

A. Ostermann, G. Wanner: Geometry by Its History 437 Seiten, EUR 64.15, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, ISBN 978-3-642-29162-3.

Dieser Text umfasst den Inhalt einer Grundvorlesung *Geometrie* für Naturwissenschaften und könnte als Vademecum den Unterrichtenden im Gymnasium ein ganzes Berufsleben lang nützlich sein. Der reiche Inhalt wird gemäss der historischen Entwicklung der Geometrie bis in die Jetztzeit angeordnet. Dabei meint . . . *by Its History* nicht den betont wissenschaftshistorischen Standpunkt.

Eine offensichtliche Zweiteilung trennt die klassische synthetische Geometrie gegenüber der neuzeitlichen analytischen Geometrie, die wesentlich auf algebraische Strukturen aufbaut.

Ausgangspunkt für die Behandlung der klassischen Geometrie sind die Sätze von Thales (Strahlensätze) und der Satz von Pythagoras. Darauf folgt eine Übersicht zu Euklids Elementen, Kegelschnitte, weitere Ergebnisse über speziellen Kurven (Nicomedes und Archimedes), Dreiecksgeometrie, die Kreissätze von Steiner und mehr. Ebene und sphärische Trigonometrie. Bemerkenswert ist die geometrische Darstellung, wie Newton die Keplergesetze aus dem von ihm postulierten Gravitationsgesetz hergeleitet hat.

Die algebragestützte analytische Sicht wird eröffnet mit einem Problem von Pappus, das Descartes mit analytischer Geometrie behandelt hat. Es folgt eine analytische Behandlung von Kegelschnitten und anderen Kurven, Zeugen einer Vorstufe der Differentialgeometrie, die algebraische Behandlung der Frage nach der Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal, Raumgeometrie und Vektoralgebra, Matrizen, lineare Abbildungen, quadratische Formen, Perspektive und projektive Geometrie.

Der Text wird getragen durch mannigfaltige Beweise einer didaktischen Verpflichtung. Zu nennen sind insbesondere die sorgfältig gestalteten Abbildungen, insbesondere auch Stereogramme zur Unterstützung der Raumanschauung, ferner Reproduktionen historischer Abbildungen und Zitate von Originaltexten. Auch gibt es zu jedem Kapitel eine Anzahl von gut gewählten Aufgaben zur Vertiefung, Anwendung, Ergänzung des vermittelten Stoffes. Die letzten rund 50 Seiten des Textes enthalten knappe Lösungen. Es folgen ein ausführliches Stichwortverzeichnis und umfangreiche Literaturangaben.

Die grosse Detailkenntnis der Autoren ist beeindruckend. Die Reichhaltigkeit führt bisweilen zu filigranen Verästelungen (z.B. bis in die Aufgabensparte von *Elemente der Mathematik*), in die man sich versteigen kann. Dabei kann der Blick auf's Ganze zeitweilig beeinträchtigt werden.

Dieser Text deckt weit mehr ab, als der gymnasiale Geometrieunterricht verlangt. Die Ausblicke oder Erläuterungen der Hintergründe oder Zusammenhänge sind jedoch für die Unterrichtenden wesentlich. Doch bei allen Qualitäten ist dies keine Blaupause für einen Geometrieunterricht im Gymnasium, wohl aber eine reichhaltige Quelle für Ideen und Referenzen für die Unterrichtenden.

Der Text ist erstaunlich vollständig und doch habe ich da und dort etwas vermisst. Drei Beispiele sollen genügen:

- Neben Eulers Beiträgen etwa zur Trigonometrie oder zur Dreiecksgeometrie findet man in einer Aufgabe auch *Eulers Polyedersatz*. Ich habe den Hinweis vermisst auf die Bedeutung dieser topologischen Invariante am Anfang einer ganz neuen Entwicklung. Die Eulercharakteristik kann im Gymnasium als aussichtsreiches Thema vertieft werden.
- Kleins Erlanger Programm wird erwähnt, aber wir sehen nicht, dass die Algebraisierung mit der Betonung der *Rolle der Gruppen* von struktur-erhaltenden Abbildungen eine neue Dimension annimmt. Bei Poincaré wurde die Gruppe zur Quintessenz des Raumbegriffes. In der Elementargeometrie wurde nach 1960 versucht, alles auf den Spiegelungsbegriff zu reduzieren.
- Ähnlich finden sich auch Hinweise auf *automatisches Beweisen* im Text. Ich hätte dazu mehr gewünscht: Bemerkungen zum Satz von Tarski zur Vollständigkeit der ‘Elementargeometrie’, zur geometrischen Realisierung der Arithmetik (inklusive der Quadratwurzeloperation) in \mathbb{R} mit finiten Mitteln (Zirkel und Lineal) oder Hinweise auf Buchbergers Algorithmus als Erweiterung der Gausselimination.

Ein wünschbarer Ausblick in die Gegenwart der Geometriepraxis (CAD, Computational Geometry) ist aber vielleicht mit dem Zusatz *... Its History* unverträglich.

Die kritischen Anmerkungen markieren Grenzen, die der Text nicht überschreitet. Sie sollen das grosse Verdienst der Verfasser nicht schmälern. Das Buch kann insbesondere auch in der Ausbildung und Berufspraxis von Lehrkräften eine wichtige und nützliche Rolle spielen. Man kann nur wünschen, dass es sich weit verbreitet und der Erosion der Geometriekenntnisse entgegenwirkt.

H.R. Schneebeli, Wettingen