubere, verlässliche Fundamente mit möglichst kleinen Axiomensystemen zu stellen und daraus dann das schon vorhandene Wissen nach strengen logischen Standards neu abzuleiten und damit abzusichern. Die Euphorie dieser Zeit kleidete der deutsche Mathematiker Hermann Weyl in die Worte[6]: „Die Logik ist die Hygiene, die der Mathematiker praktiziert, um seine Gedanken gesund und stark zu halten." Dann, wie gesagt, tauchten immer mehr Sätze auf, die die Unmöglichkeit gewisser logischer Vorhaben bewiesen, und die Logik machte sich erfolgreich daran, ihre eigenen Grenzen abzustecken.

Der Versuchung, mit Logik das Denken der Menschen zu beeinflussen, erlag um 1960 ein Projektteam um den amerikanischen Soziologen James Cooke Brown. Dieser erschuf eine Kunstsprache namens „Loglan" (logical language), in der die Syntax von Aussagen derjenigen der Prädikatenlogik nachgebildet war. Der Satz „Alle Hunde sind blau" hiess etwa

radaku	da	kangu	u	da	blanu
Für alle x	x	Hund	wenn-dann	x	blau

Es ist wenig überraschend, dass sich diese Sprache nie durchgesetzt hat. Im Alltag wäre es viel zu einschränkend, würde man die Sprache ins enge, präzise Korsett der Logik schnüren. Und meist hat es auch wenig mit Logik zu tun, wenn wir im Alltag versichern, dies oder das sei doch „logisch".

---

[2] Gottlob Frege, „Begriffsschrift und andere Aufsätze", Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1977, p. XI
[3] Sir Thomas Wyatt (* 1503 auf Allington Castle, Maidstone, Kent; † 11. Oktober 1542 in London) war ein englischer Dichter und Diplomat.
[4] Gödels „Ontological Proof" ist aus dem Nachlass in seinen „Collected Works", Bd. 3, p. 403f., veröffentlicht worden.
[5] Dieser Plan von Leibniz (1646 – 1716) ist erst 1903 bekannt geworden durch die „Opuscules et fragments inédits de Leibniz" (Paris, Alcan, 1903, p. 153ff.) des französischen Leibniz-Forschers Louis Couturat.
[6] zitiert nach Simon Singh, „Fermats letzter Satz", Carl Hanser Verlag, München, Wien, 1998, p. 164

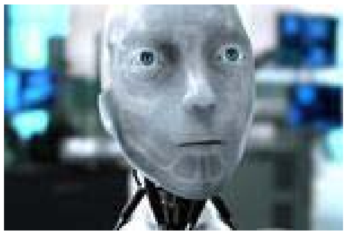
2 Aussagenlogik

Die Aussagenlogik handelt vom korrekten, schlüssigen Umgang mit *Aussagen*, also mit Äusserungen, denen eindeutig einer der beiden Wahrheitswerte W (wahr) oder F (falsch) zugeordnet werden kann. Als Definition taugt das nicht, ist es doch bei den meisten alltäglichen Aussagen unklar und strittig, ob sie nun zutreffen oder nicht.

Stellen wir uns nur einmal die folgende Situation vor: Allen Robotern seien die drei Gesetze von I. Asimov einprogrammiert worden[7]. Das erste Gesetz besagt, dass ein Roboter weder einem Menschen Schaden zufügen, noch durch Untätigkeit zulassen darf, dass einem Menschen Schaden zugefügt wird. Angenommen, wir weisen nun einen ersten Roboter X an, den Inhalt einer Giftflasche in eine Pfanne voller Suppe zu giessen, und anschliessend weisen wir einen zweiten Roboter Y an, einem Menschen diese Suppe zu servieren. Ist nun die „Aussage“

Y fügt dem Menschen Schaden zu

wahr oder falsch? Genauer: Ist sie innerhalb des Systems Y wahr?



Szene aus dem US-Spielfilm „I, Robot“

Dieses Beispiel macht deutlich, dass wir unsere Vorstellung davon, was eine Aussage ist, präzisieren müssen. Der nun folgenden Aufbau der Aussagenlogik erfolgt streng formalistisch, gerade um Probleme mit inhaltlichen Interpretationen zu vermeiden. Dabei ersetzen wir, wie D. Hilbert es ausdrückte[8], das „inhaltliche Schliessen durch ein äusseres Handeln nach Regeln“.

2.1 Zeichen, Formeln, Bewertungen und Computerchips

Wir vereinbaren, den folgenden Zeichensatz zu benutzen, bei dem wir uns auf ein Minimum beschränken: ein Symbol für die logische Negation, eines für die Konjunktion (und-Verbindung), die runden Klammern sowie Variablen für Aussagen, sog. *Atome*.

Der Zeichensatz:	$\neg$	$\wedge$	(	)	$A_0, A_1, A_2, \ldots$
	nicht	und	Runde Klammer	Runde Klammer	Atome

Wir stellen uns dabei vor, dass in die Atome irgendwelche elementare Aussagen („1+1=2“, „8 ist prim“, „London ist die Hauptstadt von England“, ...) eingesetzt und dass diese mit Hilfe der anderen Symbole zu komplexeren Aussagen verknüpft werden können. Damit diese Verknüpfung korrekt passiert, brauchen wir die folgende Definition:

<u>Definition</u>: Alle Atome heissen *aussagenlogische Formeln*. Sind Φ und Ψ aussagenlogische Formeln, so auch $(\neg\Phi)$ und $(\Phi \wedge \Psi)$. Nichts sonst ist eine aussagenlogische Formel.

Damit ist ganz klar gesagt, was eine korrekt gebildete Formel ist und was nicht. Nun lassen sich aus den Atomen auch komplexere Formeln bilden wie etwa $\neg((A_0 \wedge A_1) \wedge (\neg A_0))$. Umgangssprachlich lässt sich diese Formel so interpretieren: Es trifft nicht zu, dass gleichzeitig A_0 und A_1 zutreffen und auch noch die Negation von A_0.

Die Zeichen $\neg$ und $\wedge$ bilden eine Junktorenbasis in dem Sinne, dass die anderen logischen Junktoren ($\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$) durch diese beiden ausgedrückt werden können. Im Sinne von Abkürzungen verwenden wir die restlichen Junktoren aber gerne und zwar so:

$\Phi \vee \Psi$	als Abkürzung für	$\neg(\neg\Phi \wedge \neg\Psi)$
$\Phi \rightarrow \Psi$	als Abkürzung für	$\neg(\Phi \wedge \neg\Psi)$
$\Phi \leftrightarrow \Psi$	als Abkürzung für	$\neg(\Phi \wedge \neg\Psi) \wedge \neg(\Psi \wedge \neg\Phi)$

[7] Die Robotergesetze wurden von Isaac Asimov in seiner Kurzgeschichte „Runaround“ (1942) als Grundregeln für Roboter jeglicher Art erstmals beschrieben.
[8] David Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“ 7. Aufl., Leipzig – Berlin, 1930, p. 283

Auch bei der Verwendung von Klammern erlauben wir uns einen eher saloppen Umgang, wie schon obige Abkürzungen zeigen. Um nun aussagenlogische Formeln mit Wahrheit und Falschheit (also einer Semantik) in Verbindung zu bringen, führen wir „Bewertungen" ein:

Definition: Eine *Bewertung* $B(\Phi)$ ordnet einer aussagenlogischen Formel Φ einen der Wahrheitswerte W (wahr) oder F (falsch) zu. Das geschieht durch willkürliche Zuordnungen $B(A_i) \in \{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$ für alle in Φ vorkommenden Atome sowie die Festlegungen, dass

- $B(\neg\Phi) = \mathrm{F}$, falls $B(\Phi) = \mathrm{W}$ und umgekehrt
- $B(\Phi \wedge \Psi) = \mathrm{W}$ genau dann, wenn $B(\Phi) = B(\Psi) = \mathrm{W}$ und sonst immer F.

Betrachten wir erneut die oben benutzte Formel $\Phi : \neg\big((A_0 \wedge A_1) \wedge (\neg A_0)\big)$. *Eine* Bewertung entsteht dadurch, dass wir den Atomen A_0 und A_1 zufällig je einen der Wahrheitswerte W, F zuordnen, etwa $B(A_0) := \mathrm{W}$ und $B(A_1) := \mathrm{F}$, und dass wir dann die in der Definition gegebenen Festlegungen umsetzen. Daraus ergibt sich erst $B(A_0 \wedge A_1) = \mathrm{F}$, dann $B(\neg A_0) = \mathrm{F}$, dann $B\big((A_0 \wedge A_1) \wedge (\neg A_0)\big) = \mathrm{F}$ und schliesslich $B(\Phi) = \mathrm{W}$. Für diese eine Bewertung (wie übrigens für jede andere auch) erhält unsere Formel Φ also den Wahrheitswert W.

Verwenden wir zusätzlich die obigen Abkürzungen, so können wir Formeln auch dann Wahrheitswerte zuordnen, wenn sie die Junktoren $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ enthalten. Meist stellt man das in sog. *Wahrheitswerttabellen* dar. Die Tabelle für die Implikation beispielsweise sieht so aus:

	A_0	A_1		$A_0 \rightarrow A_1$
falls	W	W	dann	W
	W	F		F
	F	W		W
	F	F		W

Diese Tabelle führte immer wieder zu Verwirrung, vor allem, weil $A_0 \rightarrow A_1$ auch dann wahr ist, wenn die Prämisse (A_0) falsch ist. Schon Philo von Megara (im 2. Jahrhundert v. Chr.) beschrieb die Implikation auf diese Weise, und die Scholastiker prägten sie sich so ein: *ex falso sequitur quodlibet*. Aus etwas Falschem kann also alles impliziert werden, und der Schluss als Ganzes ist wahr. Das ist nicht so merkwürdig, wie es auf den ersten Blick erscheinen mag: Wenn wir in der Umgangssprache sagen „Wenn Weihnachten und Ostern zusammenfallen, dann..." oder „Wenn's Märzenbier regnet und Bratwürstel schneit, so...", dann sind wir uns bewusst, dass die Prämisse falsch ist, und doch wollen wir insgesamt etwas Wahres sagen. Dass Implikationen durchaus Zündstoff enthalten können, zeigt das Beispiel von Exponenten der Pius-Bruderschaft, die sich auf die Pfingstpredigt berufen, in der Petrus zu den Juden gesagt haben soll: *Wenn ihr das Heil erlangen wollt, dann müsst ihr euch bekehren und euch taufen lassen auf den Namen Jesu Christi*.[9] Als Implikation ist diese Aussage äquivalent zu: Wer sich nicht bekehrt und taufen lässt auf den Namen Jesu Christi, der wird das Heil nicht erlangen. Und daraus leitet die Pius-Bruderschaft ab, dass Hinduismus, Buddhismus, Islam und Judentum keinen eigenen Heilsweg haben. Wie unsinnig solche Äusserungen sind, zeigt schon die Tatsache, dass Bibeltexte Überlieferungen von Überlieferungen darstellen, anfangs zudem mündlich, dass dabei sehr viel Interpretationsspielraum besteht und dass die erwähnte Stelle in der Luther-Bibel[10] ganz anders heisst: *Tut Busse und lasse sich ein jeglicher taufen auf den Namen Jesu Christi zur Vergebung der Sünden, so werdet ihr empfangen die Gabe des heiligen Geistes*. Danach ist die Implikation eine ganz andere: Wenn man Busse tut und sich taufen lässt, so wird man das Heil erlangen. Damit ist aber nichts darüber gesagt, dass man das Heil auch auf anderem Weg erlangen kann. Da ist die Logik ganz klar.

Bezüglich des Wahrheitswertes irgendeiner aussagenlogischen Formel gibt es offenbar drei Möglichkeiten: Sie hat bei jeder möglichen Bewertung den Wahrheitswert W, oder sie hat bei jeder möglichen Bewertung den Wahrheitswert F, oder es können, je nach Bewertung, beide Wahrheitswerte auftreten. Die folgende Definition stellt hierfür Fachbegriffe zur Verfügung:

---

[9] zitiert aus: „Als Männer Gottes verkünden wir ewige Wahrheiten", Gespräch mit Pater Franz Schmidberger, in: Tages-Anzeiger, 14. Februar 2009, p. 10
[10] Martin Luther, „Die Bibel", Privileg. Württ. Bibelanstalt, Stuttgart, 1951, Apostelgeschichte 2, 38

<u>Definition</u>: Sei Φ eine aussagenlogische Formel. Falls $B(\Phi) = \mathrm{W}$ für jede mögliche Bewertung, so nennt man Φ eine *Tautologie* oder *identisch wahr*. Falls $B(\Phi) = \mathrm{F}$ für jede mögliche Bewertung, so nennt man die Formel *Kontradiktion* oder *identisch falsch*. Falls $B(\Phi) = \mathrm{W}$ für wenigstens eine Bewertung, so heisst Φ *erfüllbar*.

Die Formel $A_0 \vee \neg A_0$ (das „tertium non datur") ist ein Beispiel einer Tautologie. Dass es zutrifft, dass bei irgendeiner Aussage A_0 entweder die Aussage selbst oder aber ihre Negation zutrifft, ist aber nicht so unbestritten, wie es scheinen mag; die Intuitionisten (allen voran L. E. J. Brouwer und A. Heyting) haben es heftig kritisiert. Die Formel $A_0 \wedge \neg A_0$ behauptet eine Aussage gleichzeitig mit ihrer Negation und ist ein Beispiel einer Kontradiktion. Die Formel $A_0 \wedge A_1 \rightarrow \neg A_0$ ist erfüllbar, aber nicht identisch wahr, wie die folgende Tabelle aller möglichen Bewertungen zeigt:

A_0	A_1	$A_0 \wedge A_1$	$\neg A_0$	$A_0 \wedge A_1 \rightarrow \neg A_0$
W	W	W	F	F
W	F	F	F	W
F	W	F	W	W
F	F	F	W	W

Zahlreiche Sachverhalte können mit Hilfe aussagenlogischer Formeln ausgedrückt werden. Da wir später weitere Beispiele sehen werden, beschränken wir uns hier auf ein einziges Beispiel, dasjenige der Chipschaltungen. Computerchips automatisieren hochkomplexe Abläufe. Zu den einfachsten Herausforderungen für einen Chip gehört zweifellos das Einmaleins, im einfachsten Fall das Leisten der binären Additionen 0+0, 0+1, 1+0 und 1+1.

Es muss also die nebenstehende Tabelle realisiert werden, in der E für die Einerstelle und Ü für den Übertrag steht. Identifizieren wir 1 und 0 mit den Wahrheitswerten W und F, so lassen sich E und Ü leicht durch aussagenlogische Formeln ausdrücken:

A_1		A_2		Ü	E
0	+	0	=	0	0
0		1		0	1
1		0		0	1
1		1		1	0

E: $(\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge \neg A_2)$

Ü: $A_1 \wedge A_2$

Gelingt es, Schaltungen zu bauen, die genau diese Formeln realisieren, so versetzt dies den Computer in die Lage, das kleine Einmaleins zu beherrschen. Kompliziertere Operationen machen dann entsprechend kompliziertere Formeln nötig.

2.2 Normalformen

Oft ist es für die weitere Untersuchung einer aussagenlogischen Formel günstig, sie in eine spezielle Form, eine sog. *Normalform*, zu bringen. Wir geben hier gleich die Definition und erläutern das nachher an Hand von Beispielen.

<u>Definition</u>:

- Unter einem *Literal* verstehen wir ein Atom oder die Negation eines Atoms. Zu jedem Atom A_i gehören also zwei Literale, nämlich A_i selbst und $\neg A_i$.
- Eine aussagenlogische Formel Φ liegt in *konjunktiver Normalform* (KNF) vor, genau dann wenn sie die Form $\Phi : C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$ hat mit $n \geq 1$, wobei jedes C_i eine Disjunktion von Literalen ist.
- Eine aussagenlogische Formel Φ liegt in *disjunktiver Normalform* (DNF) vor, genau dann wenn sie die Form $\Phi : C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$ hat mit $n \geq 1$, wobei jedes C_i eine Konjunktion von Literalen ist.

Die Formel $(\neg A_0 \vee A_1) \wedge (A_0 \vee \neg A_1 \vee A_2)$ ist offenbar in KNF, während $(\neg A_0 \wedge A_1) \vee (A_0 \wedge \neg A_1 \wedge \neg A_2)$ in DNF ist. Es ist für die weiteren Überlegungen überaus nützlich zu wissen, dass jede aussagenlogische Formel in eine dieser Normalformen übergeführt werden kann. Eine Umformung bewirkt aber immer eine Veränderung der äusseren Form; daher müssen wir uns bewusst werden, dass eine solche Veränderung nur zulässig ist, wenn die ursprüngliche Formel und die umgeformte zueinander äquivalent sind, das heisst, wenn beide bei jeder möglichen Bewertung denselben Wahrheitswert erzeugen.

Definition: Zwei aussagenlogische Formeln Φ und Ψ heissen *äquivalent*, in Zeichen: $\Phi = \Psi$, genau dann wenn sie bei jeder möglichen Bewertung denselben Wahrheitswert erzeugen.

Der folgende (nur vage formulierte) Algorithmus formt eine aussagenlogische Formel Φ in eine der Normalformen um. Dabei machen wir fleissig Gebrauch von einigen wichtigen Äquivalenzen:

Umformung einer Formel in eine Normalform	Einige wichtige Äquivalenzen
Schritt 1: Verwende (1) & (2) wiederholt, um alle Junktoren $\leftrightarrow$ und $\rightarrow$ zu eliminieren. Schritt 2: Verwende (3), (4), (5) wiederholt, um alle Negationen unmittelbar vor die Atome zu bringen. Schritt 3: Verwende (6), (7) und weitere Gesetze, um eine der Normalformen zu erhalten.	(1) $\Phi \leftrightarrow \Psi = (\Phi \rightarrow \Psi) \wedge (\Psi \rightarrow \Phi)$ (2) $\Phi \rightarrow \Psi = \neg\Phi \vee \Psi$ (3) $\neg(\neg\Phi) = \Phi$ (4) $\neg(\Phi \vee \Psi) = (\neg\Phi) \wedge (\neg\Psi)$ (5) $\neg(\Phi \wedge \Psi) = (\neg\Phi) \vee (\neg\Psi)$ (4) und (5) heissen *Gesetze von De Morgan*. (6) $\Phi \vee (\Psi \wedge \Xi) = (\Phi \vee \Psi) \wedge (\Phi \vee \Xi)$ (7) $\Phi \wedge (\Psi \vee \Xi) = (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Xi)$ (6) und (7) heissen *Distributivgesetze*.

Wir überprüfen dieses Verfahren zum Beispiel an Hand der Formel $\Phi : (A_0 \rightarrow \neg A_1) \leftrightarrow A_2$:

In Schritt 1 eliminieren wir zuerst alle $\leftrightarrow$ und danach alle $\rightarrow$:

$$\begin{aligned} \Phi &= \big((A_0 \rightarrow \neg A_1) \rightarrow A_2\big) \wedge \big(A_2 \rightarrow (A_0 \rightarrow \neg A_1)\big) \\ &= \big((\neg \mathrm{A}_0 \vee \neg A_1) \rightarrow A_2\big) \wedge \big(A_2 \rightarrow (\neg A_0 \vee \neg A_1)\big) \\ &= \big(\neg(\neg \mathrm{A}_0 \vee \neg A_1) \vee A_2\big) \wedge \big(\neg A_2 \vee (\neg A_0 \vee \neg A_1)\big) \end{aligned}$$

In Schritt 2 ziehen wir alle Negationszeichen zu den Atomen:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Big(\big((\neg\neg A_0) \wedge (\neg\neg A_1)\big) \vee A_2\Big) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_0 \vee \neg A_1) \\ &= \big((A_0 \wedge A_1) \vee A_2\big) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_0 \vee \neg A_1) \end{aligned}$$

In Schritt 3 benutzen wir ein Distributivgesetz, um sofort die KNF zu erhalten:

$$\Phi = (A_0 \vee A_2) \wedge (A_1 \vee A_2) \wedge (\neg A_2 \vee \neg A_0 \vee \neg A_1)$$

Die beiden Normalformen haben enorme Vorteile: Während man aus der KNF sofort ablesen kann, ob die Formel tautologisch ist oder nicht (falls nämlich jede Klammer einen Ausdruck der Art $X \vee \neg X$ enthält), kann man aus der DNF sofort ablesen, ob die Formel kontradiktorisch ist oder nicht (falls nämlich jede Klammer einen Ausdruck der Art $X \wedge \neg X$ enthält).

2.3 Beweise, Vollständigkeit und Entscheidbarkeit

An dieser Stelle drängt sich ein wichtiger Hinweis auf: In der Logik haben wir es mit einer Sprache zu tun; wir arbeiten mit einem Alphabet, und wir wissen genau, wie die Symbole zu korrekt gebildeten „Wörtern“ (den Formeln) zusammengebaut werden dürfen. Wenn wir andererseits *über* die logischen Formeln reden, tun wir das auch in einer Sprache, der mathematischen Umgangssprache. In dieser können wir beispielsweise fragen, ob eine bestimmte Formel aus einer bestimmten Menge von Formeln beweisbar ist oder nicht (und erklären, was das genau heisst) oder ob eine bestimmte Menge von Formeln widerspruchsfrei ist oder nicht. Überlegungen dieser Art passieren ja nicht in der aussagenlogischen Formelsprache, sondern in der Umgangssprache, in der wir über die Formelsprache reden. Es ist im Hinblick auf die weiteren Untersuchungen wichtig, diese beiden Sprachen sauber auseinander zu halten, die *Objektsprache*, die die Objekte unserer Betrachtungen umfasst, also die Symbole und Formeln und so weiter, und die *Metasprache*, in der wir über die Objekte der Objektsprache reden.

Unzulässige Vermischungen verschiedener Sprachen sind die Ursachen vieler Paradoxien. In der Antike soll es beispielsweise eine Zeit gegeben haben, in der alle Bewohner von Kreta unfähig waren, jemals eine wahre Aussage zu machen. Wenn nun Epimenides (einer der Sieben Weisen, von denen es 22 gab), selber ein Bewohner von Kreta, behauptete, alle Kreter seien Lügner, so entsteht eine typische Vermischung zweier Sprachen, nämlich die Sprache, in der alle Kreter ihre Lügen äussern, und die Sprache, in der Epimenides *über* die Lügen der Kreter spricht. Die Vermischung wird bewusst herbeigeführt dadurch, dass Epimenides selber ein Kreter ist. Und daraus gewinnt die berühmte Paradoxie ihre Kraft: Als Kreter kann Epimenides keine wahre Aussage machen, also muss seine Aussage falsch sein. Die Annahme, sie sei falsch, führt aber sofort auf einen Widerspruch. Eine ähnliche Situation hat Kurt Gödel, wie wir in Kapitel 4 sehen werden, dazu gebracht, seine damals schockierende und mittlerweile weltberühmt gewordene Entdeckung zu machen...

Als nächstes geht es darum, die Aussagenlogik zu einem *Kalkül* auszubauen. Was heisst das genau? Für jede mathematische Theorie ist es eine der zentralen Fragen, wie das Wissen erweitert werden kann, wie ein Fundament gesicherten Wissens (das Axiomensystem) gebildet und wie daraus durch Beweise neue, gültige Erkenntnisse gewonnen werden können, so dass die Theorie wie ein lebendiger und in sich stimmiger Organismus anwächst. Es muss dazu festgelegt werden, welche Aussagen axiomatisch akzeptiert werden, was es heissen soll, dass etwas „gilt" und welches genau die „Wachstumsregeln" sind, wie also neue Erkenntnisse aus den schon gesicherten empor wachsen oder – um es mathematischer auszudrücken – was genau ein Beweis ist. Ist dies einmal geleistet, entstehen ganz automatisch faszinierende Fragen: Produzieren Beweise immer nur gültige Aussagen? Kann alles, was gilt, auch bewiesen werden? Ist jede korrekt gebildete Aussage entweder beweisbar oder widerlegbar? Solche Fragen müssen noch etwas zurückstehen, denn zuerst sollten wir die Aussagenlogik zu einem Kalkül vervollständigen.

Welche aussagenlogischen Formeln (die natürlich Tautologien sein müssen) bilden das Axiomensystem der Aussagenlogik? Das lässt sich nicht eindeutig beantworten; historisch gab es mehrere Axiomensysteme, die alle dasselbe leisteten. Das erste System stammte von G. Frege (1879) und beinhaltete diese Axiome:

(1) $A_0 \to (A_1 \to A_0)$

(2) $(A_0 \to (A_1 \to A_2)) \to ((A_0 \to A_1) \to (A_0 \to A_2))$

(3) $(A_0 \to (A_1 \to A_2)) \to (A_1 \to (A_0 \to A_2))$

(4) $(A_0 \to A_1) \to (\neg A_1 \to \neg A_0)$

(5) $\neg\neg A_0 \to A_0$

(6) $A_0 \to \neg\neg A_0$

Verbesserungen von Lukasiewicz haben später (3) eliminiert, weil es aus (1) und (2) beweisbar ist, und (4) – (6) durch das neue Axiom (4') $(\neg A_0 \to \neg A_1) \to (A_1 \to A_0)$ ersetzt. Weitere Axiomensysteme stammen von Whitehead-Russell (1910), von Hilbert (1923), von Hilbert-Ackermann (1928), von Lukasiewicz (1929); 1917 gab J. Nicod sogar ein System aus nur einem einzigen Axiom an[11], allerdings unter Verwendung eines anderen Junktors, des sog. *Shefferschen Striches*. Das heute am meisten verwendete Axiomensystem ist wohl das System von Hilbert und Bernays[12], das für jeden der fünf Junktoren drei Formeln bereit stellt. Wir wollen im Folgenden das verbesserte System von Frege als Axiomensystem verwenden:

(1) $A_0 \to (A_1 \to A_0)$ (2) $(A_0 \to (A_1 \to A_2)) \to ((A_0 \to A_1) \to (A_0 \to A_2))$ (3) $(\neg A_0 \to \neg A_1) \to (A_1 \to A_0)$
Ein Axiomensystem für die Aussagenlogik

[11] J. G. P. Nicod, „A reduction in the number of the primitive propositions of logic", Proc. Camb. Phil. Soc. Bd. 19 (1917)
[12] D. Hilbert, P. Bernays, „Grundlagen der Mathematik I", Springer-Verlag, Berlin, 1968, p. 65

Aufbauend auf diesen Axiomen lassen sich nun neue Erkenntnisse erzeugen, indem wir eine sog. *logische Regel des Schliessens* darauf anwenden. Als Regeln wollen wir hier die „Einsetzregel" sowie den „modus ponens" (MP) zulassen.

Die Einsetzregel besagt, dass für eine Aussagevariable (also für $A_0, A_1, \ldots$) überall, wo sie vorkommt, dieselbe Formel eingesetzt werden darf. Das ist vernünftig, denn, wenn wir zum Beispiel die Formel $A_0 \to (A_1 \to A_0)$ allgemein akzeptieren, so sicher auch die Formel $(A_2 \to A_3) \to (A_1 \to (A_2 \to A_3))$, die daraus entstanden ist, indem wir konsequent A_0 durch $A_2 \to A_3$ ersetzt haben.

Die andere Regel, der MP, besagt, dass, wenn Φ schon bewiesen ist, und wenn zweitens auch $\Phi \to \Psi$ schon bewiesen ist, dass wir dann auf Ψ schliessen können. Schematisch wollen wir das so darstellen:

$$\begin{array}{l} \Phi \\ \Phi \to \Psi \\ -----(MP) \\ \Psi \end{array}$$

Dieser Schluss ist überaus plausibel. Wenn wir grundsätzlich wissen, dass die Gültigkeit von Φ zwingend die Gültigkeit von Ψ zur Folge hat, und wenn nun eingesehen werden kann, dass Φ gilt, so werden wir sicherlich auch die Gültigkeit von Ψ akzeptieren wollen.

Basierend auf den Axiomen können nun mit Hilfe der Schlussregeln weitere gesicherte Erkenntnisse erzeugt werden. Indem man das tut, erbringt man Beweise. Beispielsweise dürfen wir gemäss der Einsetzregel in Axiom (1) A_1 durch $A_1 \to A_0$ ersetzen und erhalten

$$A_0 \to ((A_1 \to A_0) \to A_0) \quad \text{(i)}$$

Ebenfalls gemäss Einsetzregel dürfen wir in Axiom (2) A_2 durch A_0 und A_1 durch $A_1 \to A_0$ ersetzen und erhalten

$$(A_0 \to ((A_1 \to A_0) \to A_0)) \to ((A_0 \to (A_1 \to A_0)) \to (A_0 \to A_0)) \quad \text{(ii).}$$

Mit MP aus (i) und (ii) folgt nun

$$(A_0 \to (A_1 \to A_0)) \to (A_0 \to A_0) \quad \text{(iii)}$$

Mit MP aus (iii) und Axiom (1) erhalten wir schliesslich $A_0 \to A_0$.

Somit fügen wir unseren Erkenntnissen über die Aussagenlogik die neue, nun gesicherte (weil bewiesene) Erkenntnis $A_0 \to A_0$ an.

Nun sind wir in der Lage, überaus interessante Fragen zu stellen und zu beantworten. Hier sind die Fragen:

(1) Ist gewährleistet, dass die Aussagenlogik keine falschen Formeln produziert? Genauer: Sind alle aus den Axiomen mit Hilfe der Schlussregeln bewiesenen Formeln automatisch Tautologien?
(2) Kann alles, was gilt, auch bewiesen werden? Genauer: Sind die Axiome und die Schlussregeln stark genug, damit für jede Tautologie auch ein Beweis geliefert werden kann, der einzig diese Hilfsmittel benutzt?
(3) Gibt es ein automatisierbares Verfahren, das zu entscheiden gestattet, ob irgendeine aussagenlogische Formel eine Tautologie ist oder nicht?

(1) und (2) zusammen bereiten eine Sensation vor! Wir haben ja nun einerseits den Kalkül, das streng formale Beweisen von Formeln, bei dem es einzig um die Form geht, und wir haben andererseits das inhaltliche Schliessen, wo es um Bedeutungen der Formeln geht. Die Fragen zielen nun darauf ab zu verstehen, dass diese beiden „Welten" perfekt zusammenspielen, dass der Formalismus genau das leistet, was wir uns inhaltlich von ihm wünschen, dass er eben nur wahre und genau die wahren Aussagen produziert. Das ist keineswegs selbstverständlich. Ebenso wenig, wie dass es einen Algorithmus geben soll, der erfolgreich jede Formel auf identische Wahrheit testen kann. Wir gehen nun der Reihe nach auf die Fragen ein:

Zu (1):
Für die Aussagenlogik ist dies gewährleistet. Es kann leicht (und in endlicher Zeit) überprüft werden, dass alle Axiome der Aussagenlogik Tautologien sind; dazu müssen lediglich die Wahrheitswerttabellen der Axiome

aufgestellt werden. Zudem lässt sich einsehen, dass die beiden Schlussregeln wahre Formeln in neue wahre Formeln überführen. Für den MP ist das unmittelbar klar. Wenn Φ und $\Phi \to \Psi$ beides Tautologien sind, so muss Ψ selbst auch eine Tautologie sein. Würde eine einzige Bewertung von Ψ nämlich den Wahrheitswert F liefern, so könnte die Implikation $\Phi \to \Psi$ keine Tautologie sein, da eine Implikation, in der die Prämisse wahr, aber die Konklusion falsch ist, insgesamt falsch ist. Auch die Einsetzregel kann aus wahren Formeln nur neue wahre Formeln erzeugen. Betrachten wir dazu eine beliebige Tautologie Φ ; darin möge das Atom A_i vorkommen, das wir nachher ersetzen werden. Egal, welchen der beiden Wahrheitswert man A_i gibt, die ganze Formel wird auf alle Fälle wahr sein, sonst wäre sie ja keine Tautologie. Nun ersetzen wir A_i durch eine Formel. Auch sie kann nur einen der beiden Wahrheitswerte W, F haben und daher nichts an der Tatsache ändern, dass Φ auch nach der Ersetzung tautologisch ist.

Insgesamt kann die Aussagenlogik also nichts Falsches produzieren.

Zu (2):
Es könnte doch sein, dass unsere Axiome und Schlussregeln einfach nicht stark genug sind, dass wir eine wichtige Schlussregel vergessen haben, die nötig wäre, um alle Tautologien beweisen zu können. Das ist glücklicherweise nicht so; die Aussagenlogik ist *(semantisch) vollständig*. Das heisst, dass alle identisch wahren Formeln auch wirklich aus den Axiomen mit Hilfe unserer Schlussregeln hergeleitet werden können.

<u>Definition</u>: Eine Theorie, in der alles, was gilt, auch bewiesen werden kann, heisst *(semantisch) vollständig*.

Wir deuten den Beweis hier nur an: Zuerst betrachten wir irgendeine Tautologie Φ . Wir formen sie in KNF um und nennen die umgeformte Formel Φ'. Wir wissen schon, dass $\Phi = \Phi'$ ist; Φ' ist also auch eine Tautologie. Da die neue Formel in KNF ist, hat sie die Form $\Phi' : C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_n$ wobei $n \geq 1$ und jedes C_i eine Disjunktion von Literalen ist. Weil Φ' eine Tautologie ist, muss jedes einzelne C_i tautologisch sein. (Ein einziges F in einer Konjunktionskette würde die ganze Konjunktion ja mit F bewerten.) Da also jedes C_i tautologisch ist, muss in jedem C_i eine Formel der Art $X \vee \neg X$ vorkommen für irgendein Atom *X*. Jedes C_i ist also äquivalent zu einer Formel $... \vee X \vee \neg X \vee ...$ Man zeigt nun, dass das tertium non datur innerhalb der Aussagenlogik beweisbar ist und weiter, dass $A_0 \to A_0 \vee A_1$ gilt. Dank diesem Gesetz kann aus dem schon bewiesenen $X \vee \neg X$ das ganze C_i aufgebaut werden.

Zu (3):
Es ist sehr einfach, einen Algorithmus anzugeben, der jede aussagenlogische Formel auf Gültigkeit testet. Besteht die Formel nämlich aus *n* Atomen, so muss man nur alle 2^n möglichen Bewertungen überprüfen. Wenn jedes Mal der Wahrheitswert W entsteht, ist die Formel eine Tautologie. Die Aussagenlogik ist somit *entscheidbar*. Der erste Beweis der Entscheidbarkeit geht auf E.L. Post[13] (1921) zurück.

<u>Definition</u>: Eine Theorie heisst *entscheidbar*, wenn es einen (terminierenden) Algorithmus gibt, der für jede korrekt gebildete Formel der Theorie entscheidet, ob diese Formel wahr ist oder falsch.

Dass eine mathematische Theorie vollständig und entscheidbar ist, mag überaus wünschbar erscheinen. Leider gibt es diesbezüglich aber viele schlechte Nachrichten, und einigen davon werden wir in den folgenden Kapiteln begegnen.

2.4 Resolution

1965 führte J. A. Robinson[14] eine höchst effiziente Schlussregel ein, die sog. *Resolution*. Wir demonstrieren sie an Hand einer Knacknuss von Zweistein, die am 1. Mai 1987 in der Zeitschrift „Zeit“ erschienen ist:

(1) Von Krüger und Eckner ist mindestens ein Kind ein Mädchen.
(2) Wenn Krüger ein Mädchen ist, dann ist Hoffmann ein Junge und Ahrens ein Mädchen.

[13] E. L. Post, „Introduction to a general theory of elementary propositions“, American Journal of mathematics, vol. 43 (1921), pp. 169-173
[14] J. A. Robinson, “A machine oriented logic based on the resolution principle”, J. ACM 12, No. 1, 1965, pp. 23-41

(3) Wenn Hoffmann ein Junge ist, dann sind nicht sowohl Eckner als auch Gärtner Jungen. (4) Wenn Ahrens ein Junge ist, dann ist auch Dresen ein Junge. (5) Wenn Ahrens ein Mädchen ist, dann ist, falls Eckner ein Junge ist, Brückner ebenfalls einer. (6) Wenn Dresen ein Mädchen ist, dann ist Gärtner ein Junge. (7) Wenn Fuchs ein Junge ist, dann haben Ahrens und Brückner dasselbe Geschlecht. (8) Wenn Gärtner ein Junge ist, aber Ahrens ein Mädchen, dann ist Eckner ein Junge. (9) Wenn es nicht zutrifft, dass Eckner ein Junge ist und Johnson ein Mädchen, dann ist Dresen ein Mädchen.
eine Knacknuss von Zweistein

In Worten lässt sich die Resolution so umschreiben: Wenn in einer ersten Disjunktion ein Atom A_i und in einer zweiten Disjunktion das Literal $\neg A_i$ vorkommt, dann eliminiere man diese beiden Literale und kombiniere beide Formeln zu einer einzigen Disjunktion. Schematisch wollen wir das so darstellen:

$$\begin{array}{l} \Phi \vee A_i \\ \Psi \vee \neg A_i \\ -----\text{(Res.)} \\ \Phi \vee \Psi \end{array}$$

Warum ist dieser Schluss plausibel? Nun, wenn beide Formeln (i) $\Phi \vee A_i$ und (ii) $\Psi \vee \neg A_i$ schon nachgewiesen sind, so muss wenigstens eine der beiden Formeln Φ und Ψ gelten. Wären nämlich beide falsch, so müssten ja, damit (i) und (ii) beide gelten, A_i und $\neg A_i$ gleichzeitig zutreffen, was nicht möglich ist. Also folgt $\Phi \vee \Psi$ logisch aus den beiden Voraussetzungen.

Wir demonstrieren diese Schlussregel nun, indem wir die obige Knacknuss formalisieren. Wählen wir das Atom X für „X ist ein Mädchen" und folglich das Literal $\neg X$ für „X ist ein Junge", dann ergeben sich aus (1) – (9) die folgenden aussagenlogischen Formeln (allenfalls nach vorgängigen Umformungen der Implikationen gemäss der Regel $\Phi \to \Psi = \neg\Phi \vee \Psi$ und den Gesetzen von de Morgan):

(1) $E \vee K$, (2') $A \vee \neg K$, (2'') $\neg H \vee \neg K$, (3) $E \vee G \vee H$, (4) $A \vee \neg D$, (5) $\neg A \vee \neg B \vee E$, (6) $\neg D \vee \neg G$, (7') $\neg A \vee B \vee F$, (7'') $A \vee \neg B \vee F$, (8) $\neg A \vee \neg E \vee G$, (9') $D \vee \neg E$, (9'') $D \vee J$

Nun bilden wir einfach stur alle möglichen Resolutionen. Aus (1) und (2') erzeugt die Resolution die neue Formel (10) $A \vee E$. Aus (1) und (2'') erzeigt die Resolution die neue Formel (11) $E \vee \neg H$. Aus (1) und (8) wird die neue Formel (12) $\neg A \vee G \vee K$ erzeugt. Aus (1) und (9') entsteht die neue Formel (13) $D \vee K$. Aus (9') und (10) entsteht die neue Formel (14) $A \vee D$. Aus (4) und (14) erzeugt die Resolution die neue Formel A. Somit ist Ahrens ein Mädchen.

Man kann jetzt überall Resolution durchführen, wo das Literal $\neg A$ vorkommt und somit immer weitere Formeln erzeugen, bis das Geschlecht von jeder Person bekannt ist. Das Mechanistische dieses Vorgehens hat in den 60er-Jahren des letzten Jahrhunderts die Hoffnung geschürt, dass alles, was beweisbar ist, auch mechanisch (also durch eine Maschine) erledigt werden kann; man nennt die versuchte Umsetzung dieser Hoffnung „mechanisches Theorem-Beweisen" (mechanical theorem proving). Dabei zeigte sich rasch, dass dieser Weg zwar theoretisch gangbar ist, jedoch schnell an zu hohen Komplexitätsschranken scheitert; wenn nicht gedacht, sondern bloss gerechnet wird, werden eben viel zu viele Sackgassen beschritten, die Zeit und Speicherplatz rauben.

Die Resolution ist sogar *vollständig* in dem Sinne, dass, wenn eine Menge von Disjunktionen nicht erfüllbar ist, die konsequente Anwendung der Resolution dies nachweist, indem ein Widerspruch entsteht, also zum Beispiel eine Formel der Art $A \vee B$ und gleichzeitig eine zweite Formel der Art $\neg A \vee \neg B$ [15].

Fortsetzung im nächsten Heft mit diesen Kapiteln: **3. Prädikatenlogik. Aufbau einer formalen Sprache**
4. Die Unvollständigkeitssätze von Gödel

[15] Zum Beweis der Vollständigkeit der Resolution siehe etwa Ch. Chang, R. Ch. Lee, "Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving", Academic Press, Inc., Boston, 1973, pp. 83-86.