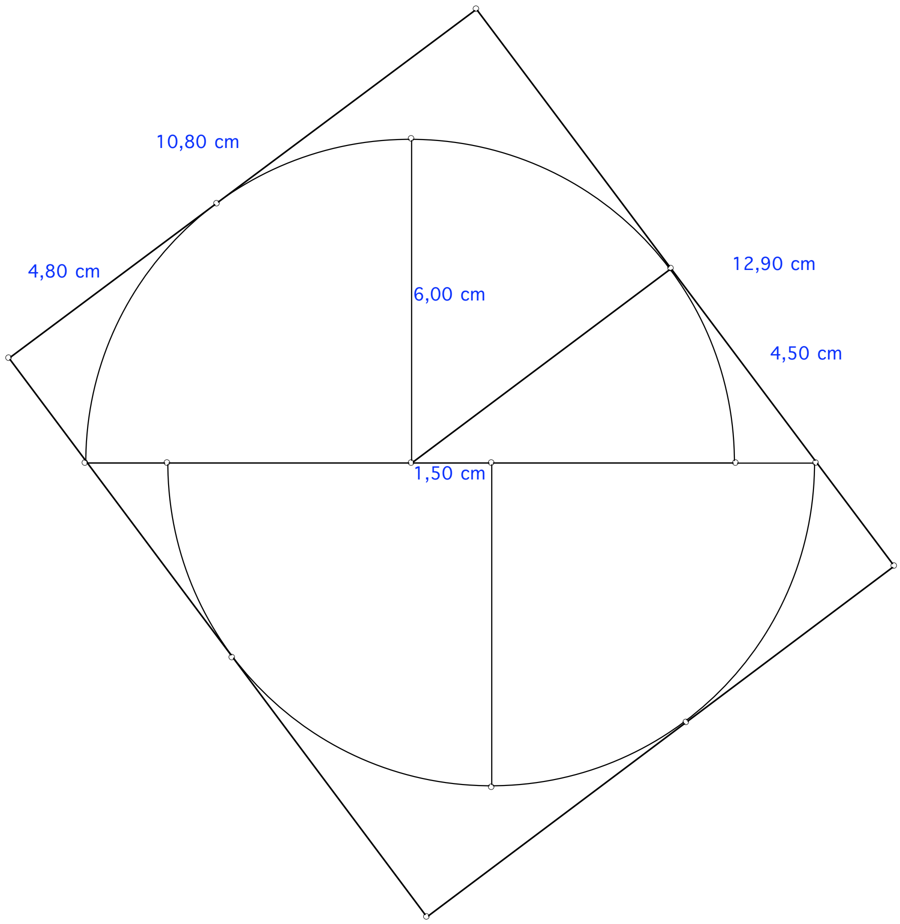
Lösungen zu: Zwei halbe Pizzas auf dem rechteckigen Backblech

Peter Gallin

Aufgabe von Winfried Müller aus dem vorangehenden Bulletin des VSMP: Peters Fertigpizza hat einen Durchmesser von 35 cm und passt daher nicht aufs Backblech von 31.5 cm auf 38 cm. „Kein Problem“, sagt Freundin Uta, „halbiere sie doch und ...“. Welchen Tipp Uta hatte, wissen wir nicht. Mit welchen Maßen eines Bleches kannst du zwei halbe Pizzas auf dem Blech unterbringen? Natürlich können die obigen realistischen Maße variiert oder sogar durch Variable ersetzt werden; gefragt ist bei einem Kreisradius r generell nach den möglichen Seitenlängen l und b des umbeschriebenen Rechtecks.

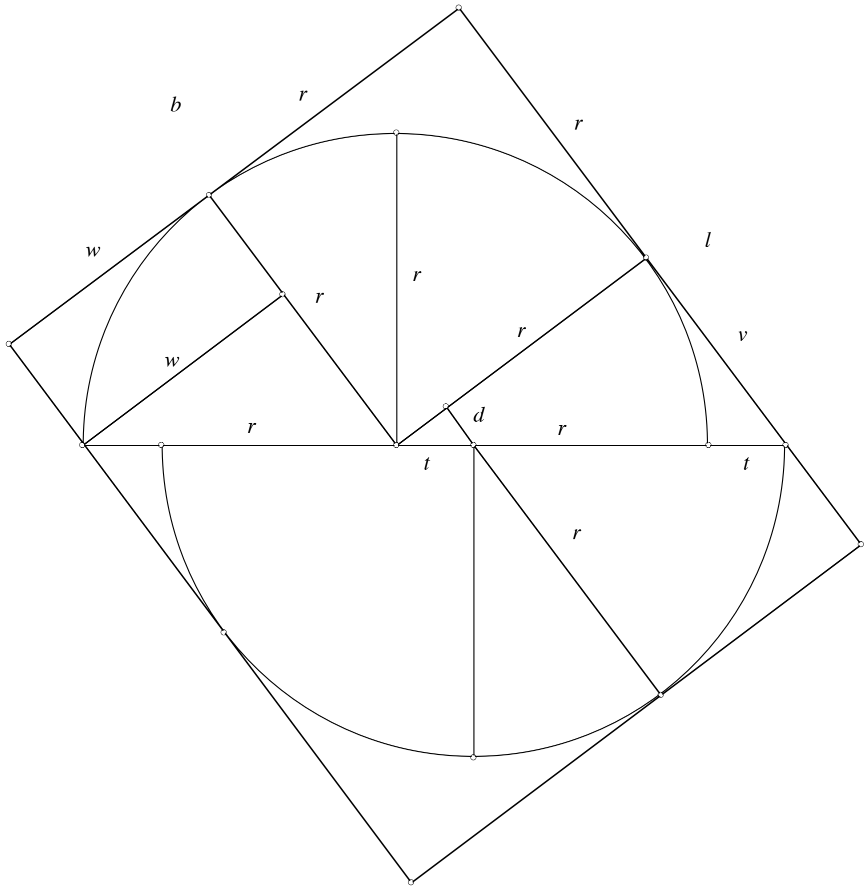
Lösungen

Nach einigem Pröbeln mit den konkret vorgegebenen Massen merkt man schnell, dass die beiden Halbkreise mit ihren Begrenzungsdurchmessern aneinander liegen sollten, allerdings leicht zueinander verschoben, so dass sie zusammen keinen Vollkreis mehr bilden.



Ich habe zunächst mit $r = 6$ cm gearbeitet. Daraus folgt dass alle Maße mit dem Faktor 12/35 verkürzt werden. Das rechteckige Backblech hat also die Maße 10.8 cm auf etwa 13.02857 cm. Das erste mit Cabri gezeichnete Bild zeigt bereits, dass die beiden Halbkreise mit Radius 6 cm bei einer Verschiebung von 1.5 cm auf einem Blech von 10.8 cm auf 12.90 cm Platz finden. Dazu habe ich von den beiden frei liegenden Ecken der Halbkreise je die Tangente an den anderen Halbkreis und anschliessend senkrecht dazu stehende Tangenten an die beiden Halbkreise gelegt, so dass das minimale umschreibende Rechteck entsteht. Man schöpft also bei einer Verschiebung von 1.5 cm die gegebene Länge des Backblechs nicht ganz aus.

Mit Hilfe der nächsten Abbildung wollen wir bei gegebenem Radius r und angenommenem Verschiebungsparameter t, mit dem die beiden Halbkreise gegeneinander versetzt sind, berechnen, welche Länge l und Breite b sich mit der beschriebenen Tangentenkonstruktion ergeben. Dabei verwenden wir die Hilfsgrössen v, d und w gemäss Eintrag in der Abbildung.



Mit Pythagoras berechnen wir zuerst

$$v = \sqrt{(r+t)^2 - r^2} = \sqrt{2rt + t^2} = \sqrt{t(2r+t)}\ .$$

Mit Ähnlichkeit folgt

$$d : t = v : (r+t)$$

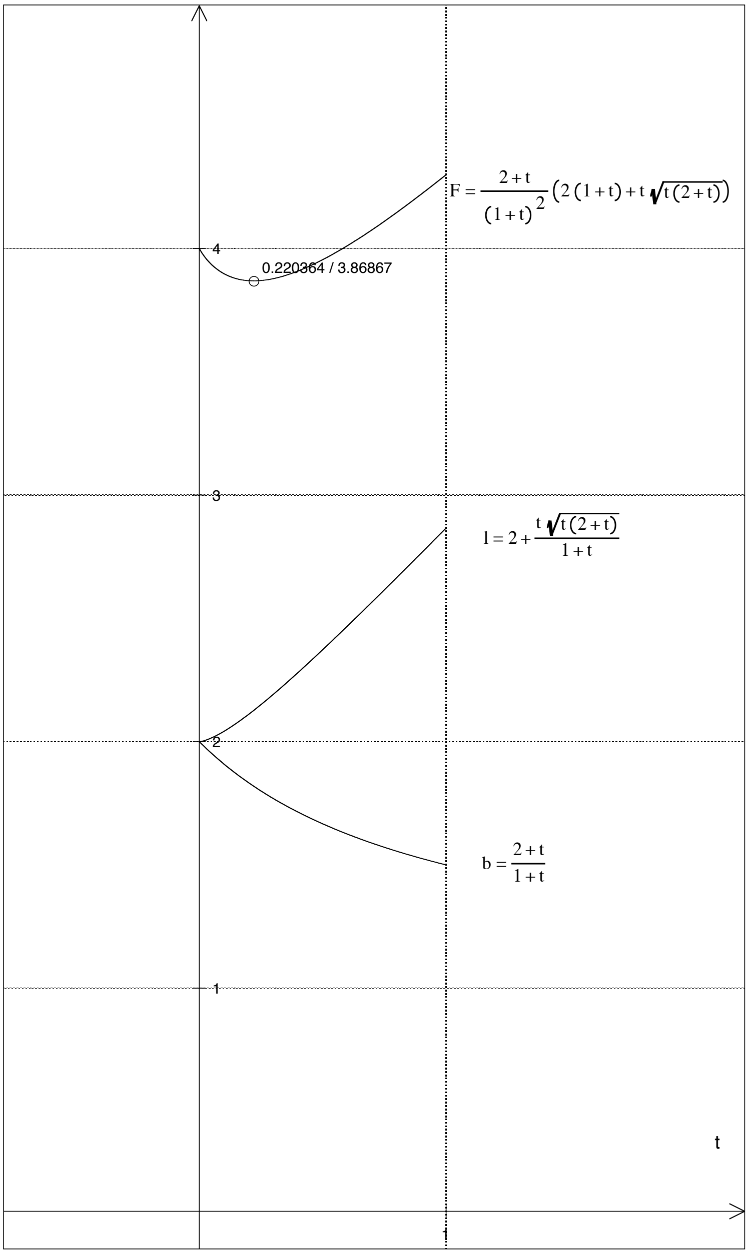
und damit $d = \frac{t}{r+t}\sqrt{t(2r+t)}$. Die Länge l ergibt sich aus $l = 2r + d$ und damit

$$l(t) = 2r + \frac{t}{r+t}\sqrt{t(2r+t)}\ .$$

Für die Breite $b = r + w$ müssen wir noch die Hilfsgrösse w mittels Ähnlichkeit berechnen: $w : r = r : (r + t)$, womit sich $w = \frac{r^2}{r+t}$ ergibt. Insgesamt erhalten wir

$$b(t) = r + w = r + \frac{r^2}{r+t} = \frac{2r^2 + rt}{r+t} = \frac{r}{r+t}(2r + t) \ .$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt für $r = 1$ die Funktionen $l(t)$ und $b(t)$ für den Bereich $0 < t < 1$. Ausserdem ist auch die Rechtecksfläche $F(t) = l(t) \cdot b(t)$ dargestellt. Die minimale Rechtecksfläche wird für $t \approx 0.220364$ erreicht, was einer Breite von $b \approx 1.8194$ bei $r = 1$ entspricht. Für $r = 17.5\,\text{cm}$ ergibt sich eine Breite von $31.8395\,\text{cm}$, was etwas mehr als die ursprünglich gegebene Breite von $31.5\,\text{cm}$ ist. Wählen wir t etwas grösser, nämlich $t = 0.25$, erhalten wir $b = 1.8$, was auf eine Breite von genau $31.5\,\text{cm}$ führt. Die Masse des ursprünglich gegebenen Backblechs liegen also nahe bei der für den Durchmesser von $35\,\text{cm}$ minimalen Fläche.



Um die gestellte Aufgabe noch vollständiger zu bearbeiten, müsste man auch rechteckige Backbleche untersuchen mit genügend grosser Länge, aber einer Breite, die zwischen einem und zwei Radien der Pizza liegt. Dann können die beiden Pizzahälften auch so platziert werden, dass deren begrenzende Durchmesser punktsymmetrisch zur Mitte des Blechs auf den Längsseiten liegen und sich die beiden Kreisbogen im Zentrum des Blechs berühren. Berechnet man nun die notwendige minimale Länge des Blechs, erhält man $l = 2r + \sqrt{(2r)^2 - b^2}$. Für die gegebenen $r = 17.5\,\text{cm}$ und $b = 31.5\,\text{cm}$ ergibt sich in dieser Anordnung allerdings $l \approx 50.256\,\text{cm}$, was viel mehr als die gegebene Länge ist.