

## Seilreibung

Martin Lieberherr, MNG Rämibühl, lieberhm@mng.ch

### 1 Einleitung

Immer wieder lag das Frottiertuch, das ich im Badezimmer über die Stange gehängt hatte, beim nächsten Besuch am Boden. Ich hatte schon die Kinder in Verdacht, meine Ordnung zu sabotieren, aber ein kleiner Versuch hat mich eines Besseren belehrt, siehe Abbildung 1.

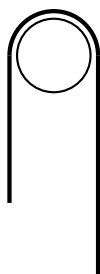


Abbildung 1: Ein trockenes Frottiertuch hängt über einer runden Stange (im Querschnitt gezeichnet). Die Enden hängen unterschiedlich tief. Das Tuch wiegt 300 g, ist 102 cm lang und 51 cm breit. Wenn das eine Ende 25 cm tiefer hängt als das andere, beginnt das Tuch zu rutschen.

Das Problem des rutschenden Frottiertuchs ist praktisch identisch mit jenem der Seilreibung, bei dem ein Seil teilweise oder mehrmals um eine zylindrische Achse geschlungen wird. Der Effekt ist 1717 vom französischen Brücken- und Wegebauinspektor Hubert Gautier beschrieben und experimentell untersucht worden.<sup>1</sup> Er schlang Schnüre mit Gewichten an den Enden um horizontale Achsen und mass, welcher Gewichtsunterschied durch die Seilreibung noch aufgefangen werden konnte. Die Aufgabe ist durch Leonhard Euler 1762/1769 formal gelöst worden. Die Lösung ist durch den preussischen Wasserbauingenieur Johann Albert Eytelwein mit seinem 1808 veröffentlichten Handbuch popularisiert worden. Seilreibung zeigt sich spektakulär, wenn ein grosses Schiff durch ein Tau, das einige Male um einen Poller geschlungen wird, von einer einzelnen Person festgehalten werden kann. Sie ermöglicht auch die Top-Rope Sicherung in der Kletterhalle. In der Seefahrt werden die Winsch und der Ankerspill, die ebenfalls auf Seilreibung beruhen, als mechanische Kraftverstärker verwendet.

### 2 Theorie

Wir betrachten ein dünnes, flexibles Seil (oder das Frottiertuch), das um eine Stange gelegt ist (Abbildung 2).

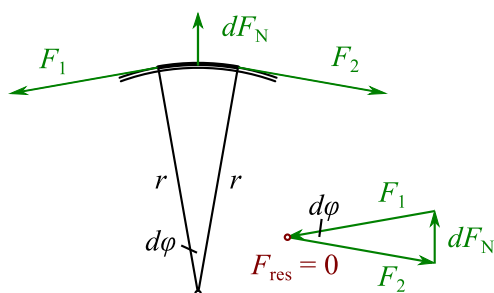


Abbildung 2: Ein Seil ist um eine Stange mit Radius  $r$  gelegt. Ein infinitesimales Seilstück der Länge  $rd\varphi$  erfährt im Gleichgewicht die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  in Seilrichtung und die infinitesimale Normalkraft  $dF_N$  in radialer Richtung. Im Gleichgewicht heben sich diese Kräfte auf und es gilt  $F_1 = F_2 = F$  und  $dF_N = Fd\varphi$ .

Falls, wie beim unsymmetrisch aufgehängten Frottiertuch, die Spannkraften von links und rechts nicht gleich gross sind, muss der Unterschied durch Reibung kompensiert werden, sonst herrscht kein Gleichgewicht mehr.

Entlang eines infinitesimalen Seilstücks nimmt dann die Spannkraft um  $dF$  zu oder ab, wobei diese Veränderung gleich der Reibungskraft  $dF_R = \mu dF_N$  ist. Die Grösse  $\mu$  ist der Reibungskoeffizient. Somit gilt

$$dF = dF_R = \mu dF_N = \mu F d\varphi \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dF}{F} = \mu \int d\varphi \quad \Rightarrow \quad (1)$$

$$\ln \frac{F}{F_0} = \mu\varphi \quad \Leftrightarrow \quad F = F_0 \exp(\mu\varphi) \quad (2)$$

Die Integrationskonstante  $F_0$  ist die Zugkraft an jener Stelle, wo das Seil die Achse erstmals berührt. Die Kraft  $F$  ist die Zugkraft dort, wo das Seil den Kontakt zur Achse wieder verliert. Der Unterschied  $F - F_0$  wird durch die Seilreibung aufgefangen. Offenbar wächst die Kraft  $F$  exponentiell mit der Anzahl Windungen respektive dem Windungswinkel  $\varphi$  an. Dieses exponentielle Wachstum erklärt die Effektivität von Poller und Co.<sup>2</sup>

### 3 Frottiertuchfall

Die Euler-Eytelwein Gleichung (2) gestattet es, mein Problem mit dem rutschenden Frottiertuch noch etwas weiter zu analysieren. Der in Abb. 1 links hängende Teil des Frottiertuchs ist etwa  $l_0 = 38$  cm lang und zieht mit  $F_0 = 1.1 \text{ N} \propto l_0$  nach unten. Das längere Stück ist ungefähr  $l = 63$  cm lang und belastet die Stange mit  $F = 1.8 \text{ N} \propto l$ . Bei dieser Asymmetrie wird die maximale Haftreibungskraft erreicht respektive überschritten. Das Tuch liegt über einen Winkel von  $\varphi = \pi$  an der Stange. Damit folgt für den Haftreibungskoeffizienten

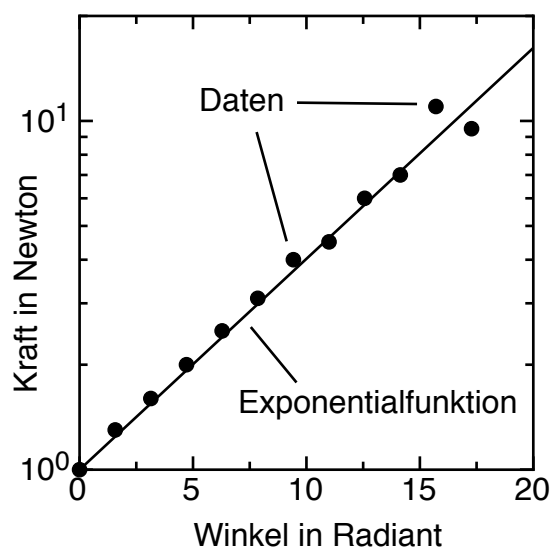
$$\mu_H = \frac{1}{\varphi} \ln \frac{F}{F_0} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{63 \text{ cm}}{38 \text{ cm}} = 0.16 \quad (3)$$

Das ist nun in der Tat wenig. Vielleicht sollte ich die Stange gummieren.

### 4 Experiment zur Seilreibung

Nach dieser kleinen Rechnung las ich zufällig von einem Schülerexperiment zur Seilreibung.<sup>3</sup> Ich habe es ‘quick and dirty’ nachgestellt: Eine Schnur wurde um eine horizontale Stahlstange geschlungen. Am einen Ende hing eine Last (100 g, d.h.  $F_0 = 1.0 \text{ N}$ ), am andern zog ich mit einem Kraftmesser. Die Zugkraft  $F$ , welche die Last gleichmässig hebt, wächst tatsächlich exponentiell mit dem Umschlingungswinkel, siehe Abbildung 3. Die Exponentialfunktion hat als einzigen Fitparameter den Gleitreibungskoeffizienten  $\mu_G = 0.14$ .

Abbildung 3: Zugkraft  $F$  versus Windungswinkel  $\varphi$ . Man beachte die semilogarithmische Skalierung.



<sup>1</sup> S. M. Holzer, “Das Euler-Eytelwein-Problem”, 2005, Universität der Bundeswehr München, abgerufen via Internet (13. April 2015)

<sup>2</sup> E. Levin, “Friction experiments with a capstan”, Am. J. Phys. 59 (1), Jan. 1991, 80-84

<sup>3</sup> R. McGrew, “A Simple Mechanical Experiment on Exponential Growth”, Phys. Teach. 63, April 2015, 222-223

30. April 2015, Lie.