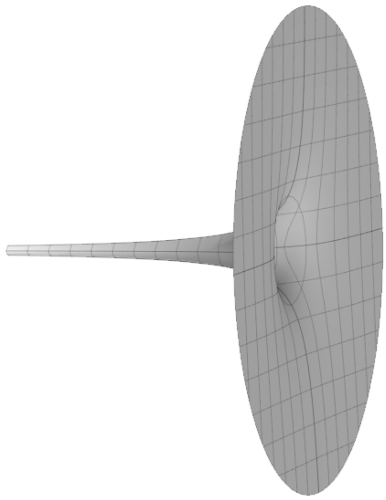
Tromba di Torricelli o dell'arcangelo Gabriele

Maurice Froidcoeur e Andrea Pellegrinelli

Consideriamo la superficie di rotazione ottenuta ruotando di un angolo giro il grafico della funzione $y = \frac{1}{x}$ sull'intervallo $[1; +\infty[$ attorno all'asse delle ascisse. Ruotiamo cioè la metà di un ramo dell'iperbole equilatera attorno ad un suo asintoto, ottenendo una sorta di tromba di lunghezza infinita.



Precisiamo già sin d'ora che, per non appesantire troppo la notazione nei calcoli, ometteremo dove non necessario di indicare esplicitamente $\lim\limits_{x\to+\infty}$ e $\lim\limits_{x\to 0}$, operando nel contesto degli integrali impropri, rispettivamente di introdurre valori assoluti nelle primitive, dal momento che con la variabile x lavoriamo in $\mathbb{R}_+$.

Calcoliamo dapprima il volume delimitato dalla tromba:

$$V = \pi \int_1^{+\infty} y^2\, dx = \pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = \pi\Big(\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} - (-1)\Big) = \pi\ .$$

Calcoliamone ora l'area laterale:

$$A = 2\pi \int_1^{+\infty} y\sqrt{1+(y')^2}\, dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\, dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\, dx\ .$$

Poniamo la sostituzione $t = x^2$; abbiamo $dt = 2xdx$, e quindi $dx = \frac{dt}{2x}$. Otteniamo

$$A = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}}{2t^2}\, dt = \pi \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}\, dt\ .$$

Occorre ora procedere integrando per parti, scegliendo $u = \sqrt{t^2+1}$ e $dv = \frac{1}{t^2}dt$, da cui $du = \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}$ e $v = \frac{-1}{t}$. Quindi

$$\begin{aligned} A &= \pi\left\{\left[\frac{-\sqrt{t^2+1}}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{-1}{t}\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}\right\} \\ &= \pi\left\{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \lim_{t\to+\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{t^2}} + \sqrt{2}\right\} = \pi\left\{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} + \sqrt{2} - 1\right\}\ . \end{aligned}$$

Per terminare il calcolo dobbiamo solo determinare una primitiva di $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$. La possiamo trovare consultando un qualsiasi formulario, oppure ricordarci la sostituzione classica $w = t + \sqrt{t^2+1}$ che dà $dw = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt = \left(\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}\right)dt = \frac{w}{w-t}\,dt$. In questo modo otteniamo facilmente le primitive:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{(w-t)dw}{(w-t)w} = \int \frac{dw}{w} = \ln w + K = \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + K \ .$$

Possiamo ora concludere facilmente il calcolo:

$$A = \pi \left\{ \lim_{t\to+\infty} \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 1 \right\} = +\infty \ .$$

Si evidenzia così un aspetto assolutamente paradossale: questo solido (a forma di tromba di lunghezza infinita) ha un volume finito, pari a π, delimitato però da una superficie infinita!

Alcune osservazioni supplementari.

Limitandoci all'intervallo $[1;2]$ possiamo confrontare volume e area del pezzo di tromba di Torricelli con quella laterale del tronco di cono che la "ingloba".

Iniziamo dalla tromba.

Il volume è presto calcolato: $V = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_1^2 = \pi\Big(-\frac{1}{2} - (-1)\Big) = \frac{1}{2}\pi \ .$

Per l'area laterale, ricordando che $t = x^2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} A &= \pi \left[\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) - \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right]_1^4 = \pi\left[\ln\left(4+\sqrt{17}\right) - \frac{\sqrt{17}}{4} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2}\right] \\ &= \pi\left[\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right] \approx 5.01642 \approx 1.60\pi \ . \end{aligned}$$

Per il tronco di cono abbiamo:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi \ ; \\ A_{lat} &= \pi\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi\sqrt{5} \approx 5.26861 \approx 1.68\pi \ . \end{aligned}$$

Il risultato sul volume ci soddisfa appieno, mentre potrebbe esserci un attimo di smarrimento iniziale sul fatto che la superficie generata dal segmento sia superiore a quella generata un arco che è più lungo del segmento. Un piccolo momento di riflessione però ci rassicura subito. Infatti i dischetti infinitesimi generati dalla curva hanno tutti un'area laterale minore rispetto a quelli generati dal segmento.

È possibile dimostrare che l'area laterale della Tromba di Torricelli è infinita senza dover fare il calcolo esplicito effettuato nella pagina precedente. Basta ricorrere alla semplice minorazione seguente, suggerita ad esempio da wikipedia, del tutto evidente visto che $y \cdot \sqrt{1+(y')^2} \geq y$, dal momento che $y > 0$ e $\sqrt{1+(y')^2} \geq 1$:

$$A \geq 2\pi \int_1^{+\infty} y\, dx = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = 2\pi \ln x \Big|_1^{+\infty} = 2\pi \cdot \big(\lim_{x\to+\infty} \ln x - 0\big) = +\infty \ .$$

Si può anche fare il calcolo ruotando la stessa curva, considerata sull'intervallo $]0;1]$, attorno all'asse delle ordinate.

Calcoliamo dapprima il volume (attenzione: la funzione è decrescente, pertanto l'incremento verticale sarà negativo, quindi per "rimettere le cose a posto" abbiamo scambiato gli estremi di integrazione):

$$V = \pi \int_1^0 x^2 y' \, dx = \pi \int_1^0 x^2 \frac{-1}{x^2} \, dx = \pi \int_1^0 -dx = \pi \Big[-x \Big]_1^0 = \pi \Big(\lim_{x \to 0} (-x) - (-1) \Big) = \pi \ .$$

L'area laterale si ottiene calcolando $2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+(y')^2}\, dx$. Osserviamo che qui il fatto che la funzione sia decrescente non ha conseguenze, dal momento che per calcolare l'apotema del tronco di cono infinitesimale si usa il teorema di Pitagora e quindi gli incrementi sulle ascisse e sulle ordinate sono considerati al quadrato.

Abbiamo così:

$$A = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx \ ;$$

la consueta sostituzione $t = x^2$ (e quindi $dt = 2xdx$) ci porta a

$$A = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \, dt \ .$$

Occupiamoci di trasformare convenientemente l'integranda:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} = \frac{t^2+1}{t\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} \ .$$

Per trovare le primitive della prima frazione poniamo $u = t^2 + 1$, da cui $du = 2tdt$, e quindi:

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + K = \sqrt{t^2+1} + K \ .$$

La seconda la sostituzione è di tipo trigonometrico. Poniamo $t = \tan u$, da cui
$dt = (1 + \tan^2 u)du$, e quindi:

$$\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{1+\tan^2 u}{\tan u \sqrt{1+\tan^2 u}} du = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 u}}{\frac{\sin u}{\cos u} \cdot \frac{1}{\cos u}} du = \int \frac{du}{\sin u} = \ln \left(\tan \frac{u}{2} \right) + K \ .$$

Prima di completare il calcolo dell'area della tromba, ricordiamo che per giungere alla primitiva della funzione $\frac{1}{\sin u}$ si usa le formula trigonometrica $\sin u = \frac{2\tan\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}$.

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{1+\tan^2 \frac{u}{2}}{2\tan \frac{u}{2}} du = \int \frac{1+\tan^2 \frac{u}{2}}{\tan \frac{u}{2}} \, d\left(\frac{u}{2}\right) = \ln \left(\tan \frac{u}{2} \right) + K \ .$$

Per ritornare alla variabile t, e dare così una primitiva della funzione $\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}$, necessitiamo ancora di un poco di calcolo, ricordando che $t = \tan u$

$$\begin{aligned} \tan \frac{u}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} = \sqrt{\frac{(1-\cos u)^2}{1-\cos^2 u}} = \sqrt{\frac{(1-\cos u)^2}{\sin^2 u}} = \frac{1-\cos u}{\sin u} \\ &= \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{\tan u} = \frac{\sqrt{1+\tan^2 u}}{\tan u} - \frac{1}{\tan u} = \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t} \end{aligned}$$

Possiamo ora assembleare i diversi pezzi:

$$A = \pi \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\, dt = \pi \left[\sqrt{t^2+1} + \ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1} - 1}{t} \right) \right]_0^1 .$$

Grazie al teorema di de l'Hospital abbiamo $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+1}-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = 0$.
Conseguentemente

$$\lim_{t\to 0} \ln\left(\frac{\sqrt{t^2+1}-1}{t} \right) = -\infty .$$

E infine

$$A = \pi \cdot \left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}-1) - 1 - (-\infty) \right] = +\infty .$$

Qualcuno potrebbe stupirsi di non aver letto in questo testo il vocabolo “iperboloide", visto che il solido esaminato è costruito ruotando un ramo di iperbole. Torricelli parlava di *solido iperbolico acuto* o *tromba di Gabriele* oppure anche di *anfora di Zeus* (*si veda http://www.imss.fi.it/multi/torricel/itorat31.html*). In realtà oggi chiamiamo iperboloide il solido ottenuto ruotando una iperbole attorno ad un suo asse di simmetria. La tromba di Gabriele invece è ottenuta ruotando la metà di un ramo d'iperbole attorno ad un suo asintoto. Così un iperboloide è una quadrica (oggetto di secondo grado), mentre il solido che stiamo esaminando è in realtà una quartica. Infatti l'equazione di questo solido è $x^2(y^2+z^2) = 1,\ x \geq 1$, se lo costruiamo ruotanto attorno all'asse delle ascisse, rispettivamente $y^2(x^2+z^2) = 1,\ y \geq 1$, quando si ruota attorno all'asse delle ordinate. È quindi una superficie descritta da una equazione di quarto grado.

Per determinare volumi ed aree anche per oggetti che hanno qualche dimensione geometrica che fugge verso l'infinito ci serviamo di integrali impropri. Per sottolineare ulteriormente gli aspetti paradossali che si possono incontrare in queste occasioni segnaliamo anche l'esistenza del *vaso di de Sluse*. È il solido generato dalla rotazione dell'area tra un semiarco infinito di cissoide e il suo asintoto, attorno al suo asse di simmetria. In questo caso il volume è infinito mentre l'area laterale è finita. Si veda a proposito di questo matematico belga, di quattordici anni più giovane rispetto a Torricelli, *http://serge.mehl.free.fr/chrono/Sluse.html* e i vari siti correlati. Si consiglia anche di consultare quanto wikipedia scrive, nelle diverse lingue, a proposito della cissoide di Diocle. Di particolare interesse la versione francese che si trova all'indirizzo *fr.wikipedia.org/wiki/Cissoïde_ de_ Dioclès.*

Gli autori ringraziano Philip Hubert per il disegno e per la preziosa collaborazione.